REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Maestría en Educación Matemática

USO DE PROBLEMAS DEL CANGURO MATEMÁTICO EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN LOS ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en

Educación Matemática

Lady Paola Andrea Pabón Obando

Bogotá D.C.

2017

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Maestría en Educación Matemática

USO DE PROBLEMAS DEL CANGURO MATEMÁTICO EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN LOS ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en

Educación Matemática

Lady Paola Andrea Pabón Obando

Director de tesis: Gerardo Antonio Chacón Guerrero (PhD.)

Bogotá D.C.

2017

Nota de aceptación:

Firma del presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá D.C. noviembre de 2017

AGRADECIMIENTOS

A nuestro Dios que me regala la gran oportunidad de estar acá, de permitirme vivir cada día y llenarme con su sabiduría y fuerzas en todo momento.

A los doctores de la maestría, los cuales en el transcurso de la carrera me compartieron su gran conocimiento y tuvieron paciencia a cada una de mis deficiencias que presentaba en ciertas ocasiones.

Agradezco de manera muy especial a la Doctora Mary Falk de Losada, a quien le guardo un profundo respeto y admiración desde el primer día que la conocí. Con su gran conocimiento y sabiduría, siempre tuvo un aporte y sugerencia que marco en mí, especialmente en la tesis. De verdad que reitero lo agradecida que estoy con ella.

Por otro lado agradezco de todo corazón al Doctor Gerardo Antonio Chacón, quien me acompañó en el proceso y me mantuvo paciencia en la tesis, brindándome la ayuda necesaria para poder sacar adelante este proyecto de investigación, y por ultimo compartiéndome sus conocimientos y consejos en los momentos indicados. Siempre conté con sus valiosas aportaciones y aportes para la tesis, la cual fueron de gran utilidad para que fuera posible, y reconozco que sin él hubiera sido el camino más difícil.

También a esas personas que me brindaron una ayuda, apoyándome en los momentos más difíciles, al Doctor Osvaldo Rojas por reglarme un poco de su tiempo para colaborarme y ayudarme, sus sugerencias siempre fueron valiosas para mí.

Y Especialmente para mi madre que siempre me mantuvo fuerte en este proceso de la maestría.

DEDICATORIA

Quiero dedicar este trabajo primeramente a Dios, que es el ser que me ha permitido llegar hasta donde he llegado.

En segundo lugar quisiera dedicárselo a mis padres, los cuales han sido de gran apoyo y admiración incondicional en todo momento, por educarme, por creer en mí, por ahorrar cada peso para darme una buena educación, por bríndame las fuerzas necesarias para levantarme en cada caída, la energía para seguir adelante, por enseñarme a no rendirme y seguir insistiendo, y valorar cada esfuerzo de las personas, pero especialmente de ellos por demostrarme que al tener un trabajo muy humilde puedes conseguir las cosas cuando te las propones y tienes un objetivo principal.

Ellos son y seguirán siendo el motor que permite que cada sueño y meta sea posible.

SÍNTESIS

La investigación busca mejorar las habilidades de razonamiento matemático en los estudiantes esencialmente en geometría. La resolución de problemas es un aspecto importante en el desarrollo cognitivo, sin embargo es un tema que se evade dentro del aula, al no querer enseñar matemáticas por medio de los problemas, siendo esto un proceso de adquisición para nuevos conocimientos. Para el aprendizaje de las matemáticas es esencial que el estudiante pueda trabajar con problemas que despierten en su interés, creatividad, crear métodos o estrategias de solución y elaborar conjeturas en un espacio donde el diálogo, los aportes e intervenciones favorecen en su aprendizaje.

El marco de la presente investigación está sustentado en la resolución de problemas, Competiciones Matemáticas, Canguro Matemático, marco geométrico y la Comunidad Práctica de Wenger.

La implementación del sistema de actividades busca mejorar las habilidades de razonamiento matemático en los estudiantes de grado octavo por medio de los problemas del Canguro Matemático del Colegio Elisa Borrero de Pastrana.

A partir de estos referentes, se emplearon problemas del Canguro Matemático relativo a geometría fundamental mediante las cuales se pudieran desencadenar procesos de aprendizajes más significativos y llamativos para los estudiantes a partir de los conocimientos básicos que tienen en geometría.

ABSTRACT

This research looks for improving the mathematical reasoning skills in eighth grade students specifically in geometry. The problem solving is an important aspect in the cognitive development, however it is an issue that avoids inside the classroom because of the teachers don’t want to teach mathematics by means of problems, this process allows the acquisition of new knowledge. In the mathematical learning process is essential that the student can work with problems in order to catch their interest, creativity, creating methods or strategies to solve and doing conjectures in a space where the dialogue, contributions and interventions have influence in the learning process.

The theoretical framework of this research is based on problem solving, math contest, kangaroo math, geometric framework and Wenger practice community.

The system implementation of the activities looks for improving the mathematical reasoning skills in the eighth grade students at Elisa Borrero de Pastrana School by means of kangaroo math problems.

Based on these models, this research used kangaroo math problems related to basic geometric in order to create meaningful learning processes for the students using their basic knowledge in this subject.

TABLA DE CONTENIDOS **PÁG.**

INTRODUCCIÓN 1
CAPITULO 1. ESTADO DEL ARTE 7
1.1. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría 7
1.1.1. From a Mathematical Situation to a Problem 7
1.1.2. Problemas de olimpiadas matemáticas sobre geometría 8
1.1.3. Techniques for Solving Problems of Plane Geometry 9
1.2. Investigaciones sobre los problemas de Canguro Matemático como herramienta de diagnóstico 10
1.2.1. Análisis del comportamiento de alumnos expertos resolutores de problemas en el contexto del concurso matemático Pruebas Canguro 10
1.2.2. Los problemas de los concursos de matemáticas como recurso didáctico 11
1.2.3. Material Didáctico Problemario: Resolución de Problemas Matemáticos 13
1.2.4. Segundo Seminario Nacional sobre Resolución de Problemas y el Aprendizaje de las Matemáticas 15
1.2.5. Estrategias generales en la resolución de problemas de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas 16
1.3. Investigaciones sobre las estrategias de entrenamiento para competencias matemáticas en el aula de clases. 18
1.3.1. The Rainbow of Mathematics—Teaching the Complete Spectrum and the Role Mathematics Competitions Can Play 18
1.3.2. Competition Aims to Develop Flexibility in the Classroom 20
1.3.3. Discovering, Development, and Manifestation of Mathematical Talent 22
CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO 24
2.3. Uso de los problemas de competiciones matemáticas. 28
2.4. Marco geométrico 36
2.5. Comunidad práctica de Wenger. Su incidencia en el aprendizaje 38
CAPÍTULO 3. DISEÑO Y APLICACIONES DE LAS ACTIVIDADES 45
3.1. Estructuras de las actividades. 45
3.2.1. PRUEBA INICIAL: ¿QUÉ TANTO SABES DE GEOMETRÍA? 46
3.2.2. ACTIVIDAD 1: PASOS DE RESOLUCION DE PROBLEMAS CON PROBLEMAS DE CANGURO MATEMÁTICO. 47

3.2.3. ACTVIDAD 2: CALCULANDO PERÍMETROS. ... 48
3.2.4. ACTVIDAD 3: CALCULANDO ÁREAS. ... 49
3.2.5. ACTIVIDAD 4: ¿QUÉ TANTO SABES DE TRIÁNGULOS? ... 50
3.2.6. ACTIVIDAD 5: ¿QUÉ TANTO SABES DE CÍCULOS Y CIRCUFERENCIAS? ... 50
3.2.7. EVALUACIÓN FINAL: ... 51
Conclusiones del capítulo 3 ... 52
CAPITULO 4. ANALISIS DE LOS RESULTADOS DE LA PROPUESTA. ... 53
4.1 Prueba inicial: ¿Qué tanto sabes de geometría? ... 54
4.2. Desarrollo de la actividad 1: Pasos de resolución de problemas con problemas del Canguro Matemático. ... 71
4.3. Desarrollo de la actividad 2: Calculando perímetros. ... 79
4.4. Desarrollo de la actividad 3: Calculando áreas. ... 93
4.5. Actividad 4: ¿Qué tanto sabes de triángulos? ... 108
4.6. Actividad 5: ¿Qué tanto sabes de círculos y circunferencias? ... 121
4.7. PRUEBA FINAL. ... 134
CONCLUSIONES ... 149
RECOMENDACIONES ... 153
BIBLIOGRAFÍA ... 154
ANEXOS ... 157

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo busca estimular a los estudiantes a generar estrategias de solución y mejorar sus habilidades de razonamiento matemático, por medio del diálogo y la integración, a partir de la motivación al aprendizaje fomentada por algunos problemas de geometría fundamental propuestos en el Canguro Matemático.

En la educación básica y media se evidencian las deficiencias y dificultades que presentan los estudiantes esencialmente en geometría. Estas falencias se hacen presentes debido a varias razones, como podrían ser: la falta de tiempo para la enseñanza de la geometría, o la falta de problemas que permitan razonar al estudiante y generar habilidades en la resolución de problemas, entre otras.

Los problemas en geometría forman una parte esencial para construir y favorecer la construcción de nuevo conocimiento. La importancia que tienen los problemas del Canguro Matemático es que promueven el aprendizaje profundo, activo y el repaso de los conceptos básicos fundamentales en la geometría, siendo éstos una nueva oportunidad para resolver problemas interesantes y llamativos por parte del estudiante.

Uno de los recursos primordiales y esenciales para favorecer la enseñanza de la geometría sería por medio de los problemas de las Competiciones Matemáticas, que están diseñados para descubrir la creatividad, las habilidades y el pensamiento matemático de un joven ante un problema, en lugar de simplemente identificar los procesos técnicos que el estudiante maneja.

Se afirma en una publicación en relación con la Olimpiada Matemática Española: "*Los problemas de todas las fases (de las Olimpiadas Matemáticas) no requieren conocimientos especiales de Matemáticas, por el contrario se intenta que para resolverlos el alumno deba utilizar capacidad de raciocinio, habilidad para* *enfrentarse a situaciones nuevas y una cierta dosis de lo que tradicionalmente se conoce por idea feliz*"[1]. Este tipo de competiciones, pretenden dotar a las matemáticas de un contenido más lúdico y retador para la enseñanza y construcción de nuevos contenidos. Al introducir este tipo de problemas en el aula se genera una necesidad de actualización de conocimientos, búsqueda de problemas nuevos, métodos, estrategias, técnicas de solución y contenidos retadores.

Al emplear en el aula los problemas de las Competiciones Matemáticas como recurso de enseñanza de la geometría, se esperaría mejorar las habilidades de razonamiento matemático de los estudiantes, especialmente porque este tipo de problemas están diseñados con el propósito de despertar la curiosidad, creatividad y la habilidad de crear estrategias de solución en la resolución de problemas.

Méndez (2009) considera "*En este tipo de problemas se necesita de creatividad, de pensar, analizar los problemas e ir formando una solución bien argumentada de manera lógica*."[2]

Pérez citado por Amaya & Yair (2017) afirma *"… los problemas reto, son problemas que no son rutinarios, son problemas que hacen pensar a los estudiantes, que requieren ingenio y cuya respectiva solución ayuda al estudiante a mejorar conceptos y a desarrollar Competiciones Matemáticas."*[3]

Según afirma Ramos (2006) existe "*… un elemento crucial asociado a la competencia matemática (él cual es que)…el estudiante desarrolle diversas estrategias que le permitan resolver problemas que requieran cierto grado de independencia y creatividad"*[4], siendo este un elemento motivador que con lleva a

[1] Olimpiadas Matemáticas Españolas, RSME (2007). ¿Qué son las Olimpiadas Matemáticas? España. http://www.olimpiadamatematica.es/platea.pntic.mec.es/_csanchez/olimpque.htm
[2] Méndez, H. (s.f). Geometría Olímpica. Memorias de las Grandes Semanas Nacionales de la Matemática Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, 161.
[3] Amaya, C., & Yair, W. (2017). Influencia de los problemas reto en la construcción del concepto de área en estudiantes de grado séptimo.
[4] Ramos Palacios, L. A. (2006). Una Estrategia Metodológica para desarrollar olimpiadas matemáticas en el nivel medio del sistema educativo Hondureño (Doctoral dissertation).

despertar en los estudiantes el valor de la honestidad, pues el estudiante es dueño de su propio aprendizaje y la construcción del mismo.

Falk (2001) afirma *"… las Competiciones no solamente prueban de manera directa el conocimiento o las destrezas matemáticos, sino además la habilidad que tiene el estudiante de encarar retos más generales en la vida."*[5]

Una estrategia fundamental para acercar el trabajo de investigación al aula, es llevar directamente al docente utilizar problemas desafiantes, orientados y motivadores que permiten reajustar la práctica docente en el aula y las clases magistrales, evaluando las estrategias de solución, ideas o conjeturas que presentan los estudiantes, siendo esto, un objetivo fundamental para descubrir los talentos e ingenios de los estudiantes en matemáticas.

René Piedra entrevistado por Ramos (2006) expresa que, *"… las Olimpiadas Matemáticas ayuda a promover, de mejor forma, la asignatura que desarrolla capacidades de razonamiento en los estudiantes y permite triunfos en cualquier carrera*"[6].

El Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998) establece que *"El papel que cumplen las áreas y las disciplinas en los currículos de la educación básica y media, varía según las épocas y las culturas. A los educadores especialistas corresponde elaborar y asumir los programas curriculares como transitorios, como hipótesis de trabajo que evolucionan a medida que la práctica señala aspectos que se deben modificar, resignificar, suprimir o incluir"*[7] por tanto el docente debe generar un ambiente desafiante en el aula por medio de la implementación de los problemas de Competiciones Matemáticas, el cual generen

[5] Falk, M. (2001). Olimpiadas de Matemáticas: retos, logros (y frustraciones). Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. VIII, No. 1, p. 15.
[6] Ramos Palacios, L. A. (2006). Una Estrategia Metodológica para desarrollar olimpiadas matemáticas en el nivel medio del sistema educativo Hondureño (Doctoral dissertation).
[7] M.E.N. (1998). Lineamientos curriculares. Recuperado el 15 de enero de 2016 de la URL: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf.

la integración de la educación matemática con el aprendizaje de los estudiantes por medio de la creatividad para fomentar que el estudiante construya su aprendizaje o conocimiento a partir de la resolución de problemas, por ende, cuando el docente comienza a valorar el pensamiento y las ideas del estudiante, este se motiva y aprende.

El propósito de los problemas de las Competiciones Matemáticas al emplearlos en el aula, no es reemplazar el currículo de la educación matemática en Colombia, sino por el contrario, modificarlo de tal forma que se pueda implementar continuamente en las aulas de clase.

A través de la aplicación de métodos empíricos como la observación participante, encuesta, entrevista y la experiencia del investigador, se pudo constatar como insuficiencias las siguientes:

- Es escaso el trabajo con problemas retadores en el aula.
- Es limitado el trabajo con los problemas de competiciones matemáticas en el aula.
- Es limitado el trabajo con los materiales manipulables y problemas del Canguro Matemático.

Las valoraciones anteriores permiten determinar el siguiente **problema de investigación**: ¿cómo utilizar los problemas del Canguro Matemático para mejorar las habilidades de razonamiento geométrico de los estudiantes de grado octavo del colegio Elisa Borrero de Pastrana?

Se precisa como **objeto de estudio**: el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en la Educación Básica.

Se infiere como **objetivo general**: favorecer el proceso de aprendizaje de la geometría elemental, por medio de problemas retadores del Canguro Matemático en el aula, con el fin de mejorar las habilidades de razonamiento matemático en los estudiantes de grado octavo del colegio Elisa Borrero de Pastrana.

Objetivos específicos:

- Identificar las habilidades que tienen los estudiantes de grado octavo en geometría elemental.
- Determinar los problemas del Canguro Matemático que despierten la curiosidad de los estudiantes.
- Estimular a los estudiantes que realicen preguntas a partir de problemas del Canguro Matemático.
- Implementar estrategias de aprendizaje basada en la resolución de problemas del Canguro Matemático en los estudiantes de grado octavo.

Acorde con el objetivo, el **campo de acción:** el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, usando problemas del Canguro Matemático en el grado octavo

Para el cumplimiento del objetivo y la solución del problema, se presenta la siguiente **hipótesis:** un conjunto de actividades sustentadas en problemas retadores del Canguro Matemático y la comunidad práctica de Wenger, favorecen el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en los estudiantes de grado octavo del colegio Elisa Borrero de Pastrana.

En aras de dar cumplimiento al objetivo y lograr resolver el problema planteado, así como para guiar el curso de la tesis fueron propuestas las siguientes **tareas de investigación**:

1. Determinar las investigaciones que se han realizado sobre la implementación los problemas del Canguro Matemático en el aula para el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes, específicamente aquellas que contribuyan en generar habilidades, estrategias y construcción de conocimiento.
2. Investigar los fundamentos teóricos que sustentan el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes, específicamente aquellas que contribuyan en generar habilidades y construcción de conocimiento.

3. Estimular a los estudiantes a realizar preguntas, construir o relacionar una situación similar al problema principal de manera que vayan surgiendo frente a los problemas del Canguro Matemático.
4. Implementar los problemas del Canguro Matemático para mejorar las habilidades de razonamiento matemático a partir de los conceptos previos y propiedades que tienen los estudiantes en situaciones referentes a geometría.
5. Determinar las estrategias de solución que surgen en los estudiantes cuando en el marco de la resolución de problemas se plantean diversos problemas que incluyen contenidos geométricos.

La población está integrada por el docente de matemáticas y estudiantes de grado octavo; en total quince estudiantes, cinco por cada curso**.**

El **aporte práctico** de esta investigación radica en el diseño de actividades para desarrollar el pensamiento geométrico y un sistema de situaciones sustentados en problemas del Canguro Matemático, que permitan favorecer el proceso de aprendizaje de la geometría elemental en los estudiantes de grado octavo.

Metodología de la investigación.

Es una investigación cualitativa en la que se usa la observación científica, la cual permite obtener información sobre las estrategias de solución generadas en los estudiantes, analizando las actividades propuestas.

La tesis consta de introducción, cuatro capítulos, conclusiones, recomendaciones y anexos. En el primer capítulo se realiza un análisis del estado del arte, analizando publicaciones que reportan aportes teóricos o prácticos para la investigación. En el segundo se proponen los fundamentos teóricos que fundamentarán esta investigación, en particular se describen las Competiciones Matemáticas, la comunidad práctica de Wenger y la teoría de resolución de problemas. En el tercer capítulo se elabora la estrategia a aplicar, y en el cuarto capítulo se analizan los resultados de aplicación de dicha estrategia y se realiza una valoración de la implementación parcial de la propuesta en la práctica.

CAPITULO 1. ESTADO DEL ARTE

En este capítulo se hace referencia a las investigaciones realizadas acerca de la importancia que tiene los problemas en geometría elemental y el Canguro Matemático en el aprendizaje de los estudiantes.

1.1. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría

El proceso de enseñanza y aplicación de los problemas del Canguro Matemático en la educación media ha sido objeto de investigación por varios autores, quienes han publicado artículos en diversas revistas a nivel internacional. A continuación, se abordarán algunas de estas investigaciones:

1.1.1. From a Mathematical Situation to a Problem[8]

El autor señala que la enseñanza de las matemáticas sobre la base de la resolución de problemas es un tema periódicamente repetitivo en la ICME (International Congress on Mathematical Education), siendo un congreso que se realiza a nivel mundial, donde los investigadores pueden participar en discusiones sobre argumentaciones y demostraciones, enseñanza y aprendizaje, aplicaciones y modelización, formación de docentes, relación entre teoría y práctica, importancia de la visualización y modelos matemáticos, entre otros temas. Este artículo es una aproximación a la creación de problemas.

Engel, citado por Bellot (2017) afirma, en relación con la creación de los problemas en las Competiciones Matemáticas, que es más difícil crear un problema que resolverlo. Existen pocos métodos para su creación.

[8] Bellot, F. (2017). From a Mathematical Situation to a Problem. Competitions for Young Mathematicians: Perspectives from Five Continents, 38

Los problemas a los que se refiere el artículo, denominados “situación-problema”, están relacionados con la geometría, y pueden ser utilizados con el propósito de que el docente presente declaraciones cerradas sobre el problema a los alumnos, con el fin de ayudarlos a resolver el problema recolectando datos o detalles que permitan que éste pueda afrontar el problema. El autor considera que, mediante la discusión, el alumno puede descubrir alternativas que se convierten en nuevos problemas y que, a la vez, también enriquecen la discusión matemática-didáctica en el aula.

1.1.2. Problemas de olimpiadas matemáticas sobre geometría[9]

González (2014) señala que las Olimpiadas Matemáticas, que se realizan anualmente, consisten en resolver diversos problemas matemáticos de alta dificultad en donde se utilizan los métodos vistos en la secundaria.

Existen varias clases de preparación para los estudiantes que están interesados en concursar en este tipo de olimpiadas. Las clases de preparación son útiles para introducir nuevas técnicas o métodos que permitan al estudiante aplicarlos tanto en el bachillerato como en la universidad. Son una nueva oportunidad para que él pueda manipular conceptos matemáticos.

La autora González, expresa que uno de los propósitos primordiales de las Olimpíadas Matemáticas, es realizar una recapitulación de los aspectos que han sido considerados importantes y se pueden ir desarrollando a lo largo del proceso de la educación matemática; desde grado primero hasta el último en educación básica, especialmente en Geometría. Su objetivo principal es centrarse en los tipos de triángulos y sus propiedades; por tal razón, se requiere implementar la información con problemas que han aparecido en diversas competiciones matemáticas: locales, nacionales e internacionales. Cada

[9] González, E. (2014). Problemas de olimpiadas matemáticas sobre geometría. Máster de matemáticas. Universidad de Granada

problema que señala la autora está completamente desglosado porque da a conocer y explica, el análisis detallado de cada uno de los pasos y su solución.

En los dos primeros capítulos, la autora señala la parte teórica que debe tener como base el estudiante; especifica cada una de las propiedades y enfatiza en la demostración de algunas. Los teoremas son fundamentales puesto que ellos son esenciales y básicos a la hora de poder implementar un problema del concurso matemático que favorezca una estrategia para su solución.

En los siguientes capítulos de Olimpiadas, se observa que el nivel de dificultad de cada problema requiere de una base fuerte para poder generar una solución concreta. La mayoría de ejercicios piden la demostración. Para ello, es necesario tener claros los procesos de demostración que se emplean especialmente en geometría; saber los axiomas, aplicar criterios, conocer propiedades de algún otro tipo de contenido o método que ayude al competidor.

1.1.3. Techniques for Solving Problems of Plane Geometry[10]

Este artículo está dedicado a los problemas de geometría que se presentan generalmente en las Competiciones Matemáticas. Se realiza una serie de demostraciones por medio de las aplicaciones de unos teoremas y técnicas de la geometría plana. Por lo general, los conceptos geométricos que están involucrados son: puntos colineales, puntos concíclicos, puntos medios, bisectriz, centroides, ortocentro, circuncentro, y desigualdades.

A pesar de que la mayoría de los estudiantes presenta dificultades para enfrentar este tipo de problemas en las competiciones, el autor propone aconsejar a los estudiantes a indicar cada coordenada de los

[10] Shum, K. P. (2017). Techniques for Solving Problems of Plane Geometry. Competitions for Young Mathematicians: Perspectives from Five Continents, 55.

puntos en un diagrama y posteriormente incentivarlos a hacer uso de la geometría analítica para abordar el problema.

1.2. Investigaciones sobre los problemas de Canguro Matemático como herramienta de diagnóstico

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, se evidencia la manera como varios autores trabajan en diferentes entornos. Por tal razón se abordan los siguientes autores en investigación de competiciones matemáticas como herramienta de diagnóstico:

1.2.1. Análisis del comportamiento de alumnos expertos resolutores de problemas en el contexto del concurso matemático Pruebas Canguro[11]

Guinjoan, Fortuny y Gutiérrez (2015) presentan los resultados de una investigación sobre el análisis de las estrategias que emplean los estudiantes expertos frente a problemas de selección múltiple del Canguro Matemático, en un tiempo limitado. Para el efecto, se elaboraron dos bloques de preguntas: uno, fundamentado por condiciones del concurso y el otro sin ningún tipo de condición. Se establecieron criterios para determinar el grado de certeza de los estudiantes en cada respuesta.

En las pruebas con respuesta de selección múltiple, el estudiante debe señalar la respuesta sin justificación, pero para llegar a ella dispone de una hoja para hacer cálculos, dibujos, trazos, entre otros. Los conocimientos matemáticos involucrados en cada uno de los problemas, están de acuerdo con la edad del estudiante a quien va dirigida la prueba, teniendo presente que en todos los países no se maneja el mismo currículo. No se pretende evaluar el conocimiento del currículo, sino evaluar la capacidad de razonamiento y la habilidad para resolver problemas por parte de los concursantes.

---

[11] Guinjoan, M. Fortuny, J. Gutiérrez, A. (2015). Análisis del comportamiento de alumnos expertos resolutores de problemas en el contexto del concurso matemático Pruebas Cangur. Enseñanza de las ciencias

La investigación cuenta con un marco teórico fundamentado en la estrategia de resolución y heurística, que contempla los hechos que les permite establecer un plan de acción para lograr un objetivo, la intuición, la forma cognitiva que se presenta como evidente a sí misma y, por último, la visualización como habilidad para percibir imágenes mentales que les permita tomar decisiones y utilizar estrategias útiles para el desarrollo del problema.

Los investigadores, al categorizar cada una de las respuestas o conjeturas empleadas por los estudiantes en cada problema, establecieron diversos indicadores significativos para la recolección de datos. Estos fueron agrupados de acuerdo con: tipos de resultados dados; uso de aproximaciones en cálculos; prueba de casos particulares; complejidad de las soluciones dadas y usos de las opciones de respuesta.

Los estudiantes pueden ser buenos para resolver problemas con recursos apropiados y los aplican para diseñar una estrategia que les favorezca la elaboración de una conjetura para la solución del problema, pero no usan estrategias basadas en opciones de respuestas dadas por el problema. Sin embargo, con entrenamiento, los estudiantes pueden ser capaces de intuir y avanzar en resultados que eviten tener que resolver el problema por detalles. Este articulo aporta al presente proyecto de investigación, los puntos o ítems que se deben categorizar para poder identificar las estrategias que emplean los estudiantes de acuerdo con sus conocimientos básicos en geometría.

1.2.2. Los problemas de los concursos de matemáticas como recurso didáctico[12]

Oliu (2015) menciona en su artículo que los problemas matemáticos; especialmente el Canguro Matemático y Olimpiada de 2° de la ESO, forman un recurso didáctico muy valioso que se debe aprovechar, ya sea en el aula u otro espacio donde lo pueda implementar el docente

[12] Oliu, M. (2015). Los problemas de los concursos de matemáticas como recurso didáctico. Ponencia

El autor realiza una breve introducción a partir de la pregunta ¿para qué sirve resolver problemas? La respuesta, sirve para:

- Entender que puede haber más de una solución.
- Afirmar que la creatividad juega un importante papel en las matemáticas.
- Que resolver problemas matemáticos sirve para hacernos mejores también para resolver otras cosas.
- Entender el mundo.
- Cambiar la vida.

El autor señala que son importantes la teoría y la reflexión, pero los docentes que están más cercanos al aula, deben ser más ingeniosos, didácticos y prácticos para disponer de buen material para trabajar dichosamente con los estudiantes en el tipo de problemas que proponen las Competiciones Matemáticas.

Las propuestas que señala el autor, para llevar los problemas del Canguro Matemático al aula son:

- Trabajo individual: este trabajo tiene que ser común, es decir; plantear diez ejercicios en el aula y estipular un tiempo favorable para que cada estudiante pueda generar sus soluciones. El resto de la sesión de clase se debe dedicar a discutir las estrategias de solución.
- Concurso por equipo: trabajar en pequeños grupos de tres a cinco estudiantes, en forma de concurso. Para pequeños grupos de trabajo, la forma de concurso es muy motivadora. Esta estrategia debe ser diferente de la propuesta generada en el trabajo individual, ya que se trabaja en una forma de concurso, donde el docente puede plantear el tipo de concurso que quiere realizar y estipular sus propias reglas.

Realizar actividades previas es otra estrategia que genera el autor para llevar este tipo de problemas al aula. Las clases magistrales que se realizan comúnmente llevan al estudiante a seguir el mismo procedimiento que realizó el docente en la clase de matemáticas o a solo trabajar con algoritmos sin dejar que el estudiante genere alguna estrategia como solución a los problemas planteados por el docente.

1.2.3. Material Didáctico Problemario: Resolución de Problemas Matemáticos[13]

Olsen (2016) menciona que hay un tipo de problemario, colección de problemas matemáticos que apoyan la argumentación y el desarrollo de habilidades de pensamiento. Estos problemas ayudan a fomentar en los estudiantes el razonamiento; son una herramienta fundamental para el desarrollo de los problemas en matemáticas y en otros entornos y asignaturas. Afirma que los problemas presentados pueden ser resueltos con conocimientos matemáticos que poseen los estudiantes en bachillerato, para así llevarlos al límite y lograr que construyan nuevo conocimiento, confrontando, investigando, preguntando e interactuando con el grupo y el docente. Este es uno de los objetivos principales de los problemas que propone el autor y justifica cada uno de ellos para buscar que el estudiante pueda desarrollar el pensamiento lógico o un razonamiento con este tipo de problemas.

Los problemas que se generan en matemáticas, ayudan a fortalecer el pensamiento lógico matemático como una integración de sus conocimientos en este campo. El estudiante pueda lograr esto, como lo menciona el autor, por medio de discusiones en pequeños grupos de trabajo, en los que ellos puedan argumentar y justificar cada hipótesis de solución o conjetura que generó en cada problema. Después de haber presentado el proceso de solución al docente y a sus compañeros de trabajo, el estudiante debe saber resumir; desde el planteamiento hasta la solución, y extraer los puntos más importantes. Por tanto, los problemas que están propuestos en el artículo, son retadores para los estudiantes, es decir; nada sencillos ni tampoco imposibles de resolver.

[13] Olsen, M. (2016). Material Didáctico Problemario: Resolución de Problemas Matemáticos. Departamento de matemáticas aplicadas y sistemas.

La metodología del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) sugiere para que el estudiante tenga un papel más activo en el desarrollo de sus habilidades de pensamiento en el área de matemáticas, y el docente asuma el papel de guía durante el proceso de aprendizaje, en vez de solo transmitir formulas y algoritmos para solucionar preguntas o algún tipo de ecuación. Con este tipo de cambio de roles entre el docente y el estudiante, el estudiante se ve obligado a razonar junto con sus compañeros de equipo, para hallar la solución de los problemas que fueron propuestos por el docente. El docente al entrar en este rol de guía, solo puede dar pistas a los estudiantes para que ellos mismos resuelvan los problemas. El docente no debe resolverlos, durante el tiempo en que el equipo de trabajo se encarga de justificar, argumentar e intercambiar ideas de solución para cada problema.

El autor dice que, al usar el ABP, el docente debe tener en cuenta los siguientes pasos:

- Entregar los problemas (dos o tres) al estudiante.
- Formar pequeños grupos de trabajo (máximo cuatro estudiantes) para que intercambien ideas y reúnan información sobre cada uno de los datos de un problema.
- Observar para reforzar lo que realizan los estudiantes. Si se evidencia que un equipo no está realizando ningún procedimiento, debe intervenir con preguntas para ayudarlos.
- Recibir el resultado de cada problema, con la justificación de su proceso.

Los problemas que se emplean para esta metodología deben ser de tipo retador que generen interés en los estudiantes, aunque tengan una apariencia difícil de resolver. Para poder fortalecer el proceso de aprendizaje de los estudiantes, se deben trabajar en pequeños grupos para facilitar la interacción. El docente debe elegir preguntas que ayuden a experimentar procesos y estrategias de solución en el estudiante. El autor menciona que con ayuda del ABP los estudiantes podrán desarrollar habilidades de resolución de problemas y habilidades de colaboración, que no siempre se fomentan en un curso tradicional enfocado en contenidos. El cambio de rol del profesor es fundamental para una experiencia educativa exitosa con el ABP.

El docente, debe comprender que al tomar esa postura no debe quitarle la oportunidad de aprender al estudiante, resolviendo su problema. El rol que asume es de orientador, que invita a razonar.

1.2.4. Segundo Seminario Nacional sobre Resolución de Problemas y el Aprendizaje de las Matemáticas[14]

Ávila, Barragán, Barrera, Reyes, y Sepúlveda (2008) informan en su artículo de reportes de investigación que, en dicho seminario, en tres conferencias, tuvieron como eje central la resolución de problemas y el aprendizaje de las matemáticas en el nivel medio.

Lluis (2008), desde el punto de vista de un matemático, afirma que, en la resolución de problemas, (según el enfoque en una conferencia) existen diferentes tipos de problemas en matemáticas. Para el autor la matemática posee una enorme aplicabilidad, y constituye un lenguaje y marco indispensable para todas las ciencias. Esta es una de las razones para que muchas personas partan, en materia de estudio, del sistema educativo y de una escena social. El autor señala que la investigación matemática es una disciplina científica que se percibe como muy alejada de las personas; que la matemática la hacen ver desde la primaria como una materia difícil de comprender para los estudiantes. Los alumnos sienten miedo a la hora de preguntar cuando no entienden una temática. Por tal razón, a los estudiantes es difícil considerar que las matemáticas son una disciplina intelectual, abstracta, independiente y floreciente que se debe trabajar desde la lógica, todo el tiempo.

[14] Ávila, O. Barragán, R. Barrera, F. Reyes, A. & Sepúlveda, A (2008) Segundo Seminario Nacional sobre Resolución de Problemas y el Aprendizaje de las Matemáticas. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

El autor se enfoca para la resolución de problemas, en el proceso de aprendizaje, sobre una teoría matemática que se presenta como K-Teoría algebraica y el tipo de problemas que lo causaron. Se habla acerca del aprendizaje de las matemáticas y su realización en esta teoría, proponiendo problemas de este tipo y dando su solución en diferentes espacios.

Las oportunidades que se presentan para propiciar que planteen sus propios problemas matemáticas son:

- Trato con personas relevantes en esta materia.
- Formarse como Investigadores en matemáticas.
- Aprender nuevos contenidos en matemáticas.
- Promover discusiones con personas versadas en matemáticas.
- Realizar trabajos independientes en los que se evidencie como los alumnos han podido desarrollar conocimientos, habilidades y actitudes matemáticas por su orientación profesional.

Flores (2008), dice que las personas están en la capacidad de plantear nuevos problemas al cambiar las condiciones del problema principal. El autor se fundamenta en Brown y Walter quienes proponen varias fases para poder plantear un problema a partir de un problema dado, y desarrolla algunos ejemplos en álgebra y geometría que ayudan al lector a comprender las fases que proponen los autores.

1.2.5. Estrategias generales en la resolución de problemas de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas[15]

Valle, Juárez & Guzmán (2007) informan en un artículo, las estrategias generales que se identifican en la resolución de problemas que se plantean en las Olimpiadas Matemáticas, a partir del análisis de los

[15] Valle, M. Juárez, M. & Guzmán, M. (2007). Estrategias generales en la resolución de problemas de la olimpiada mexicana de matemáticas. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 9 (2).

resultados y de los fundamentos que dieron por escrito 91 estudiantes que se presentaron a las olimpiadas. En la recolección total de datos los autores tuvieron en cuenta cuatro ítems para evaluar:

- La identificación de la incógnita.
- Los datos propuestos por el estudiante.
- Las condiciones de los problemas.
- La propuesta de una estrategia de solución.

Las variables más importantes para esta evaluación, son: “el saber hacer”, “cómo hacer”, “autoevaluarse” y “cuáles son sus componentes individuales”.

Por tanto, la única manera de aprender a resolver problemas es resolviendo problemas, de dos formas; una: por medio de un proceso empírico o dos: con un acompañante, sí y sólo si la persona que está resolviendo problemas tiene alguna inquietud o duda, la característica del acompañante es ser una persona capacitada en tener habilidades para la resolución de problemas.

El método empleado por los investigadores fue dirigido a 91 estudiantes que se presentaron ese día, en un tiempo de 4 horas y 30 minutos para resolver la prueba con las siguientes condiciones:

- Deberás escribir cada problema que resuelvas en una hoja diferente.
- Cada hoja que uses deberá tener tu nombre completo y el del colegio donde estudias.
- En caso de cualquier duda referente al enunciado de alguno de estos problemas, deberás preguntarla por escrito.
- Sólo tienes la primera hora para escribir tus preguntas.

La recolección de los datos se realizó al final del examen. El análisis tuvo en cuenta: si cada concursante identifico la incógnita, los datos, la situación del problema y propuso una estrategia de solución, como resultado final se evidenciaron muchas problemáticas de comprensión lectora e indicadores alcanzados por los estudiantes.

1.3. Investigaciones sobre las estrategias de entrenamiento para competiciones matemáticas en el aula de clases.

En el proceso de enseñanza aprendizaje varios autores de diversas universidades trabajan en la aplicación y desarrollo de las Competiciones Matemáticas en el aula. La mayoría de los autores consideran que sería desafortunado no llevar este tipo de problemas al aula. A continuación, se señalan las investigaciones que aportan al presente trabajo de investigación:

1.3.1. The Rainbow of Mathematics—Teaching the Complete Spectrum and the Role Mathematics Competitions Can Play[16]

El propósito de este artículo consiste en la presentación de un modelo en el que se integran diversos aspectos de la matemática, desde lo recreativo hasta las matemáticas escolares en él que se desarrollan y aplican las matemáticas fundamentales que se enseñan en el aula. El documento empieza señalando los aportes y las experiencias de personas involucradas en la didáctica de la matemática y expertos en el diseño del currículo de Austria, que resaltan el aspecto central importante de la enseñanza de las matemáticas.

Lo fundamental para esto es que el docente genere una auto-critica referente a las planeaciones de clase que realiza en matemáticas, identificando esa matemática elemental que le favorece en el aprendizaje del estudiante pero que se puede ampliar y profundizar en una matemática elemental avanzada. Algunas personas que están capacitadas en las competiciones en matemáticas afirman que estos problemas son retadores al involucrar el álgebra, la geometría Euclidiana, la combinatoria, la teoría de números entre

[16] Soifer, A. (Ed.). (2017). Competitions for Young Mathematicians: Perspectives from Five Continents. Springer.

otras, que son las ramas más importantes de la matemática para que el alumno aprenda y construya su conocimiento. Geretschläger (2017) afirma que las habilidades lógicas adquiridas en estos temas elementales se consideran las más vitales para el desarrollo académico del estudiante.

El punto de vista que brinda el universo de las Competiciones Matemáticas tiene mucho que ofrecer. Para algunos autores y matemáticos, la puerta para entrar al mundo de las matemáticas no es el interés hacías ellas, sino la aplicación y la idea de descubrir las matemáticas que fueran útiles para resolver problemas.

En el artículo se muestran tres secciones que están ubicados en un cuadro y llevan los siguientes ítems: 1) las matemáticas recreativas, 2) escuela matemática y 3) aplicación de la matemática. Sobre estos enunciados se observa la palabra historia y debajo, las didácticas junto con dos herramientas. La idea que propone es poder recrear estos ítems en un arcoíris continuo: cada ítem con su propósito.

- Las matemáticas recreativas: (ítem ubicado en la izquierda del arcoíris) ilustra los aspectos principales de las matemáticas que generan una motivación e incentivan al estudiante mediante la diversión por medio de juegos matemáticos. Pero es necesario crear un ambiente de aprendizaje emocionalmente positivo.
- La escuela matemática: (eje central del diagrama) integrar en la escuela los dos ejes del extremo.
- Aplicación de la matemática: (ítem ubicado a la derecha del arcoíris). Se refiere a los temas que comúnmente se abordan en la educación matemática en aplicaciones en la vida cotidiana.
- Historia: Muestra el hecho de que todas las matemáticas tienen un pasado, una historia, que debe estar presente en la enseñanza de las matemáticas en el aula. Se sabe que algunos conceptos matemáticos surgieron desde otra rama como la física, el cálculo diferencial, la probabilidad, entre otros. Al emplear la historia de las matemáticas en el aula se promueve la comprensión y que el aprendizaje sea más fácil y significativo para el estudiante.
- Didáctica: señala la estructura académica de la matemática y “cómo enseñarla”.

Geretschläger (2017) señala que se debe usar las Competiciones Matemáticas como una herramienta para generalizar las matemáticas y preparar a los estudiantes para muchos aspectos importantes en su quehacer diario.

Esto constituye un plan de estudios más retador para el docente y para el estudiante que ayuda a crear un ambiente motivador en el aprendizaje de las matemáticas.

El autor comenta que los procedimientos lógicos en actividades lúdicas despiertan aún más el interés del estudiante, puesto que el propósito es la aplicación gradual del pensamiento lógico, a veces, combinando con el método de ensayo y error, que ayuda al estudiante a acercarse más a la solución. Lo más importante es que produzca una profunda sensación de satisfacción al haber encontrado la solución mediante la aplicación de sus propios conocimientos. Esta es otra forma de comprender las matemáticas con métodos simples que favorecen el aprendizaje de sistemas más complejos.

En conclusión: el aporte que realiza este artículo al presente trabajo de investigación, es la introducción e inclusión de la matemática con todos los aspectos de los temas esenciales de manera que puedan ser interesantes al estudiante. Algunos mostraran entusiasmo por problemas de matemáticas, independientes de cualquier aplicación del mundo real. El modelo arcoíris favorece la aplicación de las Competiciones Matemáticas en el aula como una herramienta didáctica que fomenta en los estudiantes la motivación e integración del aprendizaje con ña solución de problemas retadores, a la vez que permite considerar que todas las matemáticas se aprenden a través dela resolución de problemas.

1.3.2. Competition Aims to Develop Flexibility in the Classroom[17]

En este trabajo se describe un método para la implementación de tareas de soluciones múltiples en el aula de tal manera que motive a los estudiantes a resolver problemas de diferentes maneras. El método

[17] Semanišinová, I., Harminc, M., & Jesenská, M. (2017). Competition Aims to Develop Flexibility in the Classroom. Competitions for Young Mathematicians: Perspectives from Five Continents, 174.

se refiere a realizar una competencia en resolución de problemas con pequeños grupos de estudiantes, en donde cada grupo tiene que encontrar y dar su opinión sobre la solución, para así poder identificar las estrategias que siguieron.

Semanišinová, Harminc, & Jesenská (2017) indican que, al incluir las competiciones matemáticas en el aula, se favorece la creación de conexiones entre conceptos matemáticos y la estimulación de conceptos para los estudiantes, mientras que para el docente abre la posibilidad de analizar en los estudiantes la calidad de conocimientos previos, su nivel de comprensión de los conceptos matemáticos y las relaciones entre ellos.

Los autores señalan que éste tipo de experiencia les mostró que el método ayuda y favorece a los docentes a motivar e incentivar a sus estudiantes a buscar nuevas soluciones no estándares a los problemas. Los estudiantes suelen estar motivados al querer comprender la estrategia de solución "ganadora". Durante el proceso de sistematización de conocimiento referente a una temática, el método ayuda a los estudiantes a organizar e integrar conceptos matemáticos, teoremas o estrategias de solución que sean adecuados al tema. Estimulando una compresión de conceptos y propiedades y ampliación del tema.

Por tanto, los errores que presentan los estudiantes mientras buscan una nueva estrategia, pueden mostrar al docente que proporcionar una "herramienta segura" para resolver problemas, no lleva al alumno a la comprensión conceptual o a la estrategia de solución. El trabajo en equipo brinda la oportunidad de entrar en diálogo y discutir cada una de las estrategias que surgen por parte de los estudiantes para así intercambiar ideas y desarrollar la capacidad de comunicar y razonar. Está forma de trabajo garantiza el trabajo cooperativo y alternativo.

1.3.3. Discovering, Development, and Manifestation of Mathematical Talent[18]

Tsvetkova (2017), analiza la experiencia búlgara en competiciones en matemáticas para el descubrimiento, el desarrollo y el progreso de los estudiantes talentosos. El momento indicado para estimular la curiosidad y despertar el interés en las matemáticas, es cuando el alumno está en la educación básica. Se debe implementar en los grados quinto a séptimo, que es el tiempo en que el talento matemático, es descubierto y se desarrolla en gran medida.

Los niños del siglo XXI están enfocados al mundo virtual; el cual llama y capta su atención rápidamente. Aquí, es un poco complicado tratar de atraerlos al mundo de las matemáticas, aun si observamos que los niños están en una etapa de competir y ganar. Sin embargo, esto favorece a motivarlos para así poder prepararlos para el mundo de las matemáticas y hacerles sentir el placer de resolver problemas.

El autor menciona que las escuelas situadas en Bulgaria son de alto nivel profesional en Competiciones Matemáticas. Algunas de estas escuelas realizan actividades extracurriculares para niños de grado segundo a cuarto de primaria, mientras otras escuelas lo realizan hasta grado quinto. Para poder estudiar en estas escuelas es necesario presentar una prueba de ingreso con el fin de seleccionar a los candidatos más dotados y talentosos, Tsvetkova, (2017) señala que para ser capacitados en la escuela *Sofia Mathematical*, los alumnos deben mostrar interés en las matemáticas con el fin de dirigirlos a un entrenamiento más especializado, lo cual debe ser necesario, ya que cada estudiante talentoso debe ser apoyado y estimulado.

Para este autor es de vital importancia identificar a los niños talentosos en matemáticas desde temprana edad con el fin de despertar el interés y estimular la curiosidad en Competiciones Matemáticas. Para ello, los docentes altamente calificados, capacitan a estos alumnos para resolver problemas de Competiciones

[18] Tsvetkova, I. (2017). Descubrimiento, Desarrollo y Manifestación de Talentos Matemáticos. En Competiciones para Jóvenes Matemáticos (pp. 187-201). Springer International Publishing.

que ayudan en su desarrollo del pensamiento lógico matemático. El docente debe emplear herramientas didácticas como: fotos, gráficas, diagramas, entre otros, para activar las habilidades intelectuales del alumno.

Conclusiones del capítulo 1

Existen relativamente pocos estudios específicos sobre la implementación de los problemas del Canguro Matemático en el aula, como un recurso de enseñanza aprendizaje especialmente en la geometría. Esencialmente los artículos encontrados se refieren a la importancia de implementar problemas retadores en el aula, pero no refieren un análisis de resultados.

Tsvetkova (2017), Semanišinová, Harminc, & Jesenská (2017), Geretschläger (2017), Olsen (2016) y Olio (2015) son algunos autores que se destacan realizando experiencias con los estudiantes en la aplicación de problemas de concursos o competiciones matemáticas en el aula.

CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se hace referencia a la fundamentación teórica de la presente tesis. La sustentan la resolución de problemas, las Competiciones Matemáticas y la Teoría de la Comunidad de Práctica de Wenger.

2.1. Fundamentos de la teoría de resolución de problemas. Problemas retadores.

La resolución de problemas se considera una actividad fundamental de la ciencia, porque se vincula con el aprendizaje por descubrimiento; siendo un modo más significativo para los estudiantes, que les permite encontrar sus propias soluciones a los problemas. Se dice que los niños pueden aprender matemáticas haciéndolas. Las pueden recordar en el trascurso de su educación básica y media

El Ministerio de Educación Nacional (MEN 1998) contempla dentro de sus lineamientos curriculares en matemáticas, la actividad de resolver problemas la cual ha sido considerada como un elemento importante en el desarrollo de las matemáticas y en el estudio del conocimiento matemático.

Esto es de gran importancia para el presente trabajo, porque lleva a saber el rol que desempeña el estudiante en el contexto de las matemáticas escolares y en la solución de los problemas de competiciones matemáticas.

El estudio sobre la resolución de problemas no es un tema nuevo. Se puede referenciar desde varios investigadores que han trabajado en este tema, generalmente de problemas en matemáticas. Anteriormente la resolución de problemas no estaba implementada en los estándares curriculares, solo en la enseñanza de carreras universitarias y así se identificaban las falencias de los estudiantes. Al observar esto, se llegó a la conclusión de que era necesario implementar problemas en el aula, para que los estudiantes pudieran observar la importancia que tiene; al hacer matemáticas en situaciones cotidianas y la resolución de problemas.

El concepto de “problema” y su definición es bastante complejo. En diferentes enfoques didácticos o prácticos, los docentes lo consideran y presentan como un ejercicio planteado para que el estudiante pueda resolverlo de acuerdo con sus conocimientos previos. Otros investigadores plantean una definición de acuerdo con un enfoque necesario, que permite verlo como una estrategia de aprendizaje en matemáticas y para su desarrollo en competiciones.

La definición de problema, para este trabajo, está enfocada a situaciones que permiten reflexionar, indagar y tener dificultades de tal manera que la solución no sea inmediata ni sea suficiente emplear sólo un algoritmo o fórmula. Tendrá que dar lugar a aplicar una estrategia de solución o formular una conjetura.

A continuación, se presenta la definición del concepto de problema en un ámbito escolar, como se plantea por diversos matemáticos profesionales, especialistas en educación matemática y didáctica de la matemática.

Woods, Crowe, Hoffman y Wright citado por Aldana y Hernández afirman: *“Se ha definido problema como «una situación estimulante para la cual el individuo no tiene respuesta, es decir, el problema surge cuando el individuo no puede responder inmediata y eficazmente a la situación”.*[19]

Nieto (2009) argumenta *“Un problema es un obstáculo arrojado ante la inteligencia para ser superado, una dificultad que exige ser resuelta, una cuestión que reclama ser aclarada”.*[20]

Santos (2008) considera *“un problema abierto es un problema que es formulado de tal manera que tenga múltiples soluciones correctas”.*[21]

[19] Alda, F. L., & Hernández, M. D. (1998). Resolución de problemas. Cuadernos de Pedagogía, 31, 28-32.
[20] Nieto Said, H. (2009). Resolución de problemas matemáticos. Colección Digital Eudoxus, 1(3).
[21] Santos, L. M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica.

Chacel (s.f.) expresa: *"Para resolver un ejercicio, uno aplica un procedimiento rutinario que lo lleva a la respuesta. Para resolver un problema, uno hace una pausa, reflexiona y hasta puede ser que ejecute pasos originales que no había ensayado antes para dar la respuesta"*[22].

Un sujeto que tiene intenciones de solucionar un problema, encuentra diversas razones para motivarse. Algunas de ellas, pueden ser:

- Cumplir con el objetivo del problema.
- Generar, en las personas, situaciones que contengan: desafíos, motivación y ansiedad para resolver el problema.
- Sentir satisfacción en hallar la respuesta correcta referente al problema propuesto.

Polya (1973) en su modelo, establece cuatro fases para el trabajo de aprender a resolver problemas en el aula: 1) *"… comprender el problema, 2) diseñar un plan, 3) llevar a cabo el plan, 4) mirar hacia atrás"*[23]. Este proceso ayuda al estudiante a adquirir mayor experiencia en la resolución de problemas. El rol que desempeña el docente en el aula, en este caso, es ser un guía en todo momento.

- Comprender el problema: significa entender lo que el problema requiere resolver. La persona debe sentir gran motivación para esforzarse en la búsqueda de cómo resolverlo, puesto que se dará cuenta de que no es sencillo abordarlo.
- Diseñar un plan: consiste en identificar la idea fundamental para poder hacer una conjetura referente al problema. Las ideas pueden surgir en los estudiantes cuando están enfrentando el problema. El docente debe orientar al estudiante para que él pueda identificar cuál vía favorece la solución del problema planteado.

---

[22] Chacel. R. (s.f.) George Polya: estrategias para la solución de problemas
[23] Polya, G. (1973). How To Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. Stanford University, Second Edition, Princeton University Press. Princeton, New Jersey, p. 5-16.

- Llevar a cabo el plan: Si el plan está bien formulado, su realización será factible.
- Mirar hacia atrás: consiste en verificar si la respuesta satisface lo establecido en el problema.

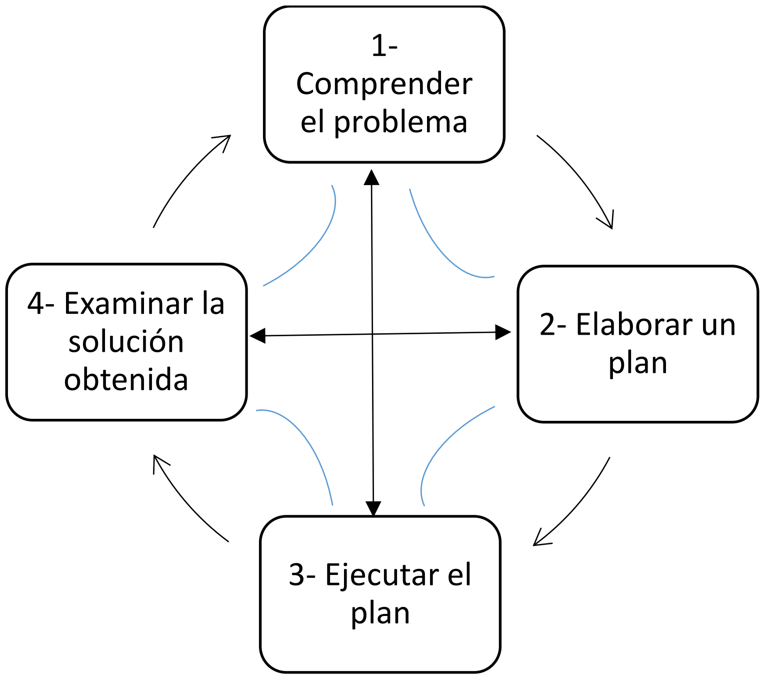


Figura1. Fases de la resolución de problemas según Polya (1973)

En este punto del proceso de enseñanza, el constructivismo permite la resolución de problemas con el trabajo en equipo. En esta forma de trabajo se presentan discusiones que, por interacción social, permite llegar a descubrir y/o resolver problemas en grupo.

De Guzmán (SF), señala cuatro criterios de resolución de problemas:

1. Familiarizarse con el problema: Se trata de entender la situación, mediante la identificación de los elementos que intervienen: datos, relaciones e incógnitas.
2. Buscar estrategias: Seleccionar una de las que permita resolver el problema.
3. Llevar adelante la estrategia: Aplicar la estrategia en el problema.
4. Revisar el proceso: examinar si es satisfactoria la respuesta de solución.

Schoenfeld (1985), señala que el proceso de la resolución de problemas es igual de importante como la heurística, puesto que es el control del proceso, a través de las decisiones inmediatas, es decir; qué hacer en un problema.

Para abordar el proceso de resolución de problemas Schoenfeld indica cuatro pasos:

1. Dibujar un diagrama o representación del problema.
2. Diseñar y planificar una solución.
3. Explorar soluciones. (Aplicarlas)
4. Verificar la solución.

Los problemas deben crear en el aula un ambiente motivador y curioso para que los estudiantes puedan: debatir a partir de las conjeturas que surjan en los problemas. Sus razones se deben ser tenidas en cuenta para el diseño de las actividades de la tesis.

2.3. Uso de los problemas de competiciones matemáticas.

2.3.1. Olimpiadas Matemáticas.

Las primeras olimpiadas matemáticas se realizaron a mediados del año 1934, con el objetivo principal de enseñar matemáticas de manera diferente a la tradicional, que promueve a que el estudiante aprenda a resolver ejercicios mecánicamente, dejando de lado la opción de que piense, analice y elabore hipótesis de solución o conjeturas en forma individual o en pequeños grupos de trabajo.

A diferencia de las preguntas que se hacen frecuentemente en el aula, los problemas de las olimpiadas o competiciones matemáticas, no requieren del conocimiento de muchos contenidos, pero si deben representar un desafío para los estudiantes. Los problemas seleccionados para esto, deben generar habilidades y destrezas en los estudiantes, en la búsqueda de una solución. Esto les permite redescubrir conceptos básicos.

La doctora Falk declaró "*No se trata de acelerar a un estudiante a las matemáticas avanzadas, sino de tomar tiempo para ampliar y profundizar la matemática elemental"*[24]

Las olimpiadas matemáticas son un tipo de competiciones en donde concursan jóvenes estudiantes. Su objetivo principal es estimular el estudio de las matemáticas y el desarrollo de habilidades, llevando a cada estudiante a lograr su óptimo nivel personal en matemáticas, en especial, a jóvenes talentosos que se puedan observar en este tipo de concurso.

Los objetivos específicos de las olimpiadas matemáticas son:

- Estimular la creatividad, la capacidad de decisión, el pensamiento y la habilidad para enfrentarse a nuevas situaciones y resolver problemas.
- Propiciar la participación de profesores y alumnos en actividades matemáticas.
- Dar apoyo a la renovación y la innovación en la práctica docente especialmente en la forma de orientar a sus estudiantes para que aprendan matemáticas.

Mio (SF), afirma que *"las olimpiadas son un elemento de importancia en la mejora de nuestro sistema educativo por cuanto supone, para los muchos profesores que de modo completamente altruista vienen preparando a los alumnos, la necesidad de actualización permanente de conocimientos, de una búsqueda de problemas nuevos y de métodos de adaptación a los planes vigentes de nuevos y más atractivos contenidos."*[25]

Por otro lado la doctora Flak comentó *"es un proceso de ampliación y profundización básica elemental".*[26]

---

[24] Falk, M. (2017), comunicación personal, 4 de mayo del 2017.
[25] Mio, J. (2007). Historia de las olimpiadas matemáticas. Artículo organización internacional Le Kangourou sans frontières.
[26] Falk, M. (2017), comunicación personal, 4 de Mayo del 2017.

Lo anterior conforma una parte de la filosofía de las olimpiadas matemáticas y un llamado a los docentes a generar estrategias para los métodos de enseñanza en los contenidos matemáticos, de manera que los problemas y su resolución, se conviertan en temáticas llamativas y atractivas para los estudiantes.

Hay varias clases de Competiciones u Olimpiadas Matemáticas, en particular, muchos países tienen Olimpiadas Nacionales y hay varias Olimpiadas Regionales. A continuación, se nombran algunas de ellas:

- Olimpiada Iberoamericana.
- Olimpiada Matemática Española.
- British Mathematical Olympiad (Olimpiada Matemática Británica).
- Canadian Mathematical Olympiad (Olimpiada Matemática Canadiense).
- Poland Mathematical Olympiad (Olimpiada Matemática Polaca).
- The U.S.A Mathematical Olympiad.
- Competición Matemática: Canguro Matemático

2.3.2. Canguro Matemático

En este trabajo, las competiciones matemáticas cuyos problemas se exploran con estudiantes es el Canguro Matemático.

El Canguro Matemático se modela tras la Olimpiada Australiana que tuvo su origen en Australia (1980), pero ya existía un evento similar en USA en el año 1950 organizado por la Mathematical Association of America (MAA). La diferencia en Australia fueron los problemas, un poco más atractivos. Peter O'Halloran, profesor de matemáticas en Sydney, instituyó un nuevo tipo de evento en las escuelas australianas: un cuestionario de problemas matemáticos geniales de opción múltiple, corregido por computadora, lo que significaba que miles de alumnos podían participar al mismo tiempo. Fue un éxito inmenso para el Concurso Nacional Matemático Australiano. En 1991, dos profesores franceses, André Deledicq y Jean

Pierre Boudine, decidieron iniciar el concurso en Francia bajo el nombre de *"Kangourou des mathématiques"* para rendir homenaje a sus amigos australianos. Desde entonces, la competición se ha abierto a los alumnos de diferentes cursos y a los estudiantes de último año. En 1994 se crea la asociación *"Kangourou sans Frontiéres"* (Canguro sin fronteras) con representantes de diez países. Esta asociación establece un concurso común para todos los países, es decir: el mismo tipo de concurso (cuestionario de selección múltiple con única respuesta), los mismos problemas, el mismo día el mismo horario y un premio para todos por su participación.

El doctor Sánchez afirmó *"las Olimpiadas Matemáticas ayudan a descubrir estudiantes talentosos y tratar de motivarlos a las Olimpiadas es algo inusual y no casual".*[27]

Romero (2009) afirma que con *"…el Canguro se pretende popularizar las matemáticas y que participe la mayor cantidad posible de alumnos. Incluso se invita a los alumnos con peores resultados en matemáticas a participar en esta prueba, con la intención de que dediquen un rato a tratar de resolver los problemas de la prueba y que encuentren el gusto por las matemáticas."*[28]

En esta prueba, los profesores tienen la oportunidad de ofrecer una olimpiada internacional en su salón de clase. La ventaja del evento en cada colegio es que están compitiendo lúdicamente entre si los estudiantes del colegio, y no hay comparación entre colegios.

La prueba cuenta con los niveles de: ***Pre-ecolier*** *(7-8 años),* ***Ecolier*** *(9-10 años),* ***Benjamín*** *(11-12 años),* ***Cadet*** *(13-14 años),* ***Junior*** *(15-16 años) y* ***Student*** *(17-18 años).* Cada examen consta de problemas de selección múltiple: los diez primeros tienen asignada una puntuación de tres puntos, del 11 al 20 valen cuatro puntos, y del 21 al 30 valen cinco puntos. No se hace uso de calculadora y la prueba

[27] Sánchez, R. (2017), comunicación personal, 4 de Abril del 2017.
[28] Esteban-Romero, R. (2009). La Prova Cangur en la Comunitat Valenciana. Modelling in Science Education and Learning, 2, 3-9.

se presenta individualmente. Cada una de las preguntas tiene cinco posibles respuestas, de las que solamente una es correcta.

La primera participación de Colombia fue en el año 2010 y actualmente participan 83 países a nivel mundial.

2.3.2. Problemas de las Competiciones Matemáticas.

Las Competiciones Matemáticas incentivan a los estudiantes con los problemas que se proponen, de acuerdo con el objetivo de las mismas: *"El principal objetivo de las Competiciones Matemáticas es desarrollar pensamiento crítico y lógico. Se supone que (quien compite) tiene habilidades combinatorias e imaginación para resolver tareas matemáticas con éxito"*[29].

Hodaňová (2008), dice que este tipo de Competiciones generan en el estudiante motivación y curiosidad para encontrar la solución de los problemas propuestos; ya que éstos no son fáciles de desarrollar pero tampoco imposibles de resolver, pero sí despiertan el interés por generar hipótesis de solución por parte de los estudiantes.

"Hoy, las Olimpiadas de Matemáticas son ampliamente conocidas, tanto en la comunidad de matemáticos como en la comunidad en general, por el impacto que han tenido y siguen teniendo en la transformación de la forma en que el estudiante se percibe a sí mismo y en que nosotros los maestros y profesores nos percibimos, y la creciente confianza que se tiene por parte y parte por nuestro poder creativo y la solidez de nuestro pensamiento matemático"[30].

Falk (2011), considera que, para realizar las Olimpiadas Matemáticas, muchos autores influyentes en el tema de resolución de problemas, como Polya, Erdös, Posá y muchos más, aportaron estrategias

[29] Hodaňová, J. (2008). Mathematical Competitions at primary schools. University in Ružomberok
[30] Falk, M. (2001). Olimpiadas de Matemáticas: retos, logros (y frustraciones). Universidad Antonio Nariño.

singulares, originales y particulares que se agrupan como tipo de problemas retadores. En el transcurso del tiempo las olimpiadas matemáticas fueron tomando diferentes formas de desarrollo, desde pruebas rápidas (selección múltiple con única respuesta) hasta de tipo investigativo, entre otros. La autora señala que no necesariamente se debe tener una forma común de problemas en las Olimpiadas Matemáticas. Por el contrario, afirma que las matemáticas son tan amplias y elásticas que el tipo de problemas retadores permiten extender la capacidad del estudiante hacia su superación personal en matemáticas.

La doctora Falk afirmó *"El tipo de metodología a emplear en el aula se da por medio de introducción de problemas de competiciones resueltos y posteriormente se proponen problemas similares al anterior. La idea es que el estudiante construya su aprendizaje o conocimiento a partir de lo anterior y con la resolución de problemas".*[31]

También reiteró *"las olimpiadas no pretende ser un currículo para el desarrolló diario de la matemática pero si se cree que toda la matemática se aprende a través de la resolución de problemas."*[32]

Por otro lado el doctor Sánchez declaró *"Los problemas del Canguro Matemático cumplen con un propósito y es utilizar los problemas en el aula para enseñar un concepto o aplicación del concepto enseñado."*[33]

Resumen de dos tipos de olimpiadas que se trabajan a nivel mundial:

1. **Olimpiadas con problemas de selección múltiple con única respuesta**. Generan en el estudiante, más efectividad y eficacia en la solución del problema. Falk (2001) considera que *"…el análisis del problema (retador) involucra algunas ideas muy bonitas, que posibilita generalizarlas, resolverlas, crear argumentos de formas distintas y realizar actividades que*

[31] Falk, M. (2017), entrevista, 4 de Mayo del 2017.
[32] Falk, M. (2017), comunicación personal, 4 de Mayo del 2017.
[33] Sánchez, R. (2017), comunicación personal, 4 de Abril del 2017.

enriquecen el pensamiento matemático del estudiante"[34]. Dice que, si en algún momento el estudiante no puede resolver el problema, pero queda con la duda, se le abre una puerta que lo encamina hacia una discusión matemática formativa y motivante.

2. **Olimpiadas matemáticas con propuesta de problemas para resolver en un tiempo ilimitado.** Este tipo de Competiciones tienen como propósito: a) en el concurso: que sean complementarios o adicionales a la prueba que presentan los estudiantes; b) fuera del concurso: que sean desarrollados y estudiados por el estudiante como actividad enriquecedora.

2.3.3. Las Competiciones Matemáticas en el aula.

Los problemas matemáticos que se formulan para la mayoría de las competiciones tienen como propósito resolverse en un tiempo limitado, es decir; una prueba de selección múltiple con única respuesta o problemas que refuercen los componentes o desempeños en los estudiantes. Pero, la idea principal, es llevar los problemas al aula para que el docente y el estudiante puedan discutir y llegar a generar otro tipo de preguntas diferentes a las que se están trabajando en el problema.

Se considera que hay otros métodos de emplear los problemas de las Competiciones Matemáticas con los estudiantes, que los favorezcan en su construcción de conceptos y en generar estrategias para resolver problemas retadores. Pero, esto no significa que el docente debe casarse con una sola forma de trabajo, puesto que el objetivo primordial de las competiciones matemáticas es generar interés e intriga en los estudiantes.

Falk (2001) afirma *"La participación en Competiciones inspira en muchos estudiantes un interés creciente en la matemática e incrementa el deseo que tienen para aprender más matemáticas"*[35].

[34] Falk, M. (2001). Olimpiadas de Matemáticas: retos, logros (y frustraciones). Universidad Antonio Nariño.
[35] Falk, M. (2001). Olimpiadas de Matemáticas: retos, logros (y frustraciones). Universidad Antonio Nariño.

Se considera que el estudiante debe estar en la capacidad de poder resolver problemas retadores que se propongan en clase, y no sencillamente, seguir resolviendo ejercicios similares a los que ya se han trabajado en el aula, copias de otros ya practicados.

De acuerdo a los anterior la doctora Falk comentó *"emplear los problemas desde grado prescolar incentivan al estudiante a resolver problemas retadores, de una forma singular y creativa".*[36]

Las temáticas que se trabajan en las olimpiadas matemáticas son diferentes a las que se realizan en una clase tradicional. Los temas que se emplean en las olimpiadas no son predeterminados, debido a que la matemática abarca, por un lado, un rango muy amplio de temáticas, argumentos e ideas; por otro lado, existen recursos amplios que permiten al estudiante profundizar y ampliar su comprensión y dominio de la matemática elemental sin que haya necesidad de acelerar sus estudios hacía niveles, por ejemplo, de la matemática universitaria.

Falk (2001) afirma que *"En efecto, por medio de participación en Competiciones de este tipo y las actividades que ella implica, como preparación académica adicional para las Competiciones más importantes, el estudiante realmente tiene la oportunidad de hacer matemáticas interesantes, aunque sean elementales"*[37]

Las olimpiadas se dirigen hacia opciones para un amplio grado de logros, desarrollo de habilidades en matemáticas y medios para adquirir experiencias en la resolución de problemas o situaciones problemáticas inusuales. Esto hace que, al evaluar al estudiante, no solamente se deben analizar las destrezas y conocimientos: sino también habilidades que genera al desarrollar un problema, flexibilidad y creatividad.

[36] Falk, M. (2017), comunicación personal, 4 de Mayo del 2017.
[37] Falk, M. (2001). Olimpiadas de Matemáticas: retos, logros (y frustraciones). Universidad Antonio Nariño.

Falk (2017) argumentó *"No se busca identificar las dificultades en los estudiantes sino as genialidades, las estrategias ingeniosas y como utilizan los enfoques en otros problemas".*[38]

Por otro lado, también afirmó *"el docente debe valorar los avances positivos del estudiante y no "castigarlo" por lo que no pudo hacer. La calidad de la experiencia de aprendizaje es superior a lo que se hace usualmente."*[39]

Por último, la participación de los estudiantes y docentes en olimpiadas permite que puedan apreciar sus logros, calificar su práctica, percibir y evaluarse a sí mismos como miembros de una comunidad integral.

2.4. Marco geométrico.

El comienzo de la geometría se puede evidenciar en las culturas egipcias y babilónicas, los griegos heredaron y extendieron los conocimientos construidos por estas civilizaciones.

La geometría es primordial, puesto que se basa en una colección de enunciados descubiertos empíricamente en relación con longitudes, ángulos, áreas y volúmenes de diversos objetos. La geometría fue desarrollada para satisfacer ciertas necesidades, como lo son: construcción, astronomía y artesanía.

El matemático y filósofo griego Euclides es uno de los matemáticos más influente e importantes en la historia. Se considera una persona primordial en la geometría, especialmente por escribir el libro; *Los elementos,* una obra famosa que recolecta la axiomatización de las construcciones con regla y compás, y que tomaremos como marco para el desarrollo de esta investigación, pues el enfoque de su presentación de muchos temas, entre ellos los de perímetro, área, propiedades de ángulos, triángulos, círculos y circunferencias pueden incentivar al estudiante a resolver problemas del Canguro Matemático para mejorar la habilidad de razonamiento geométrico.

[38] Falk, M. (2017), comunicación personal, 4 de Mayo del 2017.
[39] Falk, M. (2017), comunicación personal, 4 de Mayo del 2017.

Por tal razón la geometría es una rama fundamental de la matemática para el desarrollo del pensamiento espacial y métrico. El está lleno de figuras o elementos geométricos y el adquirir conocimiento sobre la geometría, ayuda a orientar adecuadamente a las personas en el espacio, haciendo apreciaciones sobre formas, distancias, distribución de objetos en el espacio, entre otros.

Dentro de los estándares curriculares del M.E.N (Ministerio de Educación Nacional), se hace explicito la geometría desde grado primero hasta undécimo dentro de las categorías del pensamiento espacial y sistema geométrico y pensamiento métrico y sistema de medidas.

El autor Howard Gardner en su teoría de las *múltiples inteligencias*, plantea que el pensamiento espacial es esencial en el pensamiento científico, ya que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas. El manejo de información espacial favorece la solución de problemas de ubicación, orientación y distribución en los espacios.

En el pensamiento geométrico, los lineamientos curriculares describen el modelo de Van Hiele como una propuesta que describe con exactitud la evolución de este pensamiento, relacionando cada uno de los niveles de la siguiente manera:

- Nivel 1: Visualiza, es donde el alumno percibe las figuras, sin detectar relaciones entre tales formas o entre sus partes.
- Nivel 2: Analiza, desarrolla conocimiento de los componentes de las figuras y sus propiedades básicas.
- Nivel 3: Clasifica, relaciona y define figuras jerárquicamente mediante sus propiedades.
- Nivel 4: Razona, es decir; comprende los axiomas, teoremas y definiciones.
- Nivel 5: Estudia geometría sin modelos de referencia y razona formalmente manipulando enunciados geométricos, como lo son: axiomas y teoremas.

En los lineamientos curriculares del M.E.N se puede observar lo siguiente: *"La geometría, por su mismo carácter de herramienta para interpretar, entender y apreciar un mundo que es eminentemente geométrico, constituye una importante fuente de modelación y un ámbito por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial y procesos de nivel superior y, en particular, formas diversas de argumentación".*[40]

En las competiciones matemáticas se evidencian problemas elementales de geometría, en los cuales se hace presente las temáticas comunes tratadas de forma inusual. Dentro de este tipo de problemas se requiere de la creatividad, pensamiento, análisis y argumentación de manera lógica.

Villanueva (2009) afirma que *"La geometría es una de las áreas que forman parte de la olimpiada, en ésta uno puede visualizar los problemas mediante un dibujo, lo cual ayuda mucho a imaginar y manejar los datos para la solución del problema."*[41]

En este trabajo damos importancia a la geometría, puesto que se quiere que el estudiante mejore su habilidad de razonamiento geométrico, relacione los conceptos y propiedades que intervienen en problemas del Canguro Matemático y consolide su pensamiento geométrico.

2.5. Comunidad de Práctica de Wenger. Su incidencia en el aprendizaje

El concepto de la comunidad de practica fue desarrolla en el año 1991 en el libro publicado por Jean Lave y Etienne Wenger.

La comunidad de práctica (CP) está conformada por un grupo de personas unidas por su interés en la misma rama o tema de indagación. La interacción se efectúa en la comunicación de los miembros de la comunidad cuando, sobre cierto problema trabajan y aportan juntos desde el planteamiento hasta la

---

[40] Lineamientos curriculares de Colombia en matemáticas.
[41] Méndez, H. V. (2009). Geometría Olímpica. Memorias de las Grandes Semanas Nacionales de la Matemática Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, 161.

hipótesis de solución. Vásquez (2011) señala que *"En la CP desarrollan el conocimiento que les permite realizar sus tareas."* [42]

Esta CP tiene tres características principales:

El tema en común: El tema es el asunto de que se habla, se profundiza y se va a trabajar dentro del aula. Se identifica por medio de preguntas. Una vez identificado el tema, se lleva a cabo investigaciones e interacciones que permiten formular y hacer efectiva, una hipótesis de solución.

Compromiso mutuo: Los miembros de la comunidad (estudiantes) deben comprometerse a cumplir el trabajo que desarrollan en grupo. Necesitan saber y poner en práctica reglas de comportamiento para cumplir el compromiso.

Recopilación compartida: Mediante el diálogo y el trabajo en equipo, se van construyendo ideas, procedimientos de solución para cada uno de los problemas que se quieren resolver.

La comunidad de práctica, como base fundamental del aprendizaje en su contexto, considera las siguientes ideas básicas:

- El aprendizaje dentro de esta práctica, es un fenómeno social, en el cual los miembros (estudiantes), por medio de la interacción, van aprendiendo u obteniendo nuevos conceptos y procedimientos para cada uno de los problemas.
- En este tipo de aprendizaje el estudiante plantea, junto con sus compañeros, diferentes soluciones que se pueden aplicar en cada uno de los problemas, buscando los recursos necesarios, actuando y manipulando.

Vásquez (2011) afirma que: *"El aprendizaje se desarrolla a través de las interacciones que tienen lugar en ese contexto, pero que, además, esas interacciones son asimétricas: un niño aprende interactuando*

---

[42] Vásquez Bronfman, S. (2011). Comunidades de práctica. Educar, 47(1).

con una persona más competente en la habilidad de aprender (puede ser un adulto de su misma cultura, de su familia, un profesor, etc.)"[43]. Cuando un estudiante está en un medio apropiado de aprendizaje, sus conocimientos previos interactúan dentro de esta comunidad, lo que le ayuda a fortalecerlos, a aportar nuevos conceptos y desarrollar funciones. Para poder llegar a este proceso, los estudiantes deben tener claridad en: los temas que se van a tratar; en los conceptos que hay entre ellos y en los procedimientos adecuados para el desarrollo de cada uno. La intervención del maestro es efectiva, cuando entran en diálogo para realizar cada uno de los problemas propuestos por el docente.

Vásquez (2011) considera que *"El aprendizaje ocurre en la «acción situada». Ante un problema concreto, un individuo no se limita a pensar en una solución, diseñar un plan y luego ejecutarlo."*[44]. De acuerdo con los conocimientos previos de los estudiantes, su pensamiento deductivo ante un problema puede ser mucho mayor que los demás. Puede pensar en una hipótesis de solución para dichos problemas actuando/manipulando los recursos en su forma procedimental. Así, el estudiante puede ir empleando otro tipo de procedimiento por sí solo o dentro de la comunidad.

En la comunidad de práctica se consideran tres niveles de participación:

Figura 2. Niveles de participación según la CP

---

[43] Vásquez Bronfman, S. (2011). Comunidades de práctica. Educar, 47(1).
[44] Vásquez Bronfman, S. (2011). Comunidades de práctica. Educar, 47(1).

- **Participantes activos:** los que participan activamente en la comunidad y se consideran como los líderes.
- **Miembros activos:** los que participan en las discusiones. A diferencia de los participantes activos su participación dentro de la comunidad no es sobresaliente.
- **Miembros restantes:** los que están y conforman la comunidad, pero cuya participación es nula.

La participación del estudiante en las actividades de aula que se programan para la transmisión del conocimiento, fortalece el interactuar, dialogar, conjeturar y formular preguntas. Permite a los estudiantes dar a conocer sus conceptos básicos, sus propiedades referentes a las temáticas relacionadas, en el caso de la presente tesis, principalmente en Geometría.

Es posible hacer un llamado a las personas que desean dialogar, para que conformen pequeñas comunidades científicas que brinden nuevas oportunidades de conocimiento para llegar al saber del tema que se está tratando. Se requiere identificar las diferentes maneras en que se puede abordar (cada tema) por medio de manipulación de los recursos, interactuando también con software dinámico que se van incrementando en este siglo XXI.

Dentro de esta teoría hay un proceso de desarrollo del aprendizaje para tener un mayor nivel de complejidad en las temáticas. Se enfoca así:

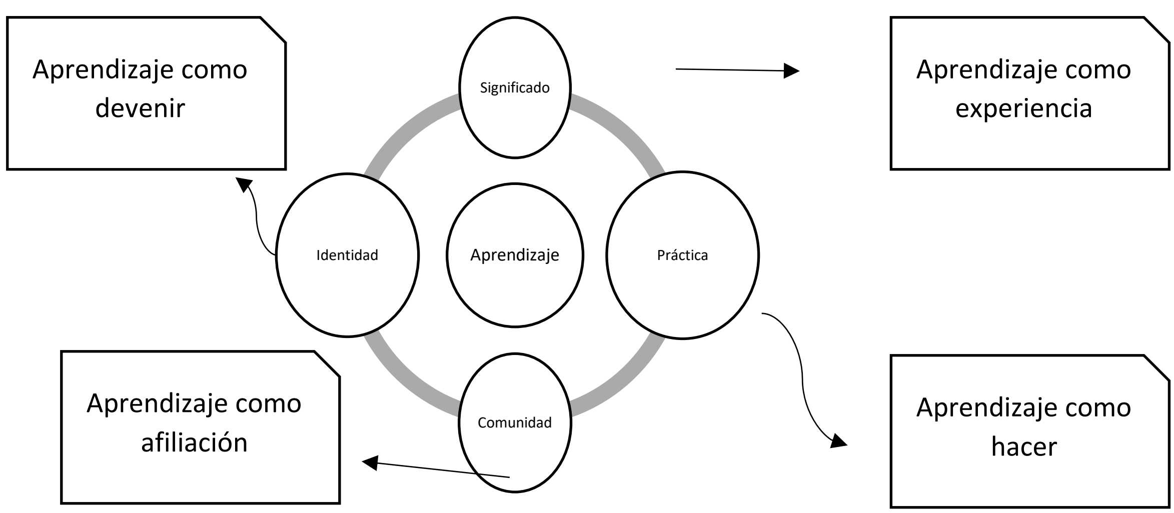


Figura 3. Fases de Comunidad de Práctica de Wenger (1998)

Wenger (1998) afirma *"Las comunidades de práctica son fundamentalmente ámbitos privilegiados de aprendizaje que se establecen tanto en organizaciones públicas como en instituciones de educación. Su principal objetivo es convertir los saberes personales en valores colectivos que se traduzcan en prácticas diferentes o renovadas"*[45]. Siendo este un impulso favorecedor para enriquecer en el proceso de enseñanza aprendizaje en los estudiantes por medio de software dinámico, el simple hecho de convivir en un ambiente que le permite dialogar y transmitir ideas para la solución de dichos problemas y poderlos manifestar en una comunidad hace identificar los conceptos previos de los estudiantes referentes a las temáticas.

Lave y Wenger (1991) expresan *"Para los miembros de la comunidad, aprender es un proceso de apropiación y dominio en el empleo de recursos y herramientas orientadas a metas. Cada miembro pasa por un proceso de "participación legítima periférica" en el que recibe el apoyo de los miembros más expertos para realizar actividades importantes para la comunidad, que gradualmente se vuelven más complejas. Los logros de cada individuo son el resultado del tránsito de un lugar en la periferia de la comunidad hacia una participación plena"*[46]. Dentro de la CP se conocen unas dimensiones especiales que constituyen su eje:

- El significado: es un conocimiento alrededor del cual los integrantes de la comunidad interactúan; mediante una participación comprometida en la actividad, permitiendo intercambiar las ideas unos a otros para así encontrar un procedimiento apropiado.

[45] Morales, A. H., & Macías, R. D. C. F. (2013). Caracterización de una comunidad de práctica orientada al uso de la matemática en la enseñanza de la ingeniería. El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, 101.
[46] Morales, A. H., & Macías, R. D. C. F. (2013). Caracterización de una comunidad de práctica orientada al uso de la matemática en la enseñanza de la ingeniería. El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, 101.

- La comunidad: está establecida por relaciones de mutuo compromiso por parte de sus integrantes que se integran como una comunidad social, para interactuar, presentar propuestas, asumir el compromiso de desarrollar actividades y construir diferentes hipótesis de solución.
- La práctica: se puede hacer de explicita manera consciente. Puede ocurrir también de una manera no intencionada, cuando entra en ella el aprendizaje en un compromiso mutuo, y de recopilación compartida
- La identidad: después de emplear cada uno de los procesos anteriores, se identifica como aprendizaje obtenido en las actividades y la interacción en la comunidad.

. **Conclusiones del capítulo 2**

La teoría de solución de problemas es uno de los marcos teóricos que sustenta la tesis. Varios autores se destacan en este campo por realizar aportes, definiciones y estrategias de solución en la resolución de problema como lo son Polya (1965), Krulik & Rudnick (1988), De Guzmán (1996), Schoenfeld (2012) entre otros. En la tesis se asume la propuesta por Polya (1965).

Las competiciones matemáticas tienen como objetivo, aparte de identificar a personas talentosas, el de favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje en la geometría en un proceso educativo de investigación participativa. El uso de los problemas del Canguro Matemático, en el aula, se espera que conduzcan a construir conocimiento y enriquecer los conceptos previos por parte del estudiante.

Falk (2016) y Sánchez (2017) entre otros, destacan la importancia de este tipo de competiciones matemáticas para el descubrimiento de estudiantes talentosos y favorecer el proceso de aprendizaje en el aula de clase.

En la comunidad práctica de Wenger se asume la definición de Wenger & Trayner (2015), en el cual un grupo de personas se reúnen para interactuar sobre el mismo contexto y así poder mejorar su aprendizaje al compartir su información.

Las actividades propuestas en la tesis buscan relacionarse con el trabajo de comunidades de práctica en la cual los estudiantes se organizan en pequeños grupos de tres personas para dialogar, intercambiar ideas o estrategias de solución en un problema y posteriormente darlo a conocer en el aula.

CAPÍTULO 3. DISEÑO Y APLICACIONES DE LAS ACTIVIDADES

Las actividades que se presentan en este capítulo están diseñadas con el objetivo de implementar problemas del Canguro Matemático en el aula de clases y generar en los estudiantes el hábito de emplear los conceptos geométricos, lograr la construcción de conceptos más robustos y generar preguntas en el mismo contexto del problema, pero referente a otra situación.

Estas situaciones están planteadas con el propósito de ser motivadoras e interesantes para los estudiantes, para despertar en ellos la curiosidad y motivación, deseando aprender de forma independiente o en equipos, que conlleve a generar discusiones donde presenten las estrategias que emplearon en la solución de cada uno de los problemas y en las discusiones que surjan y sean mediados por el docente.

3.1. Estructuras de las actividades.

Las actividades propuestas están basadas en elementos básicos como lo son: trabajo con el docente, en equipos e individual, la importancia de emplear conceptos geométricos y el también construirlos y el espíritu de competiciones.

Estas actividades están generadas con problemas de geometría seleccionados del Canguro Matemático desde el año 2000 hasta el año 2016, desde nivel I hasta nivel VI. Su estructura tiene objetivo, sugerencias metodológicas y desarrollo de la actividad.

Prueba inicial: ¿Qué tanto sabes de geometría?

Actividad 1: Pasos de resolución de problemas con problemas del Canguro Matemático.

Actividad 2: Calculando perímetros.

Actividad 3: Calculando áreas.

Actividad 4: ¿Qué tanto sabes de triángulos?

Actividad 5: ¿Qué tanto sabes de círculos y circunferencias?

Actividad 6: Aprendamos un nuevo concepto, simetría.

Evaluación final.

3.2. ACTIVIDADES:

3.2.1. PRUEBA INICIAL: ¿QUÉ TANTO SABES DE GEOMETRÍA?

OBJETIVO: Identificar el nivel de complejidad que manejan los estudiantes de grado octavo en geometría para detectar las dificultades que presentan en conceptos básicos al implementarlos en problemas de competiciones matemáticas.

SUGERENCIAS METODOLÓGICAS:

Crear un ambiente agradable en el aula para poder introducir a los estudiantes en problemas de competiciones matemáticas. Posteriormente el estudiante trata en lo posible de solucionar los problemas propuestos por el docente empleando los conceptos básicos que tienen en geometría.

En esta prueba inicial el método a utilizar por el docente es no intervenir en el desarrollo de la prueba con el propósito de detectar los puntos fuertes y las dificultades que presentan los estudiantes para el diseño de las actividades que favorezcan el proceso de aprendizaje en los estudiantes por medio de la construcción e implementación de los conceptos que encuentran en problemas de competiciones matemáticas.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD:

La prueba inicial consta de diez problemas del Canguro Matemático donde se presentan temas básicos y elementales de la geometría. Cumple con el propósito de identificar las falencias o dificultades que presentan los estudiantes, así como sus fortalezas en geometría. Esta actividad se realiza individual, sin ningún tipo de intervención por parte del docente.

3.2.2. ACTIVIDAD 1: PASOS DE RESOLUCION DE PROBLEMAS CON PROBLEMAS DE CANGURO MATEMÁTICO.

OBJETIVO: Emplear los pasos de resolución de problemas de Polya en los problemas del Canguro Matemático para que el estudiante comprenda caminos a solucionar.

SUGERENCIAS METODOLÓGICAS:

El docente debe crear un ambiente agradable para poder guiar a los estudiantes en las estrategias que señala Polya, para apoyarlos se estableció trabajar en tres tiempos; trabajar con el docente, trabajar en equipos y trabajar individualmente para ver el proceso que adelantan los estudiantes. Es necesario que el docente genere un ambiente de preguntas naturales en el aula para poder solucionar los problemas y ayudar a encaminar al estudiante en estas situaciones.

Este proceso permite evaluar, enseñar y generar habilidades en los estudiantes para resolver este tipo de problemas. Polya señala que los estudiantes pueden emplear cuatro pasos que les favorecen en ser mejores solucionadores de problemas retadores. Estos pasos son:

- Comprender el problema
- Elaborar un plan para resolver el problema
- Ejecutar el plan
- Examinar la solución obtenida

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD:

La actividad consta de tres preguntas seleccionadas del Canguro Matemático y tres tiempos a desarrollar en el aula, las cuales son: trabajo con el docente, trabajo en grupo y trabajo individual. Cumple con el propósito de emplear cada uno de los pasos de Polya para la interpretación de un problema, de tal forma que ayude al estudiante a comprender el problema y emplear una estrategia de solución.

3.2.3. ACTVIDAD 2: CALCULANDO PERÍMETROS.

OBJETIVO: Hallar en diferentes figuras geométricas planas y en distintas situaciones el perímetro correspondiente.

SUGERENCIAS METODOLÓGICAS:

Los estudiantes aprenderán a identificar el concepto de perímetro involucrado en cada uno de los problemas del Canguro Matemático que se estudiarán. Ellos estudiarán el perímetro desde diferentes situaciones presentados en la guía y desarrollarán estrategias de solución. La descripción de la actividad ayuda al estudiante a forjar la habilidad de razonamiento geométrico.

La resolución consiste en relacionar el concepto de perímetro con propiedades elementales en la geometría básica, esto generará en los estudiantes estrategias de solución y conjeturas en cada problema.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD:

La actividad consta de siete preguntas seleccionadas del Canguro Matemático referente a perímetro. Se desarrolla en tres tiempos, los cuales son: trabajo con el docente, trabajo en grupos y trabajo individual. La actividad cumple con el propósito de generar un razonamiento matemático en los estudiantes para que empleen el concepto de perímetro en diferentes situaciones con ayuda de otras propiedades involucradas en ellos.

3.2.4. ACTVIDAD 3: CALCULANDO ÁREAS.

OBJETIVO: Hallar en diferentes figuras geométricas planas y en distintas situaciones el área correspondiente.

SUGERENCIAS METODOLÓGICAS:

Para el desarrollo de esta actividad los estudiantes aprenderán a identificar el concepto de área involucrado en cada uno de los problemas del Canguro Matemático que se abordarán. Ellos estudiarán el área desde diferentes situaciones presentados en la guía y desarrollarán una relación y diferencia entre el uso del concepto de perímetro y el de área. La descripción de la actividad ayudará al estudiante a diferenciar el concepto de área con el de perímetro, así mismo forjar la habilidad de razonamiento geométrico en los estudiantes.

La resolución consiste en relacionar el concepto de área con otras propiedades elementales en la geometría básica, esto generará en los estudiantes estrategias de solución y conjeturas en cada problema.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD:

La actividad consta con siete preguntas del Canguro Matemático referentes al tema de área y relacionado con el concepto de perímetro y la involucran otras de propiedades. Se desarrolla en tres tiempos, los cuales son: trabajo con el docente, trabajo en grupo y trabajo individual. La actividad cumple con el propósito de hacer que los estudiantes reconozcan la diferencia entre el concepto de perímetro y área. Se involucran propiedades básicas y el concepto de perímetro para poder hallar la solución que se requiere en el problema.

3.2.5. ACTIVIDAD 4: ¿QUÉ TANTO SABES DE TRIÁNGULOS?

OBJETIVO: Diferenciar los distintos tipos de triángulos, así como conocer las principales propiedades de sus ángulos y lados.

SUGERENCIAS METODOLÓGICAS:

Los estudiantes tendrán una hoja donde van a realizar una pequeña actividad sobre la propiedad de suma de los ángulos internos de un triángulo para poder dar inicio al desarrollo de la guía. Para el desarrollo de la actividad los estudiantes reconocerán cada una de las propiedades de los triángulos y ángulos por medio de los problemas del Canguro Matemático.

La resolución consiste en relacionar cada una de las propiedades de los triángulos y ángulos con los conceptos de área y perímetro involucrados en los problemas.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD:

La actividad consta con siete problemas del Canguro Matemático referentes a las propiedades de los triángulos y ángulos, tipo de triángulos y ángulos. Se desarrolla en tres tiempos, las cuales son: trabajo con el docente, trabajo en grupo y trabajo individual. La actividad está relacionada con el concepto de perímetro y área, para que los estudiantes puedan seguir haciendo uso de estos temas y reconozcan su importancia, también se involucran otras propiedades que ayudan a encontrar las soluciones requeridas en el problema, como por ejemplo rectas perpendiculares.

3.2.6. ACTIVIDAD 5: ¿QUÉ TANTO SABES DE CÍCULOS Y CIRCUFERENCIAS?

OBJETIVO: Determinar las propiedades de la circunferencia y el círculo y utilizarlas en diversos problemas.

SUGERENCIAS METODOLÓGICAS:

Para el desarrollo de la actividad se hace uso de la herramienta *GeoGebra* y una tabla del juego *Twister* (modificada) para la explicación de ciertos conceptos geométricos con círculos y circunferencias. Los estudiantes tendrán la posibilidad de manipular estas herramientas para el mejoramiento de conocimientos de propiedades.

La resolución consiste en relacionar cada una de las propiedades de los círculos y circunferencias con los conceptos de área, perímetro, propiedades de los triángulos y ángulos involucrados en los problemas.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD:

La actividad consta con siete problemas del Canguro Matemático referente a círculos y circunferencias, donde se relacionan con el concepto de perímetro, área y las propiedades de los triángulos y ángulos. Cumple con el propósito de hacer reconocer la importancia de cada una de las temáticas trabajadas anteriormente para estos nuevos problemas, también ayudando a generar habilidades de razonamiento matemático en los estudiantes mediante la resolución de problemas.

3.2.7. EVALUACIÓN FINAL:

OBJETIVO: Analizar los indicadores alcanzados por los estudiantes en cada uno de los conceptos de perímetro, área, propiedades de los triángulos, círculos y circunferencia.

SUGERENCIAS METODOLOGÍCAS:

En esta prueba final el método a utilizar por el docente es no intervenir en el desarrollo de la prueba con el propósito de detectar los indicadores alcanzados por los estudiantes por medio de las actividades que presentaron.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD:

La actividad consta de diez preguntas del Canguro Matemático donde se relacionan con cada uno de los problemas de la prueba inicial que realizaron los estudiantes. Cumple con el propósito de analizar los indicadores alcanzados por parte de los estudiantes en los temas de perímetro, área, propiedades de los triángulos, círculos y circunferencias. También la relación entre cada uno de estos temas y los demás se involucran dos, tres o todos ellos para poder hallar la solución del problema.

Conclusiones del capítulo 3

La prueba inicial, las cinco actividades y prueba final propuestas se sustentarán en problemas del Canguro Matemático en geometría, la estrategia de Polya en la resolución de problemas y la comunidad práctica de Wenger, permitiendo a los estudiantes identificar sus habilidades, las estrategias de solución, construcción de su conocimiento o el mejorarlo y también construir situaciones similares a los problemas propuestos y generar una solución.

La participación de los estudiantes en cada una de las pruebas y actividades es de suma importancia para propiciar las estrategias que surjan cuando aborden los problemas.

CAPITULO 4. ANALISIS DE LOS RESULTADOS DE LA PROPUESTA.

En este capítulo se realiza un análisis del desarrollo de la prueba inicial y las actividades realizadas por los estudiantes, donde se valora frente a cada una de ellas su implementación, motivación por el aprendizaje, logros y dificultades.

Para el análisis de los logros alcanzados en el desarrollo de las actividades se utilizaron dos tablas en las cuales se establecen indicadores de las habilidades mostradas por los estudiantes en la resolución de problemas y en la implementación de la comunidad práctica de Wenger. Estos indicadores son:

Resolución de problemas:

I_1: Reconoce los datos del problema.

I_2: Organiza los datos.

I_3: Planea una resolución utilizando elementos matemáticos.

I_4: Trabaja con una meta clara.

I_5: Utiliza elementos matemáticos.

I_6: Propone una respuesta.

I_7: Su procedimiento algorítmico es adecuado.

I_8: Verifica la solución obtenida.

I_9: Redacta su procedimiento.

Comunidad de Práctica de Wenger:

Estos criterios fueron establecidos de acuerdo a los componentes de la Comunidad de Práctica de Wenger, los cuales son: significado, práctica, comunidad e identidad.

I_1: El liderazgo en cada grupo funciona adecuadamente.

I_2: El conocimiento se construye en forma colectiva, por medio del intercambio de ideas e información de los integrantes de la comunidad de clase.

I_3: En cada grupo se genera un compromiso mutuo para cumplir con su objetivo.

I_4: Cada estudiante define su rol o papel a desempeñar en el grupo.

I_5: Los integrantes del grupo asumen una tarea, generan cierto tipo de situación y aportan ideas para resolver un problema.

I_6: Generan una estrategia de solución.

4.1 Prueba inicial: ¿Qué tanto sabes de geometría?

Objetivo: Identificar el nivel de conocimiento en los estudiantes de grado octavo en geometría elemental para detectar las fortalezas y dificultades que presentan en conceptos básicos al implementarlos en problemas de competiciones matemáticas.

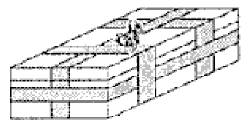
Descripción de la prueba inicial: La prueba inicial se desarrolló con 15 estudiantes de grado octavo. Se presentaron una serie de problemas del *Canguro Matemático* a los estudiantes, en las que se involucran los conceptos básicos en geometría elemental y propiedades de polígonos. La prueba de entrada cumple con el propósito de una prueba diagnóstico; tiene como finalidad identificar las fortalezas y debilidades en los conceptos básicos y cómo los estudiantes emplean estrategias, ideas, habilidades o formulan conjeturas de acuerdo a estos conceptos previos. El docente estuvo atento a las dudas o inquietudes que tenían los estudiantes, aclarando las preguntas que estaban realizando frente al problema.

Los estudiantes estuvieron concentrados y atentos durante el desarrollo de la prueba inicial la cual tuvo una duración de 1 hora y 30 minutos para su realización.

A continuación, se construye una tabla por cada problema de la prueba inicial para establecer que método implementaron cada uno de los estudiantes, dado el caso que no diera una respuesta se reportará como "no aplica".

1. La caja del regalo tiene dimensiones 10 cm x 10 cm x 30 cm y ha sido atada con la cinta. ¿Cuál es la longitud de la cinta si la longitud de la cinta en el nudo es despreciable?[47]

Respuesta esperada: Se observa 12 trozos de longitud 10 cm y 4 lados de longitud 30 cm por tanto,



$12 \times 10 = 120,\, 4 \times 30 = 120,\, 120 + 120 = 240, es\ decir\ 2\ m\ y\ 40\ cm$

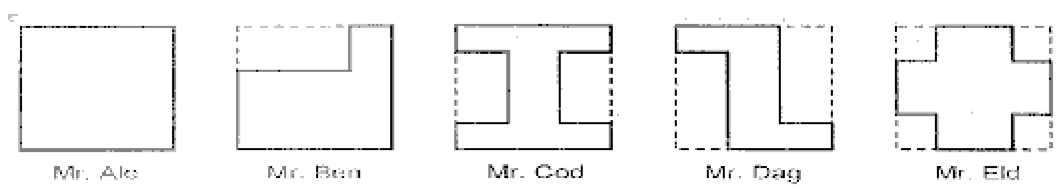
En la siguiente tabla se describe la respuesta indicada por los 15 estudiantes:

Estudiante.	***Respuesta.***
Estudiante 1.	El estudiante relacionó cada una de las caras de la caja para poder identificar la longitud de la cinta que se utiliza en cada una de ellas, llamando A la cara cuadrada y B la cara dimensión rectangular de la caja. Observa que la cara A tiene en total 40 cm de cinta y la cara B 200 cm, al sumarlos da como resulta que la longitud de la cinta es 240 cm.
Estudiante 2.	No aplica.
Estudiante 3.	El estudiante señala 60 cm de longitud de 10 cm que está a la vista de la imagen y señala 60 cm de más que no se pueden observan en la imagen, posterior a esto menciona que hay cuatro trozos de cinta que tienen longitud de 30 cm y en total seria 120 cm, al operar los tres resultados coloca como solución 240 cm.
Estudiante 4.	No aplica.
Estudiante 5.	El estudiante señala que el ancho de la caja es igual a 20 cm, al establecer esta relación, realiza las siguientes operaciones: hay en total 6 trozos de 20 cm, 6 trozos de 10 cm y 4 trozos de 30 cm. Al operar cada uno de ellos obtiene como resultado 120 cm + 60 cm + 120 cm, que es un total de 300 cm.
Estudiante 6.	Realiza el mismo procedimiento del estudiante 1.

[47] Canguro Matemático. Prueba 2000. Nivel 1, ejercicio 8

Estudiante 7.	No aplica
Estudiante 8.	Realiza el mismo procedimiento del estudiante 1.
Estudiante 9.	El estudiante señala que hay 4 trozos de 30 cm, 6 trozos de 10 cm y 2 trozos de 10 cm. Al multiplicar y sumar cada uno de ellos señala que hay en total 2 m de cinta.
Estudiante 10.	El estudiante no señala ningún procedimiento pero indica que la solución es de 240 cm.
Estudiante 11.	No aplica.
Estudiante 12.	No aplica.
Estudiante 13.	El estudiante menciona que hay dos longitudes de 80 cm y dos de 40 cm, no presenta algún tipo de procedimiento, solo opera estos datos y señala que la longitud es 240 cm.
Estudiante 14.	El estudiante no señala ningún procedimiento pero indica que la solución es 460 cm.
Estudiante 15.	El estudiante no señala ningún procedimiento pero indica que la solución es de 240 cm.

2. Cinco vecinos tienen parcelas rectangulares iguales. Cada uno de ellos levanta una cerca en su parcela para proteger la parte que tiene flores ¿Cuál de los vecinos necesita la cerca más larga?



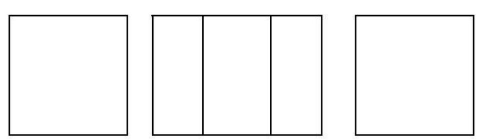
Respuesta esperada: Mr. Cod. El estudiante puede mover los segmentos de un lado a otro en los extremos del cuadro y visualizar en cuál es el mayor perímetro.

En la siguiente tabla se describe la respuesta indicada por los 15 estudiantes, en este caso algunos estudiantes no señalaron el procedimiento:

Estudiante	**Respuesta**
Estudiante 1.	Figura de Mr Cod.
Estudiante 2.	Figura de Mr Ben.

Estudiante 3.	Figura de Mr Cod.
Estudiante 4.	Figura de Mr Cod.
Estudiante 5.	Figura de Mr Cod.
Estudiante 6.	Figura de Mr Cod.
Estudiante 7.	Figura de Mr Cod.
Estudiante 8.	Figura de Mr Cod.
Estudiante 9.	Figura de Mr Ben.
Estudiante 10.	El estudiante complementa cada figura con cuadrados pequeños, así observa que la figura con más cuadrados es quien necesita más cerca, en este caso el estudiante señala como respuestas Mr Ben y Mr Eld.
Estudiante 11.	Figura de Mr Cod.
Estudiante 12.	No aplica.
Estudiante 13.	El estudiante complementa cada figura con cuadrados pequeños, así observa que la figura con más cuadrados es quien necesita más cerca, en este caso el estudiante señala que la respuesta es Mr Dag.
Estudiante 14.	Figura de Mr Cod.
Estudiante 15.	No aplica.

3. Dos cuadrados 9 cm. X 9 cm. Se superponen para formar un rectángulo 9 cm x 13 cm. Hallar el área de la región superpuesta.[48]



Respuesta esperada: La parte superpuesta de un cuadrado con otro es de 5cm y el largo es de 9cm por lo tanto es 45 cm^2.

[48] Canguro Matemático. Prueba 2007. Nivel 1, ejercicio 16

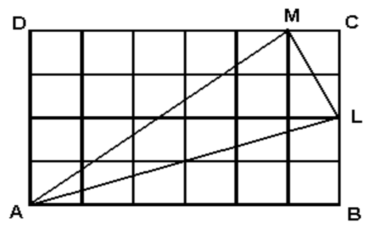
En la siguiente tabla se describe la respuesta indicada por los 15 estudiantes:

Estudiante	**Respuesta**
Estudiante 1.	El estudiante señala que la base del rectángulo que está superpuesto en los dos cuadrados tiene una base de 2,5 cm. No emplea la fórmula de área y señala que 2,5 cm^2 es el área de la región superpuesta.
Estudiante 2.	El estudiante nombra a cada uno de los rectángulos como A, B y C, de tal forma que señala que el rectángulo A es igual al rectángulo C. La suma de las bases del rectángulo A y B es igual a 9 cm, por tanto, la base del rectángulo C es igual a 4 cm. El estudiante resalta que el rectángulo A y C son iguales quiere decir que sus bases miden 4 cm y del rectángulo B su base es 5 cm, por último, señala que la altura es igual a 9 cm, por tanto, al aplicar la fórmula de área el resultado es 45 cm^2.
Estudiante 3.	El estudiante manifiesta que: “Supongamos que la región superpuesta tiene 5 cm de ancho y la altura es 9 cm” por tanto al operar estos dos datos indica que el resultado es 45 cm^2.
Estudiante 4.	El estudiante establece que las bases de los tres rectángulos son iguales a 4 cm, 5 cm y 4 cm y la altura es 9 cm. Por tanto, al operar muestra que la respuesta es igual a 45 cm^2.
Estudiante 5.	Realiza el mismo procedimiento del estudiante 4.
Estudiante 6.	Suma la longitud de los dos cuadrados que es igual a 18 cm, a este valor le resta 13 cm (ancho del rectángulo) y obtiene como resultado 5 cm. Aplica la fórmula del área para los valores 5cm y 9 cm y obtiene como solución 45 cm^2.
Estudiante 7.	Realiza mismo procedimiento del estudiante 4.
Estudiante 8.	Propone que la longitud de la base es igual a 4,5 cm, 4 cm y 4,5 cm, la longitud de la altura es igual a 9 cm, por tanto, al multiplicar 4 cm por 9 cm obtiene como resultado 36 cm^2.
Estudiante 9.	Realiza mismo procedimiento del estudiante 4.
Estudiante 10.	Realiza mismo procedimiento del estudiante 4.
Estudiante 11.	Operar los valores 13 cm y 9 cm del rectángulo para indicar que el resultado es igual a 117 cm^2.
Estudiante 12.	Realiza mismo procedimiento del estudiante 4.

Estudiante 13.	No aplica.
Estudiante 14.	Realiza mismo procedimiento del estudiante 11.
Estudiante 15.	Indica que el valor del rectángulo superpuesto su base es igual a 5 cm y la altura es 9 cm. Por tanto, al operar estas dos longitudes se obtiene como resultado 45 cm^2.

4. En la figura, el rectángulo ABCD está formado por 24 cuadrados, cada uno de ellos de lado 1.

¿Cuál es el área del triángulo ALM?[49]



Respuestas esperadas: $\Delta MDA = 10,$ Área $\Delta ABL = 6,$ Área $\Delta MCL = 1,$ Área del triángulo ABCD=24, $24 - (10 + 6 + 1) = 7$

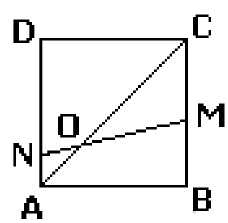
A continuación, se describe en la tabla las soluciones indicadas por los 15 estudiantes:

Estudiante	**Respuesta**
Estudiante 1.	No aplica.
Estudiante 2.	Señala que el triángulo AML tiene como altura 6 cm y la base es igual a 2 cm. Por tanto, utiliza la forma del área de un triángulo para hallar la respuesta que es igual a 6 cm^2.
Estudiante 3.	Indica que la altura del triángulo AML es igual a 7 cm y su base es igual a 2 cm. Por tanto, al aplicar la formula el resultado es 7 cm^2.
Estudiante 4.	El estudiante indica que las longitudes AL=6,3 cm, LM= 2,3 cm y MA= 6,3 cm. Por tanto, señala que la altura del triángulo AML es iguala 6,3 cm y la base 2,3 cm al aplicar la fórmula del área el resultado es igual a 7,245 cm^2.
Estudiante 5.	Señala que la altura del triángulo AML es igual a 6,5 cm y la base es igual a 2 cm. Por tanto, al emplear la formula el resultado es igual a 6,5 cm^2.
Estudiante 6.	Realiza el mismo procedimiento del estudiante 2.

[49] Canguro Matemático. Prueba 2002. Nivel 2, ejercicio 19

Estudiante 7.	Muestra que la altura del triángulo AML es igual a 6,2 cm y la base es igual a 2 cm. Por tanto, al emplear la formula el resultado es igual a 6,2 cm^2.
Estudiante 8.	No aplica.
Estudiante 9.	El estudiante marca cada uno de los cuadrados internos del rectángulo. Posterior a esto comienza a unir los trozos de tal forma que completen un cuadrado. Así indica que dentro del triángulo hay 7 cuadrados iguales por tanto el área es igual a 7 cm^2.
Estudiante 10.	Señala que la altura del triángulo AML es igual a 5 cm y la base es igual a 2 cm. Por tanto, al emplear la formula el resultado es igual a 5 cm^2.
Estudiante 11.	No aplica.
Estudiante 12.	El estudiante emplea el teorema de Pitágoras para poder hallar la longitud de la hipotenusa cada uno de los triángulos rectángulos. No presenta una respuesta.
Estudiante 13.	Muestra que el resultado es 7 cm^2. No presenta procedimiento.
Estudiante 14.	Realiza mismo procedimiento del estudiante 2.
Estudiante 15.	No aplica.

5. ABCD es un cuadrado y la medida del ángulo $\angle$OND=60º. ¿Cuál es la medida a del ángulo $\angle$COM?[50]



Respuesta esperada: La diagonal divide en dos partes iguales al cuadrado, por tanto, cumple con la misma condición para los ángulos. Es decir

$$\angle DCA = 45°, \angle CAD = 45°, \angle BCA = 45°, \angle CAB = 45°$$

[50] Canguro Matemático. Prueba 2001. Nivel 3, ejercicio 5

Por tanto, se tiene que la suma de los ángulos OND y ONA es igual a 180° (ángulos suplementarios) 60° +120°=180°.

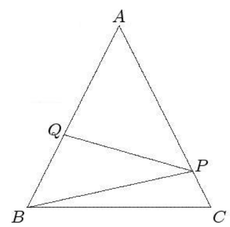
Ahora la suma de los ángulos internos del triángulo ONA es 120°+45°+15°=180° y por propiedad de opuestos por el vértice el ángulo COM mide a 15°.

A continuación, se muestra la tabla de soluciones indicada por los 15 estudiantes:

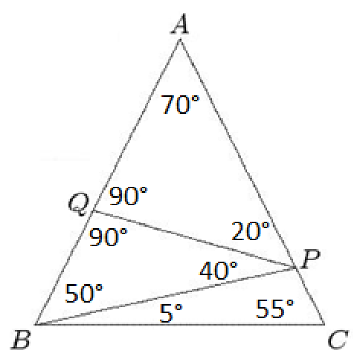
Estudiante	**Respuesta**
Estudiante 1.	No emplea ningún procedimiento, señala que la medida del ángulo COM es igual a 35°.
Estudiante 2.	El estudiante menciona: "Se divide el cuadrado en 2 lados iguales, formando dos triángulos semejantes dividiendo el ángulo en 90° en dos partes iguales. Por tanto, el resultado es igual a 45°.
Estudiante 3.	El estudiante insinúa que: "A simple vista el ángulo sería de 30° o 35°, si medimos seria 15°, pero la solución correcta es igual a 35°".
Estudiante 4.	El estudiante traza una recta desde el punto D hasta el punto O, según el estudiante; se forma un ángulo de 90°. Por tanto, indica que el ángulo OND mide 60°, COM mide 30° y DON mide 90°.
Estudiante 5.	Señala que el ángulo OND mide 60°, COM mide 30° y DON 90°. No realiza ningún tipo de procedimiento.
Estudiante 6.	Indica que el ángulo COM mide 180°. No realiza ningún tipo de procedimiento.
Estudiante 7.	No emplea ningún tipo de procedimiento, pero señala que los ángulos COM mide 35°, OCM mide 45° y OMC mide 100°.
Estudiante 8.	No aplica.
Estudiante 9.	El estudiante utiliza las propiedades de una diagonal y los ángulos en un triángulo y cuadrado, de tal forma que comienza a completar cada ángulo con el valor apropiado según la propiedad, e indica que el valor del ángulo COM es igual a 15°.
Estudiante 10.	Realiza mismo procedimiento del estudiante 9.

Estudiante 11.	No realiza ningún procedimiento e indica que el valor del ángulo COM es iguala 120°.
Estudiante 12.	No aplica.
Estudiante 13.	No aplica.
Estudiante 14.	No realiza ningún procedimiento e indica que el ángulo COM mide 15°.
Estudiante 15.	No realiza ningún procedimiento e indica que el ángulo COM mide 25°.

6. La figura muestra un triángulo isósceles ABC, con AB=AC. Si PQ es perpendicular a AB, el ángulo BPC es 120º y el ángulo ABP es 50º entonces ¿cuánto mide el ángulo PBC?



Respuesta esperada: La recta QP es perpendicular a AB, los ángulos conformados por el segmento horizontal y vertical es de 90°, aplicando la propiedad de triángulo isósceles se tiene lo siguiente: (ver la figura)



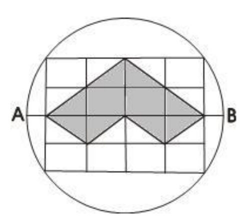
A continuación, se describe en la tabla las soluciones por cada uno de los estudiantes:

Estudiante	**Respuesta**

Estudiante 1.	No realiza ningún tipo de procedimiento, indica que el ángulo PBC mide 160°.
Estudiante 2.	No realiza ningún tipo de procedimiento, indica que el ángulo PBC mide 10°.
Estudiante 3.	No aplica.
Estudiante 4.	El estudiante aplica la propiedad de una recta perpendicular; sus ángulos miden 90°, complementa cada uno de los ángulos de acuerdo a esta propiedad inicial y por último utiliza la propiedad de un triángulo isósceles; los ángulos de la base son iguales. Indica que la solución es 5°.
Estudiante 5.	Realiza mismo procedimiento del estudiante 4.
Estudiante 6.	Realiza mismo procedimiento del estudiante 4.
Estudiante 7.	Indica que los ángulos BPC mide 120°, ABP mide 50°, PBC mide 10° y PBC mide 10°.
Estudiante 8.	No aplica.
Estudiante 9.	Realiza mismo procedimiento del estudiante 4.
Estudiante 10.	No realiza ninguna operación. Indica que el resultado es 110°
Estudiante 11.	No aplica.
Estudiante 12.	No aplica.
Estudiante 13.	No aplica.
Estudiante 14.	No realiza ningún tipo de procedimiento, señala que el ángulo PBC mide 10°
Estudiante 15.	No aplica.

7. El diámetro AB del círculo de la figura mide 10 cm. y todos los rectángulos pequeños son iguales.

¿Cuál es el perímetro de la figura sombreada?



Respuesta esperada: Al girar el diámetro AB, como se observa en la figura, se evidencia que pasa por cuatro diagonales de los rectángulos, es decir; dividiéndolo en cuatro partes iguales de 2,5 cm. Por tanto, todos los rectángulos son iguales y sus diagonales también.

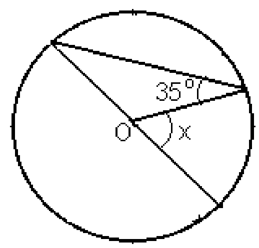
$$8 \times 2.5 = 20cm$$

En la siguiente tabla se muestra la solución de los 15 estudiantes:

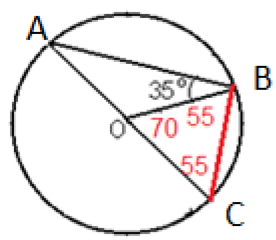
Estudiante	**Respuesta**
Estudiante 1.	No aplica.
Estudiante 2.	No realiza ningún procedimiento y menciona que el perímetro es igual a 8 cm.
Estudiante 3.	Señala que 8 cm es el total de lados cortos y 12 cm es el total de lados largos del rectángulo, por tanto al sumar estos dos valores es igual a 20 cm.
Estudiante 4.	El estudiante menciona que cada diagonal de los rectángulos mide 3,5 cm, al multiplicarlo por la cantidad de diagonales; en total son 8, deduce que la solución es 28 cm.
Estudiante 5.	El estudiante indica que cada diagonal de los rectángulos mide 3 cm, al multiplicarlo por la cantidad de diagonales; en total son 8, deduce que la solución es 24 cm.
Estudiante 6.	"Perímetro del área sombreada, p= (8,025)+(2,05)= 3"
Estudiante 7.	El estudiante toma la medida del diámetro que es igual a 10 cm, lo multiplica por cuatro y luego lo divide entre dos para deducir que el resultado es igual a 20 cm.
Estudiante 8.	No realiza ningún procedimiento e indica que el resultado es igual a 37,5 cm.
Estudiante 9.	El estudiante señala que la diagonal de cada rectángulo es igual a 5 cm, por tanto al sumar la cantidad de diagonales el resultado final es 60 cm.
Estudiante 10.	No aplica.
Estudiante 11.	No aplica.
Estudiante 12.	No aplica.

Estudiante 13.	No aplica.
Estudiante 14.	No aplica
Estudiante 15.	No aplica.

8. Se tiene el siguiente círculo donde O es el centro ¿Cuánto mide el ángulo x de la figura adjunta?



Respuesta esperada: Los radios AO, OB, OC, son iguales. Por lo tanto, al trazar una cuerda desde B hasta C, se forma un triángulo isósceles y cumple con tener dos ángulos iguales.

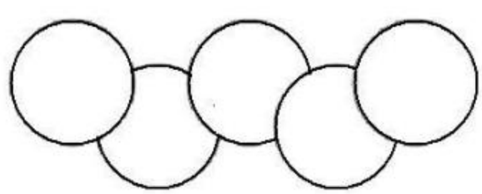


A continuación, se presenta los resultados de cada uno de los estudiantes:

Estudiante	**Respuesta**
Estudiante 1.	No realiza ningún procedimiento, señala que el resultado es 60°.
Estudiante 2.	El estudiante reconoce que el radio de una circunferencia siempre será la misma en cualquier lugar donde esté ubicado, por tanto, observa que hay un triángulo isósceles; los dos ángulos de la base son iguales, después usa la propiedad de un ángulo suplementario; donde dos o más ángulos al sumarlos es igual a 180°, es decir que el ángulo x es igual a 70°.

Estudiante 3.	El estudiante traza una recta perpendicular desde el punto O hasta la base del triángulo, posterior a esto, establece que los ángulos son igual a 90° y comienza a complementar ángulos internos de un triángulo rectángulo, por lo tanto al final emplea la propiedad de un ángulo suplementario e indica que el ángulo x mide 70°
Estudiante 4.	El estudiante señala que necesita el uso del transportador para resolver el punto.
Estudiante 5.	Realiza mismo procedimiento del estudiante 2.
Estudiante 6.	Realiza mismo procedimiento del estudiante 2.
Estudiante 7.	No realiza ningún procedimiento y menciona que el resultado es 60°.
Estudiante 8.	No aplica.
Estudiante 9.	No realiza ningún procedimiento y menciona que el resultado es igual a 90°.
Estudiante 10.	No realiza ningún procedimiento y menciona que el resultado es igual a 90°.
Estudiante 11.	Realiza mismo procedimiento del punto 3.
Estudiante 12.	Realiza mismo procedimiento del estudiante 2.
Estudiante 13.	No aplica.
Estudiante 14.	El estudiante traza una recta para poder complementar un triángulo rectángulo, para ello conoce que uno de sus ángulos mide 90°, por tanto, complementa el ángulo con 55° y posterior a esto se percata que los radios son iguales y cumplen con la condición de ser un triángulo isósceles, así que los dos ángulos de la base miden 55° y el valor del ángulo x es igual a 70°.
Estudiante 15.	No aplica.

9. El área de cada círculo de la figura es 1 cm^2. El área común a dos círculos superpuestos es $\left(\frac{1}{8}\right)$ cm^2. ¿Cuál es el área de la región cubierta por los cinco círculos?



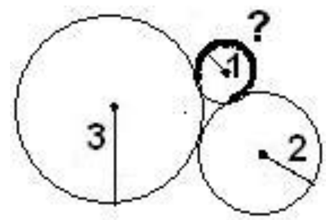
Respuesta esperada: 5 cm^2-(1/2) cm^2=4,5 cm^2.

A continuación, se hace una descripción de las soluciones por cada estudiante:

Estudiante	**Respuesta**
Estudiante 1.	No aplica.
Estudiante 2.	Realiza una resta entre 5 cm^2 y ½ cm^2, posterior a esto indica que la respuesta es 4,5 cm^2.
Estudiante 3.	El estudiante toma el valor 1/8 cm^2 y lo multiplica por la cantidad de regiones superpuestas; en este caso en total son 4. Por tanto, deduce que el resultado es ½ cm^2.
Estudiante 4.	El estudiante toma 1/8 cm^2, lo suma con 4 y después lo multiplica por la cantidad de regiones superpuestas; en este caso en total son 4. Por tanto, deduce que el resultado es 9/2 cm^2.
Estudiante 5.	El estudiante suma cuatro veces 1/8 cm^2 para obtener el resultado de ½ cm^2, posterior a esto resta este valor a 5 y obtiene como resultado 9/2 cm^2.
Estudiante 6.	El estudiante suma cuatro veces el 1/8 cm^2, para poder concluir que el resultado es igual a ½ cm^2.
Estudiante 7.	Realiza mismo procedimiento del estudiante 6.
Estudiante 8.	No aplica.
Estudiante 9.	Realiza mismo procedimiento del estudiante 6.
Estudiante 10.	No aplica.
Estudiante 11.	El estudiante toma los valores de 2 cm^2 y lo suma con 3/8 cm^2 para concluir que la solución es 19/8 cm^2.
Estudiante 12.	No aplica.
Estudiante 13.	No aplica.
Estudiante 14.	El estudiante opera el número 3 con el valor del área sombreada de dos círculos superpuestos que equivale a 1/8 cm^2 por tanto deduce que la respuesta es 3/8 cm^2.

Estudiante 15.	El estudiante toma 1/8 cm^2 y lo multiplica por la cantidad de regiones superpuestas; en este caso, en total son 4. Por tanto, deduce que el resultado es ½ cm^2.

10. En la figura se ven tres círculos de radios 1, 2 y 3 respectivamente. ¿Cuál es la longitud del arco señalado con trazo grueso?



Respuesta esperada: La solución se basa en observar que el triángulo cuyos vértices son los centros del triángulo tiene lados 3,4 y 5 que constituyen una terna pitagórica. Luego el menor ángulo en el centro en el círculo de radio 1 subtendido por el arco limitado por los puntos de tangencia con los otros dos círculos es recto. De allí que el ángulo que subtiende el arco pintado en trazo grueso es 270. Luego basta aplicar la fórmula o usar un argumento de proporcionalidad:

$$\frac{2\pi \cdot 1 \cdot 270°}{360°} = \frac{3\pi}{2}$$

A continuación, se hace una descripción de las soluciones indicadas por cada uno de los estudiantes:

Estudiante	Respuesta
Estudiante 1.	No realiza ningún procedimiento e indica que el resultado es 103°
Estudiante 2.	No aplica.
Estudiante 3.	El estudiante emplea la siguiente formula $360 \times 270 \times 1 \div 360 = 270$.
Estudiante 4.	No aplica.
Estudiante 5.	No aplica.

Estudiante 6.	No aplica.
Estudiante 7.	El estudiante señala que la longitud de la circunferencia es igual a 6,28 cm, por tanto realiza la siguiente operación 6,28x270/360= 4,71 cm.
Estudiante 8.	El estudiante emplea la fórmula del área de la circunferencia para poder hallar la solución. No determina la solución.
Estudiante 9.	El estudiante divide en partes iguales la circunferencia identificando que el ángulo formado por el arco es igual a 270°, al emplear la formular para hallar la longitud de un arco determina que el resultado es igual a $\frac{3\pi}{2}$.
Estudiante 10.	Realiza mismo procedimiento del estudiante 9.
Estudiante 11.	No aplica.
Estudiante 12.	No aplica.
Estudiante 13.	No aplica.
Estudiante 14.	El estudiante señala que la respuesta es 2π, no realiza ningún procedimiento.
Estudiante 15.	Realiza mismo procedimiento del estudiante 9.

Conceptos matemáticos involucrados: Los conceptos matemáticos involucrados fueron los siguientes:

- Para el primer problema el concepto manejado es medición de una longitud.
- Para el segundo problema el concepto manejado es perímetro en una figura rectangular en diferentes contextos.
- Para el tercer problema los conceptos manejados son área de dos figuras superpuestas y propiedades de un cuadrado y rectángulo.
- Para el cuarto problema los conceptos manejados son área y propiedades del triángulo y del cuadrado.
- Para el quinto problema los conceptos manejados son propiedades del triángulo, cuadrado, diagonal y ángulos.

- Para el sexto problema los conceptos manejados son propiedades del triángulo isósceles, recta perpendicular y propiedades de los ángulos.
- Para el séptimo problema los conceptos manejados son las propiedades del círculo, rectángulo y perímetro de una figura.
- Para el octavo problema los conceptos manejados son las propiedades de un círculo, propiedades de los triángulos isósceles y rectángulo y propiedades de los ángulos.
- Para el noveno problema los conceptos manejados son área de círculos.
- Para el décimo problema los conceptos manejados son propiedades de los círculos y las circunferencias.

Dificultades: A pesar que los problemas presentados a los estudiantes causaron una gran curiosidad, algunos de los estudiantes no recordaban cómo aplicar los conceptos básicos de geometría elemental en los problemas.

También se les presentó dificultad en comprender las preguntas, puesto que para ellos algunas palabras no las reconocían en su lenguaje o no conocían ciertos términos matemáticos. En segunda instancia los estudiantes estuvieron durante toda la prueba generando preguntas o inquietudes de comprensión lectora al docente, algunos afirmaban que necesitaban más datos para poder solucionar el problema mientras que otros preguntaban por los conceptos básicos para implementarlos.

Conclusión: Los problemas del Canguro Matemático generaron en los estudiantes interés propio de poder solucionarlos, en primera instancia porque es poco común trabajar con este tipo de problemas especialmente en el aula, en segunda instancia los estudiantes estuvieron en toda la prueba concentrados tratando de recordar los conceptos básicos de geometría para poder solucionar los problemas y también tratando de proponer estrategias de solución a partir de lo que habían comprendido en el problema, sin embargo presentaron dificultad en emplear las propiedades básicas de la geometría elemental para los problemas del Canguro Matemático.

4.2. Desarrollo de la actividad 1: Pasos de resolución de problemas con problemas del Canguro Matemático.

Objetivo: Emplear los pasos de resolución de problemas de Polya en los problemas del Canguro Matemático.

Descripción de la actividad: La primera actividad se desarrolló con 15 estudiantes de grado octavo. Se presentaron tres problemas del Canguro Matemático a los estudiantes en los que se involucran temas de geometría elemental. El docente en todo momento estuvo dirigiendo la actividad que se llevó a cabo correspondiente a los tres tiempos. En cada problema que iban desarrollando los estudiantes, procedían a realizar cada uno de los pasos de Polya que se les iba indicando para poder resolver el problema, para ello se hizo entrega de la guía a desarrollar, en la cual cada problema indica cada paso en términos claros para el estudiante.

Los estudiantes estuvieron muy atentos y participativos durante el desarrollo de toda la actividad la cual tuvo duración de 1 hora y 30 minutos para su realización.

Para el primer problema sobre propiedades de los triángulos y ángulos, el docente dirigió, en el tablero, la resolución del problema, recordando al estudiante que se deben implementar los cuatro pasos de Polya como una guía de solución del problema. En primera instancia el docente solicitó a los estudiantes replantear el problema en sus propias palabras. Sólo dos estudiantes dieron sugerencias respecto al primero paso. En segunda instancia el docente solicitó a los estudiantes generar una lista de datos que permitieran llegar a la solución. Para ello, la mayoría de los estudiantes dieron un aporte referente a los datos del problema. En tercera instancia el docente solicitó a los estudiantes solucionar el problema con la recolección de los datos pertinentes. En este caso los estudiantes estuvieron muy participativos y todos dieron un aporte de acuerdo a los datos que se habían mencionado anteriormente y la aplicación de las propiedades para así concluir con el desarrollo del problema. Y como última instancia el docente solicita a los estudiantes verificar la solución, empleando en este caso, el docente, otro tipo de procedimiento o estrategia de solución para verificar que el resultado fuera coherente con el resultado anterior.

Para el segundo punto asociado con longitud en una figura geométrica, los estudiantes lo desarrollaron en pequeños equipos de trabajo, con el propósito de poder implementar cada uno de los pasos de Polya en este nuevo problema. La idea era intercambiar ideas y sugerencias entre los estudiantes para poder comprender y desglosar el procedimiento que realizan al resolver un problema.

Para el tercer punto asociado con propiedades de los círculos, los estudiantes deben desarrollar el problema individualmente, con el propósito de identificar si los estudiantes estaban aplicando efectivamente los pasos de resolución de problemas de Polya, siendo la idea que adopten este tipo de estrategias en su proceso de aprendizaje para la resolución de problemas.

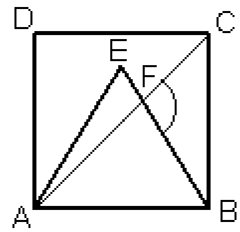
Soluciones generadas por los estudiantes:

Es preciso hacer notar que cada uno de los problemas del Canguro Matemático planteados generó gran interés en los estudiantes, que era lo que se pretendía inicialmente en la actividad. Esto llevó a que se generara un ambiente comunicador donde el diálogo cumplió una de sus funciones la de poder intercambiar ideas y argumentos.

A medida que se seguían los pasos de Polya y se mostraban los problemas en términos comprensibles para el estudiante, los argumentos que daban ayudaban a comprender el problema.

Problema:

1. En el interior de un cuadrado ABCD se construye el triángulo equilátero ABE y la diagonal AC corta a BE en F. ¿Cuál es la medida del ángulo $\angle$BFC?[51]



Así por ejemplo para el primer punto los estudiantes de grado octavo realizaron los siguientes aportes para cada uno de los pasos de Polya:

En comprender el problema; puedes replantear el problema con tus propias palabras:

- ¿Cuál es la medida del ángulo BFC, si tenemos un triángulo equilátero y una diagonal en el cuadrado ABCD?
- Sí tenemos un cuadrado ABCD y una diagonal que pasa por AC, pero dentro de ella hay un triángulo equilátero. ¿Cuál puede ser la medida de ángulo BFC?
- Sí tenemos un cuadrado ABCD y la diagonal pasa por los puntos AC este divide el ángulo en dos partes iguales y el ángulo B del triángulo mide 60° ¿cuál es la medida del ángulo BFC?
- Sí el ángulo C mide 90° y está divido en dos partes iguales, el ángulo B del triángulo mide 60°, ¿cuánto mide el ángulo BFC?

Elaborar un plan; identifica cuál es la pregunta que te están haciendo y escribe una lista de datos que te favorezcan en la solución:

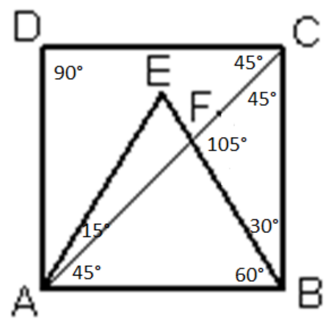
- Triángulo equilátero, diagonal y un cuadrado.

[51] Canguro Matemático. Prueba 2004. Nivel 2, ejercicio 28

- Triángulo equilátero sus ángulos miden 60°, un cuadrado sus ángulos miden 90°, una diagonal divide los ángulos del cuadrado en dos partes iguales.

Ejecutar un plan; solucionar el problema:

- Una de las propiedades del triángulo equilátero es que cada ángulo interno mide 60° y la diagonal en un cuadrado divide en dos partes iguales los ángulos en sus vértices, por tanto (ver figura) la respuesta es 105°



Examinar la solución obtenida; la respuesta satisface lo establecido en el problema. Verificar:

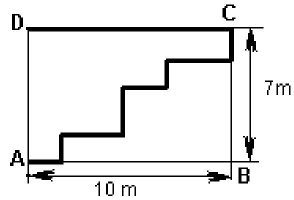
- Con ayuda del docente se hizo la verificación para la solución del problema.

Para el punto que pide si se *puede construir un ángulo de 75°.* Los estudiantes generaron varios aportes para la solución, los cuales son:

- Utilizar un transportador.
- Dividir el ángulo de 90° en dos ángulos de 45° y posteriormente esos dos ángulos dividirlo en tres partes iguales de tal forma que queden seis ángulos de 15° cada uno.
- Dividir el ángulo de 90° en tres ángulos de 30° grados, después cada uno de ellos dividirlo en ángulos de 15°.

Problema:

2. Un rectángulo ABCD tiene sus lados de longitudes 10 m y 7 m. Un caracol va desde A hasta D siguiendo el camino marcado con trazo grueso como se muestra en la figura. ¿Cuál es la longitud que recorre el caracol?[52]



Para el segundo problema, los estudiantes se organizaban en grupos de tres personas para desarrollar cada uno de los pasos de Polya de acuerdo a las indicaciones que se dieron en el primer punto. En este caso los estudiantes dieron las siguientes sugerencias:

En comprender el problema: puedes replantear el problema con tus propias palabras:

- Sí el caracol comienza el recorrido desde el vértice A hasta el vértice C ¿cuál es la distancia en total que recorre?
- El caracol tiene que recorrer del A hasta C siguiendo el camino marcado. Teniendo en cuenta que el rectángulo ABCD tiene longitudes de 10m por 7 m ¿Cuál fue el recorrido del caracol?

Elaborar un plan; identifica cuál es la pregunta que te están haciendo y escribe una lista de datos que te favorezcan en la solución:

- Las medidas del rectángulo son 10 m de ancho y 7 m de alto.
- Las medidas de la longitud gruesa coinciden con un lado del rectángulo.

Ejecutar el plan; solucionar el problema:

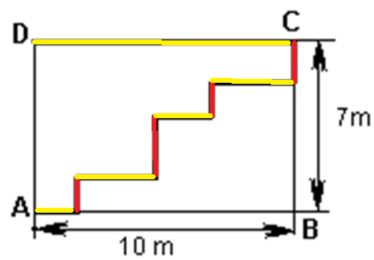
- Al sumar los tres lados, 10 m, 10 m y 7 m es igual a 27 m.

[52] Canguro Matemático. Prueba 2005. Nivel 2, ejercicio 1

- Las longitudes que se ven en la figura son trozos similares a la longitud de los lados del rectángulo, por tanto, la respuesta es 27.

Examinar la solución obtenida; la respuesta satisface lo establecido en el problema. Verificar:

- Para ilustrar la imagen, el color amarillo representa la longitud de los lados AB y DC y el color rojo representa la longitud de los lados AD y BC. Sabemos que el rectángulo cumple con la propiedad de que dos de sus lados son iguales y los otros dos lados también son iguales entre sí; por tanto, se cumple que AD=BC y AB=DC. Observamos en la figura que el lado AB= 10m y BC= 7m, así qué (ver figura) la respuesta es 27m.



Los estudiantes generaron varios aportes, por ejemplo, el siguiente: nótese que no es el caso simétrico, ya que hay un trozo donde se retrocede, haciendo imposible calcular la distancia en este caso sin proporcionar información acerca de cuanto retrocedió.

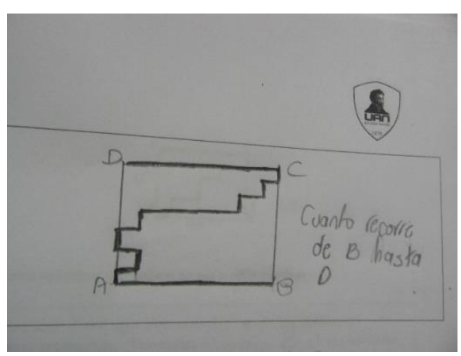
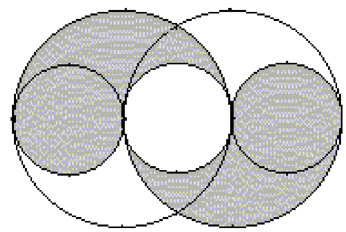


Figura 4. Planteamiento propuesto por un estudiante.

Problema:

3. En la figura, los círculos pequeños tienen radio 1 y los grandes tienen radio 2. ¿Cuál es el área de la parte gris?[53]



Para el tercer problema, los estudiantes debían solucionarlo individualmente, para ello también se les solicitó emplear cada uno de los pasos de Polya para poder hallar dicha solución. A continuación, se observa cada uno de los aportes que generaron los estudiantes:

En comprender el problema; puedes replantear el problema con tus propias palabras:

- Si en la figura los círculos pequeños tienen 1 de radio y los grandes 2 ¿Cuál es el área de color gris?
- Tenemos que hallar el área de la parte gris de los círculos, teniendo en cuenta que los círculos pequeños tienen radio 1 y los grandes tienen radio 2. ¿Cuánto mide el área de la parte gris?

Elaborar un plan; identifica cuál es la pregunta que te están haciendo y escribe una lista de datos que te permitan hallar la solución:

- Los dos círculos grandes tienen radio 2.
- Los dos círculos pequeños tienen radio 1.

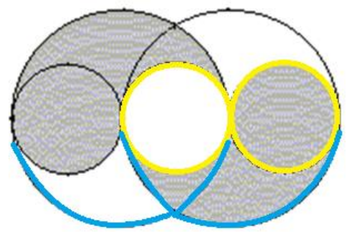
Ejecutar un plan; solucionar el problema:

- Al identificar la cantidad de regiones sombreadas en la figura, completan un círculo grande.

[53] Canguro Matemático. Prueba 2001. Nivel 2, ejercicio 24

Examinar la solución obtenida; la respuesta satisface lo establecido en el problema. Verificar:

- Sabemos que los círculos pequeños tienen radio 1 y los grandes tiene radio 2. El objetivo del problema es hallar el área sombreada de la figura, por tanto, podemos moverlas de un lado a otro, de tal forma que podemos completar una figura que sea reconocida por nosotros. (ver la figura). Al mover las partes sombreadas (amarillo al amarillo y azul al azul) podemos observar que completan un círculo de los grandes que tiene radio 2, por tanto aplicando la formula su área es $r^2\pi = 4\pi$.



Los estudiantes generaron varios aportes, como, por ejemplo:

- ¿Cuál es el área de la región no sombreada?

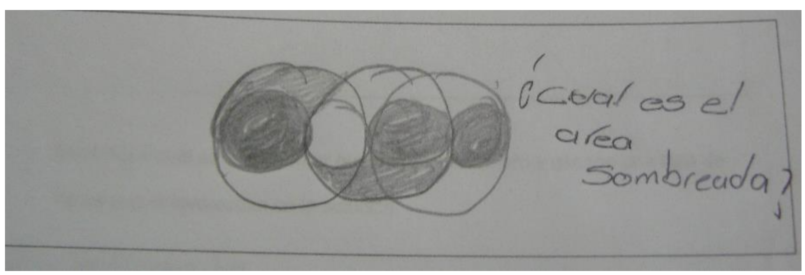


Figura 5. Planteamiento propuesto por un estudiante.

Conceptos involucrados: Concepto de área y perímetro, propiedades de cuadrado, rectángulo, triángulo equilátero y círculos, suma interna de ángulo en un triángulo y ángulos opuestos por el vértice.

Dificultades: Los estudiantes no reconocieron algunos conceptos básicos que se utilizan en geometría elemental, para ello se hace intervención por parte del docente en las actividades a desarrollar a fin de complementar los conocimientos previos que ellos traen a fin de resolver el problema.

Conclusión: La actividad fue de gran motivación para los estudiantes, algunos de ellos expresaron que ahora comprenden como poder abordar un problema con los ítems que se señalaron anteriormente.

4.3. Desarrollo de la actividad 2: Calculando perímetros.

Objetivo: Hallar en diferentes figuras geométricas planas y en distintas situaciones el perímetro correspondiente.

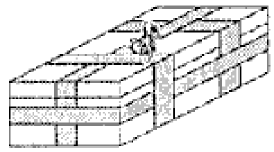
Descripción de la actividad: Se hace entrega a cada estudiante la guía con siete problemas del Canguro Matemático, en las cuales el concepto de perímetro se encuentra involucrado junto con la implementación de otras propiedades básicas, las cuales son: propiedades de los cuadrados, rectángulos, triángulos equiláteros y círculos.

Para esta actividad se entregaron unos problemas que fueran de gran manera llamativos para los estudiantes, y siguieran utilizando las propiedades, ideas o sugerencias de solución en los siguientes problemas.

La guía a desarrollar se realizaba mediante las tres fases de trabajo: los dos primeros puntos se trabajan con el docente, el cuarto, quinto y sexto punto en pequeños grupos de tres personas y el séptimo punto individual. A continuación, se describe cada uno de los problemas, la solución esperada y la solución generada por los estudiantes:

Problema:

1. La caja del regalo tiene dimensiones 10 cm x 10 cm x 30 cm y ha sido atada con la cinta. ¿Cuál es la longitud de la cinta? La longitud de la cinta en el nudo es despreciable.[54]



Solución esperada: Las dimensiones de las cajas son: ancho 10 cm, alto 10 cm y largo 30 cm. Por tanto la longitud de la cinta que se necesita para pasar por todas las caras de la caja son: ancho 6 trozos de 10 cm, alto 6 trozos de 10 cm y largo 4 trozos de 30 cm. Es decir que al multiplicar la cantidad de trozos con la longitud y sumar cada una de estas longitudes tomadas por las dimensiones obtenemos lo siguiente:

$$6(10cm) + 6(10cm) + 4(30cm) = 60cm + 60cm + 120cm = 240cm$$

Soluciones generadas por los estudiantes:

Para el problema 1 los estudiantes con ayuda del docente plantearon todos los datos posibles que fueran explícitos en el problema para así poder llegar a una solución.

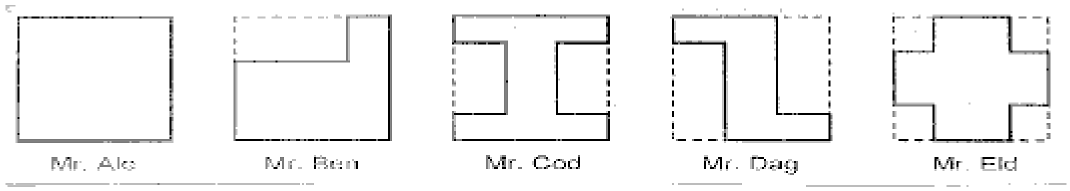
Los aportes que surgieron por parte de ellos fueron los siguientes:

- Las caras de la caja tienen la misma longitud de los trozos que lo rodean.
- Hay en total seis caras de la caja; dos de ellas tienen dos trozos de 10 cm y las restantes dos trozos de 10 cm y uno de 30 cm.
- El nudo es despreciable.

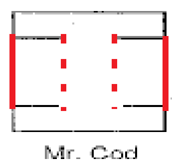
Por tant, al comenzar a desarrollar los cálculos, se observaron que hay doce trozos de longitud 10 cm (ancho y alto) y cuatro trozos de longitud 30 cm, por tanto al operar se obtiene como resultado 240 cm.

[54] Canguro Matemático. Prueba 2000. Nivel 1, ejercicio 8

2. Cinco vecinos tienen parcelas rectangulares iguales. Cada uno de ellos levanta una cerca en su parcela para proteger la parte que tiene flores ¿Cuál de los vecinos necesita la cerca más larga?[55]



Solución esperada: Sabemos que cada una de las parcelas rectangulares se pueden formar "moviendo" algún trozo de sus lados y ésta seguirá teniendo el mismo perímetro. Por tanto, al tomar la figura de Mr Cod y mover los trozos para completar la parcela rectangular, van a sobrar cuatro de ellos, es decir que él necesita una cerca más larga. (Ver imagen)



Soluciones generadas por los estudiantes:

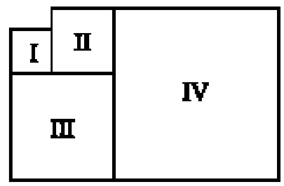
Para el problema 2, los estudiantes utilizaron el concepto de área para poder desarrollar los ejercicios, un estudiante propuso completar cada parcela con cuadrados iguales, de tal forma que la parcela con mayor cantidad de cuadrados era quien requería de mayor cerca.

Para aclarar la duda el docente intervino en medio del problema, dando una ligera explicación sobre una de las ideas del problema. Se les solicitó a los estudiantes relacionar el rectángulo inicial con las demás figuras para que pudieran observar que la parcela rectangular inicial tiene el mismo perímetro en las demás excepto en una de ellas, es decir: si movemos un trozo de la longitud del cuadrado de Mr Ben, Mr Dag y Mr Eld, a los lugares delineados, se estaba volviendo a generar ese mismo rectángulo, mientras

[55] Canguro Matemático. Prueba 2000. Nivel 1, ejercicio 16

que en la parcela de Mr Cod no ocurría los mismo, ya que algunos trozos quedaban en adición a los que se usaban para formar el rectángulo que representa la parcela.

3. Los polígonos I, II, III y IV de la figura son cuadrados. El perímetro del cuadrado I es 16 m y el cuadrado II es 24 m. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado IV?[56]



Solución esperada: Conocemos que una de las propiedades del cuadrado es tener todos sus cuatro lados iguales. Por tanto, sí el perímetro del cuadrado I es igual a 16 m; sus lados miden 4 m, sí el perímetro del cuadrado II es igual a 24 m; cada uno de sus lados mide 6 m. Al sumar los dos lados de la base del cuadrado I y II que conforman un lado del cuadrado III; se obtiene que éste es igual a 10 m. Un lado del cuadrado III y II juntos conforman un lado del cuadrado IV que equivale a 16 m, por lo tanto, el perímetro del cuadrado IV es 64 m.

Soluciones generadas por los estudiantes:

Para el problema 3 los estudiantes con ayuda del docente plantearon todos los datos posibles que fueran explícitos en el problema para así poder llegar a una solución.

Los aportes que surgieron por parte de ellos fueron las siguientes:

- Los lados del cuadrado son iguales.
- La longitud de los lados del cuadrado I es igual a 4 m.
- La longitud de los lados del cuadrado II es igual a 6 m.

[56] Canguro Matemático. Prueba 2002. Nivel 1, ejercicio 11

Después de identificar los datos, los estudiantes observaron que los lados de ciertos cuadrados conforman el lado de un cuadrado mayor a ellos, es decir; el lado del cuadrado III está compuesto por un lado del cuadrado I y uno del cuadrado II, por tanto, la longitud de los lados del cuadrado III es igual a 10 m. Por último, realizaron el mismo procedimiento con el cuadrado IV, cuyo lado está conformado por uno de los lados del cuadrado II y uno del cuadrado III.

Así que la longitud de sus lados es igual a 16 m y al sumar todos sus lados el perímetro es igual a 64 m.

Para esta situación las preguntas generadas fueron las siguientes:

- ¿El quinto cuadrado cumple con las condiciones?
- ¿Cuál es el perímetro del décimo cuadrado?
- Si tomamos otros valores del perímetro del cuadrado I y II ¿siguen cumpliéndose las mismas condiciones para los demás cuadrados?

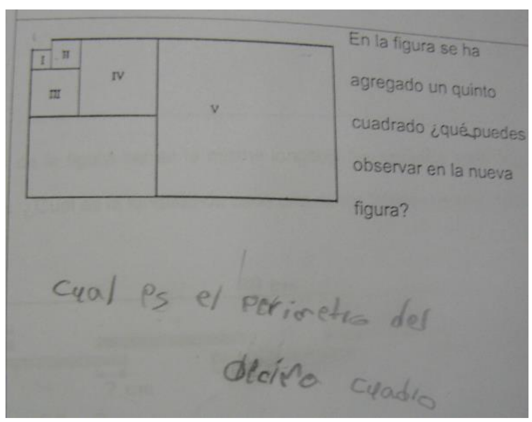
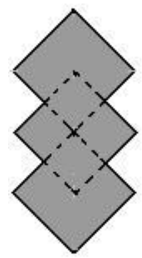


Figura 6. Planteamiento propuesto por un estudiante.

Trabajo en grupos de tres personas:

4. La figura muestra una estructura formada por tres cuadrados iguales, de lado 5 cm. Los vértices superior e inferior del cuadrado central están en los centros de los otros dos cuadrados. ¿Cuánto mide el perímetro de la estructura?[57]



Solución esperada: Una de las propiedades del cuadrado es tener todos sus cuatro lados iguales. Por tanto, cada lado del cuadrado mide 5 cm. Los vértices del cuadrado central se encuentran ubicados en el centro de cada cuadrado, es decir; que los lados pequeños que se observan en la figura son la mitad de un lado del cuadrado. Hay en total cuatro lados de la estructura completos y los demás son la mitad de cada lado del cuadro, es decir; en total son ocho de estos lados. Al operar obtenemos: $4(5cm) + 8(2{,}5cm) = 20cm + 20cm = 40cm.$

Soluciones generadas por los estudiantes:

Para el problema 4, los estudiantes trabajaron en grupos de tres personas. Antes de proponer ideas de solución, ellos sacaron una lista de datos que estaban explícitos en el problema y los que no eran evidentes. Posterior a esto comenzaron a entrar en diálogo para intercambiar ideas o sugerencias de solución al problema.

Los aportes que brindaron fueron los siguientes:

- Los lados de un cuadrado son iguales.

[57] Canguro Matemático. Prueba 2009. Nivel 2, ejercicio 5

- El vértice del cuadrado del medio se encuentra ubicado en la mitad del cuadrado superior e inferior.
- Dos de los lados que se encuentran en la mitad conforman un lado del cuadrado.
- Los lados más pequeños que se observa en la figura miden 2,5 cm.

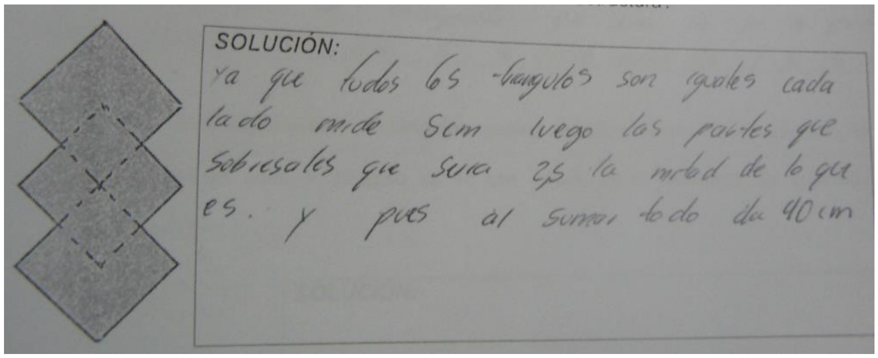


Figura 7. Planteamiento propuesto por un estudiante.

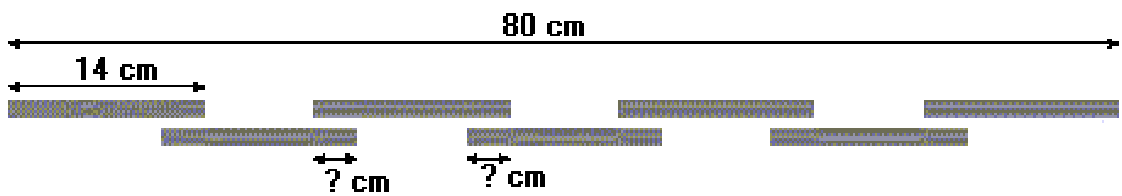
A continuación, se muestra los indicadores alcanzados por cada estudiante:

Indicador	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15
I_1	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_2	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_3	Si	Si	Si	Si	Si	No	Si	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si
I_4	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	Si	Si
I_5	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_6	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_7	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No
I_8	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No	No
I_9	Si	No	Si	Si	No	No	No	Si	No	No	Si	Si	No	No	No

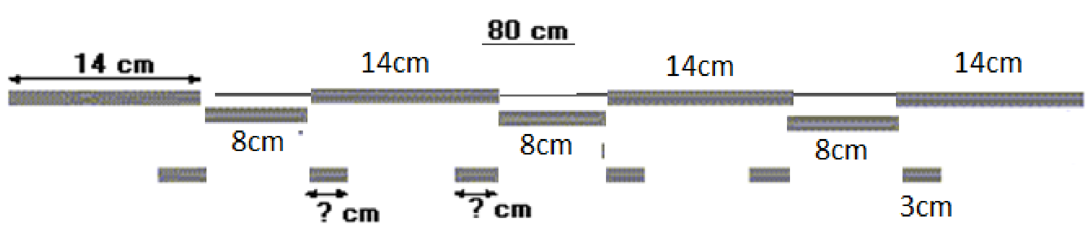
Indicadores \ **Grupos**	**G1**	**G2**	**G3**	**G4**	**G5**

I_1	SI	SI	SI	SI	SI
I_2	SI	SI	SI	SI	SI
I_3	SI	SI	SI	SI	SI
I_4	SI	SI	SI	SI	SI
I_5	SI	SI	SI	SI	SI
I_6	SI	SI	SI	SI	SI

5. Los siete palos de la figura tienen la misma longitud; los espacios entre ellos son también iguales. ¿Cuál es la longitud de cada una de las partes que se señalan con "?’’?[58]



Solución esperada: Cada palo tiene una longitud de 14 cm, en la parte superior se evidencia cuatro palos y en la parte inferior tres palos, al colocar los cuatro palos superiores sobre la longitud superior de 80 cm, ocupan un espacio de 56 cm, es decir; que faltarían 24 cm por completar. En la parte inferior tenemos tres palos con la misma longitud de 14 cm, como falta 24 cm para completar y solo hay tres palos, quiere decir que, para completar las partes faltantes, solo se requiere de 8 cm por cada palo, por tanto sobran 6 cm de cada palo y el signo “?” señala la mitad de esa partes que sobran, en este caso equivalen a 3 cm (ver figura).



Soluciones generadas por los estudiantes:

[58] Canguro Matemático. Prueba 2001. Nivel 1, ejercicio 21

Para el problema 5, los estudiantes de nuevo plantearon los datos explícitos y no evidentes en el problema:

- La longitud el total es 80 cm.
- Los cuatro palos superiores ocupan un espacio de 56 cm.
- Los espacios restantes miden un total de 24 cm.

Posterior a dar los aportes cada grupo generó una solución similar a la que se requería, mientras que otro grupo plasmó la siguiente propuesta de solución:

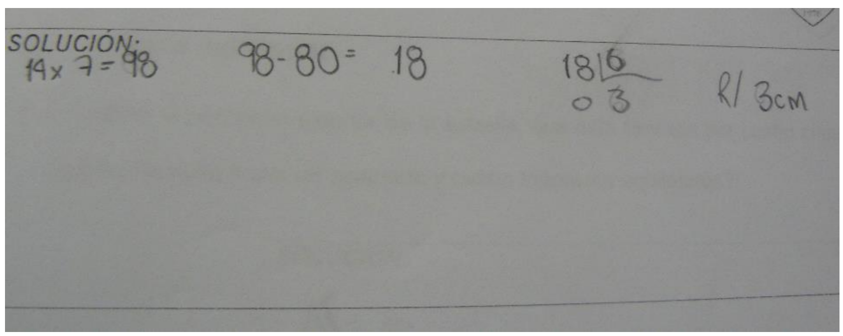


Figura 8. Planteamiento propuesto por un estudiante.

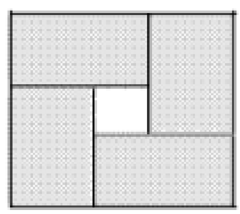
A continuación, se muestra los indicadores alcanzados por los estudiantes:

Indicador	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15
I_1	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_2	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_3	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_4	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_5	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_6	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_7	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si

I_8	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_9	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si

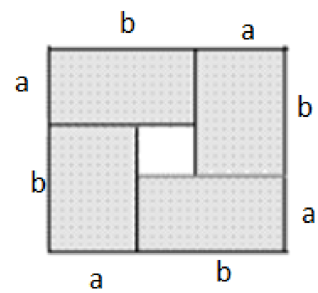
Indicadores \ **Grupos**	**G1**	**G2**	**G3**	**G4**	**G5**
I_1	SI	SI	SI	SI	SI
I_2	SI	SI	SI	SI	SI
I_3	SI	SI	SI	NO	SI
I_4	SI	SI	SI	SI	SI
I_5	SI	SI	SI	NO	SI
I_6	SI	SI	SI	NO	SI

6. La figura muestra cuatro rectángulos iguales situados dentro de un cuadrado. El perímetro de cada rectángulo es 16 cm. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado exterior? [59]



Solución esperada: Se nombra cada uno de los lados del rectángulo, siendo a el alto y b el ancho. Como todos tiene el mismo perímetro, comparten lados congruentes (ver figura). Por tanto, el perímetro de un rectángulo está denotado por la siguiente ecuación: $2a + 2b = 16cm$. Por ejemplo, si se toma $a = 1\ cm\ y\ b = 7\ cm$, se cumple la igualdad; pero si se toma $a = 3\ cm\ y\ b = 5\ cm$, también se cumple la ecuación, y al sumar $a + b = 8\ cm$ con cualquier par de números se cumple la ecuación. Por lo tanto, la figura principal es un cuadrado y sus lados son iguales, es decir, que su perímetro es de 32 *cm.*

[59] Canguro Matemático. Prueba 2016. Nivel 3, ejercicio 11



Soluciones generadas por los estudiantes:

Para el problema 6, surgieron los siguientes datos por parte de los estudiantes para poder solucionar el problema:

- El perímetro de un rectángulo es $2a + 2b = 16\ cm.$
- La pareja de números enteros que cumplen la condición son: (1,7), (2,6) y (3,5).
- Todos los rectángulos tienen el mismo perímetro.

La solución que realizaron los estudiantes fue similares a la solución esperada.

A continuación, se muestra una tabla con los indicadores alcanzados por los estudiantes:

Indicador	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15
I_1	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_2	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_3	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_4	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_5	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_6	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_7	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_8	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si

I_9	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si

Indicadores \ **Grupos**	**G1**	**G2**	**G3**	**G4**	**G5**
I_1	SI	SI	SI	SI	SI
I_2	SI	SI	SI	SI	SI
I_3	SI	SI	SI	SI	SI
I_4	SI	SI	SI	SI	SI
I_5	SI	SI	SI	SI	SI
I_6	SI	SI	SI	SI	SI

Para esta situación las preguntas que surgieron por parte de los estudiantes fueron las siguientes:

- ¿Se puede utilizar la misma fórmula para solucionar el problema?
- ¿Funcionaría si se trabaja con los mismos valores?
- ¿cuál es el perímetro de la nueva figura?
- Sí aumentamos la figura ¿qué pasaría con el perímetro?

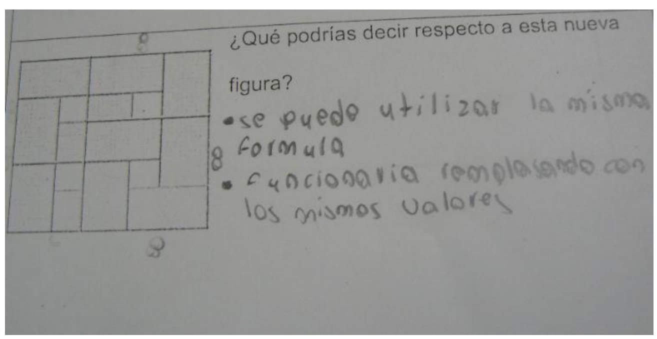
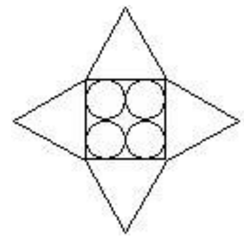


Figura 9. Planteamiento propuesto por un estudiante.

7. ¿Cuál es el perímetro exterior de la estrella, que está formada por cuatro círculos iguales de radio 5 cm, un cuadrado y cuatro triángulos equiláteros?[60]

[60] Canguro Matemático. Prueba 2006. Nivel 1, ejercicio 11



Solución esperada: Notamos que el radio de cada círculo es igual a 5 *cm* y su diámetro es igual a 10 cm; si observamos la figura la suma de los diámetros de dos círculos equivalen a un lado del cuadrado; es decir, cada lado del cuadrado mide 20 *cm* y los triángulos que conforman la estrella son equiláteros (todos sus lados son iguales) lo que quiere decir que cada lado del triángulo mide 20 *cm.* Por tanto, la respuesta es $8(20cm) = 160\ cm$.

Soluciones generadas por los estudiantes:

Para el problema 7, surgieron los siguientes datos por parte de los estudiantes para poder desarrollar el problema:

- Los triángulos equiláteros tienen sus lados iguales.
- El cuadrado tiene sus lados iguales.
- El diámetro es dos veces el radio.
- El diámetro de un círculo es la mitad de un lado del cuadrado.
- El diámetro de un círculo es 10 cm, por tanto, el lado del cuadrado es 20 cm.

Se solicitó a uno de los estudiantes pasar y dar a conocer la solución del problema con el fin de que los estudiantes pudieran identificar el procedimiento que realizó uno de sus compañeros y así poder comprenderlo.

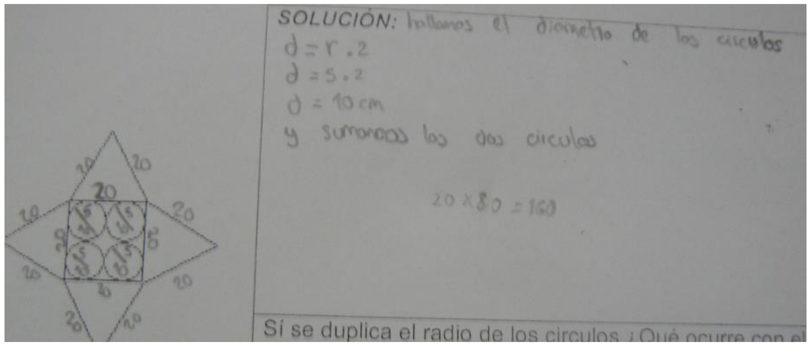


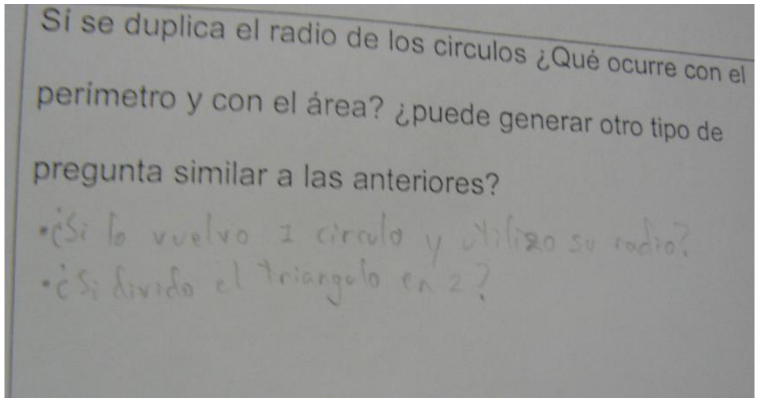
Figura 10. Planteamiento propuesto por un estudiante.

A continuación, se muestra los indicadores alcanzados por los estudiantes:

Indicador	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15
I_1	Si	Si	No	No	Si	Si	Si	No	Si	No	Si	Si	No	No	Si
I_2	Si	Si	No	No	Si	Si	Si	No	Si	No	Si	Si	No	No	Si
I_3	Si	Si	No	No	Si	Si	Si	No	Si	No	Si	Si	No	No	Si
I_4	Si	Si	No	No	Si	Si	Si	No	Si	No	Si	Si	No	No	Si
I_5	Si	Si	No	No	Si	Si	Si	No	Si	No	Si	Si	No	No	Si
I_6	Si	Si	No	No	Si	Si	Si	No	Si	No	Si	Si	No	No	Si
I_7	Si	Si	No	No	Si	Si	Si	No	Si	No	Si	Si	No	No	Si
I_8	Si	Si	No	No	Si	Si	Si	No	Si	No	Si	Si	No	No	Si
I_9	Si	Si	No	No	Si	Si	Si	No	Si	No	Si	Si	No	No	Si

Para esta situación las preguntas generadas fueron las siguientes:

- Si duplicáramos la figura ¿qué pasaría?
- Si divido el triángulo en dos partes iguales ¿qué pasaría?
- Si convierto la figura en un círculo ¿qué pasaría?



Si se duplica el radio de los circulos ¿Qué ocurre con el perímetro y con el área? ¿puede generar otro tipo de pregunta similar a las anteriores?

•¿Si lo vuelvo 1 circulo y utilizo su radio?
•¿Si divido el triangulo en 2?

Figura 11. Planteamiento propuesto por un estudiante.

Conceptos involucrados: Perímetro, propiedades del cuadrado, triángulo equilátero, rectángulo, círculo, diámetro, radio y longitud.

Dificultades: Algunos estudiantes presentan dificultad en relacionar algunos conceptos geométricos en problemas que involucran el álgebra básica.

Para el problema 6 no observaron la figura detalladamente para evidenciar cuáles números satisfacen la fórmula planteada.

Conclusiones: Los estudiantes estuvieron muy participativos en la actividad. Recordaron cada una de las propiedades necesarias en los problemas que no fueran explicitas en el problema, pero son evidentes al analizar la figura.

4.4. Desarrollo de la actividad 3: Calculando áreas.

Objetivo: Hallar en diferentes figuras geométricas planas y en distintas situaciones el área correspondiente.

Descripción de la actividad: Se hace entrega a cada estudiante de una hoja, posteriormente se le solicita al estudiante seguir los siguientes pasos para que identifique por medio de ella el área de un triángulo:

- Trazar un paralelogramo (lo más grande posible).
- Trazar una diagonal.
- Hallar el área del triángulo.

Posterior a esto, el docente se dirige a los estudiantes con las siguientes preguntas: *¿qué puedes concluir con lo que observas?, ¿es posible identificar el área de un triángulo con lo que percibes?* Los estudiantes reconocieron que la fórmula del área de un triángulo se halla relacionándolo con un paralelogramo.

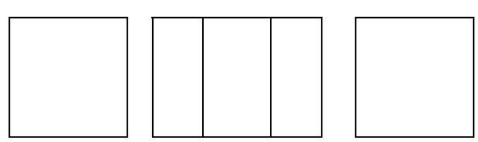
Después se hace entrega a cada estudiante de la guía con siete problemas del Canguro Matemático, las cuales el concepto de área se encuentra involucrado junto con la implementación de otras propiedades básicas, como son: propiedades de los cuadrados, rectángulos y triángulos.

Para esta actividad se entregaron unos problemas que fueran de gran manera llamativos para los estudiantes, de tal forma que siguieran utilizando las propiedades, ideas o sugerencias de solución que implementaron en los problemas anteriores.

La guía a desarrollar se realizaba mediante las tres fases de trabajo: los dos primeros puntos se trabajaron con el docente, el cuarto, quinto y sexto punto en pequeños grupos de tres personas y el séptimo punto individualmente. A continuación, se describe cada uno de los problemas.

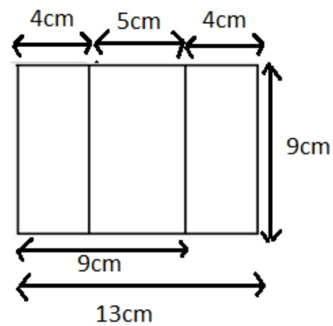
Problema:

1. Dos cuadrados 9 cm. X 9 cm. Se superponen para formar un rectángulo 9 cm x 13cm. Hallar el área de la región superpuesta.[61]



[61] Canguro Matemático. Prueba 2007. Nivel 1, ejercicio 16

Solución esperada: Comprendemos que los lados de los dos cuadrados equivalen a 9 cm, si superponemos una con otra, el ancho entre los dos, es igual a 13cm, es decir; (ver imagen)



Soluciones generadas por los estudiantes:

Para el problema 1 los estudiantes con ayuda del docente plantearon todos los datos posibles que fueran explícitos en el problema para así poder llegar a una solución.

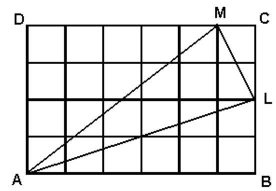
Los aportes que surgieron por parte de ellos fueron las siguientes:

- Nombrar *a* y *b* cada uno de los rectángulos que se observa en la imagen, de tal forma que los dos rectángulos de las esquinas lleven la misma letra.
- La base de *a* y *b* al sumarlos son igual a 9 cm.

Por tanto al comenzar a realizar los cálculos, se observaron los siguiente $a + b + a = 13\ cm\ y\ a + b = 9\ cm$, por tanto al reemplazar a + b en la primera ecuación y despejar la variable, se obtiene que $a = 4\ cm$**.** Es decir, la base total de los rectángulos *a* mide 8 cm y la base del rectángulo *b* es igual a 5 cm. Al emplear la fórmula de área de un rectángulo $b \times h = A,$ el resultado es igual a 45 cm^2.

Problema:

2. En la figura, el rectángulo ABCD está formado por 24 cuadrados, cada uno de ellos de lado 1. ¿Cuál es el área del triángulo ALM?[62]



Respuesta esperada: Observamos que el rectángulo contiene tres triángulos rectángulos, cuyas hipotenusas conforman el triángulo AML. Hallamos el área de cada uno de los triángulos rectángulos y obtenemos lo siguiente: $\Delta DMA = 10, \Delta MLC = 1, \Delta ABL = 6$ y el área del rectángulo es igual a 24, por tanto; al sumar las áreas de los triángulos y restarlo con el área del rectángulo, se obtiene lo siguiente: $24 - (10 + 1 + 6) = 7.$

Respuestas generadas por los estudiantes:

Para el problema 2 los estudiantes con ayuda del docente plantearon todos los datos posibles que fueran explícitos en el problema para así poder llegar a una solución.

Los aportes que surgieron por parte de ellos fueron las siguientes:

- Contar la cantidad de cuadros que están dentro del triángulo.
- Hallar el área de los triángulos ADM, MCY y ABL, el área del rectángulo ABCD y restarle a la suma de las tres áreas de los triángulos.

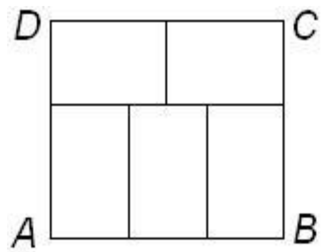
Posteriormente se toma la decisión de resolver el problema por los dos métodos de solución que generaron los estudiantes. Primero se le solicitó a un estudiante pasar al tablero para poder contar la cantidad de cuadrados que componen el triángulo AML, en total hay 7 cuadrados y para hacer su verificación el docente solicita a los estudiantes hallar el área de los triángulos. En este caso las áreas

[62] Canguro Matemático. Prueba 2002. Nivel 2, ejercicio 19

son: triángulo ADM= 10 cm^2, CML= 1 cm^2 y ABL= 6 cm^2, con un total de 17 cm^2, el área del cuadrado ABCD es igual a 24 cm^2, por tanto, al restar podemos determinar que el valor del área de triángulo AML es 7 cm^2.

Problema:

3. El rectángulo *ABCD* se divide en 5 rectángulos iguales, como se indica en la figura. Sí el perímetro de cada uno de ellos es 20 cm. ¿Calcular el área de *ABCD*[63]



Solución esperada: Percatamos que los cinco rectángulos son iguales y el perímetro que representada a cada uno es $2a + 2b = 20cm$, también se observa que $3a = 2b$, es decir que $a\ y\ b$ deben cumplir con las dos condiciones, por lo tanto aplicando método de sustitución en ecuaciones tenemos:

$$2a + 2b = 20$$

$$2a + 3a = 20$$

$$5a = 20$$

$$a = 4\ entonces\ al\ reemplazar\ en\ una\ de\ las\ ecuaciones\ tenemos\ que$$

$$8 + 2b = 20\ \rightarrow 2b = 20 - 8\ \rightarrow b = \frac{12}{2} \rightarrow b = 6$$

Por lo tanto, el área de la figura es 24 cm^2.

Solución generada por los estudiantes:

[63] Canguro Matemático. Prueba 2009. Nivel 2, ejercicio 7

Para el problema 3, los aportes que generaron los estudiantes fueron los siguientes:

- Llamemos el largo a y el ancho b del rectángulo.
- El perímetro de un rectángulo es $2a + 2b = 20\ cm$, por tanto al sacar factor común y despejar, tenemos que $a + b = 10\ cm$.

Para la solución los estudiantes partieron de la ecuación principal del perímetro de los rectángulos, analizaron que valores de a y b satisfacen la segunda condición y observaron que no pueden ser 5, ya que en este caso tendríamos un cuadrado y no un rectángulo. Así que los valores que satisfacen a la ecuación son (1,9), (2,8), (3,7), (4,6). A parte de esto, observaron que hay una condición para poder establecer ¿cuál era el par de números correctos para la solución y es que la longitud del lado DC es 2b y AB es 3a?, por tanto, al emplear esta condición comprobaron que los números que la cumplen son 4 y 6, por lo tanto, los lados del rectángulo ABCD que se muestra en el problema son 12 cm y 10 cm y su área es igual a 120 cm^2. Nótese que los estudiantes asumieron que las longitudes de los lados son números enteros, condición no afirmada en los datos del problema.

Para esta situación las preguntas generadas fueron las siguientes:

- Si trazamos una diagonal desde el vértice B hasta D, ¿cuál es el área de triángulo ABC sabiendo que el perímetro de los rectángulos es 16 cm?
- Si el perímetro de los rectángulos es 30 cm, ¿cuál es el área del rectángulo ABCD?

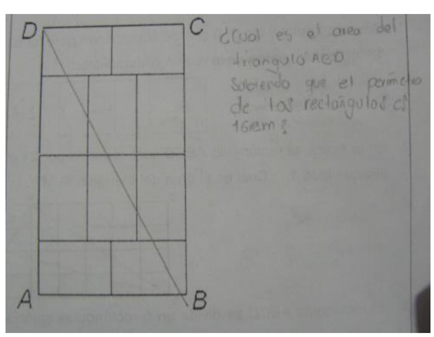
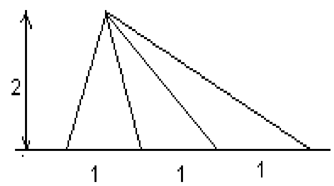


Figura 12. Planteamiento propuesto por un estudiante.

Problema:

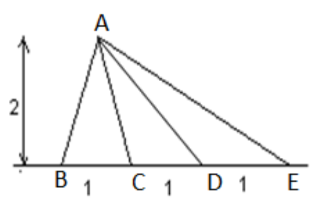
4. ¿Cuál es la suma de las áreas de todos los triángulos que se pueden observar en la figura?[64]



Solución esperada: Los tres triángulos comparten la misma altura, el área de cada uno de ellos es (ver figura):

$$\Delta ABC = 1, \Delta ACD = 1, \Delta ADE = 1, \Delta ABD = 2, \Delta ACE = 2, \Delta ABE = 3$$

1+1+1+2+2+3=10



Soluciones generadas por los estudiantes:

Para el problema 4, los aportes que generaron los estudiantes fueron los siguientes:

- Todos los triángulos tienen igual altura.
- Se observan en total seis triángulos.

Para la solución algunos estudiantes propusieron llamar cada triángulo como: T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 y T_6, para luego hallar las áreas de cada uno. En este caso T_1, T_2 y T_3, tienen la misma base que es 1 y altura 2, por

[64] Canguro Matemático. Prueba 2000. Nivel 2, ejercicio 17

tanto, el área es igual a 1. Para los triángulos T_4 y T_5, su base es 2 y su altura es 2, por ende el área es igual a 2 y para el triángulo T_6, su base es 3 y su altura es 2, el área es 3. Al sumar las áreas de los seis triángulos es igual a 10.

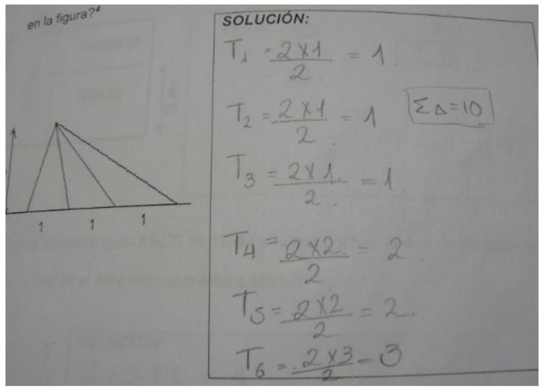


Figura 13. Planteamiento propuesto por un estudiante.

A continuación, se muestra los indicadores alcanzados por los estudiantes.

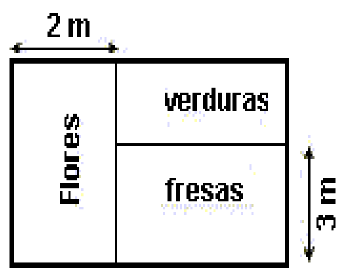
Indicador	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15
I_1	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_2	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_3	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_4	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_5	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_6	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_7	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_8	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_9	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si

Grupos / **Indicadores**	**G1**	**G2**	**G3**	**G4**	**G5**

I_1	SI	SI	SI	SI	SI
I_2	SI	SI	SI	SI	SI
I_3	SI	SI	SI	SI	SI
I_4	SI	SI	SI	SI	SI
I_5	SI	SI	SI	SI	SI
I_6	SI	SI	SI	SI	SI

Problema:

5. En el dibujo se ve el jardín rectangular de la familia López. Tiene un área de 30 m^2 y está dividido en tres partes rectangulares. Un lado de la parte donde se han plantado flores tiene una longitud de 2 m y su área es de 10 m^2, la zona con fresas tiene un lado de longitud 3 m. ¿Qué área tiene la parte donde se han plantado verduras?[65]



Solución esperada: El rectángulo donde se encuentran las flores tiene un lado con longitud 2 m y su área es $10\ m^2$, para hallar el área de un rectángulo esta denotado por $b \times h = 10\ m$, por ende la altura es 5 m. Sabemos que el área del rectángulo mayor es de $30\ m^2$ y esta denotado por $b \times h = 30\ m^2$, es decir; la altura es 5 m y la base es igual a 6 m. Por tanto, las longitudes de los lados del rectángulo donde están ubicada las verduras es de 4 m x 2 m y su área es igual a 8 m.

Soluciones generadas por los estudiantes:

Para el problema 5, los aportes generados por los estudiantes fueron los siguientes:

- El valor de la altura de rectángulo que está sembrado de flores es igual a 5 m.

[65] Canguro Matemático. Prueba 2005. Nivel 1, ejercicio 13

- La altura del jardín rectangular equivale a 5 m y su área es igual a 30 m², por tanto al despejar la variable en la fórmula $b \times 5\ m = 30\ m^2$, la base es igual a 6 m.

Por tanto, al identificar los datos dados en el problema los estudiantes comenzaron a solucionar el problema, una vez que hallaron el valor de la base del jardín rectangular. Reconocieron que la base del rectángulo que contenía a las verduras mide 4 m y su altura es 2 m, por tanto, su área es 8 m².

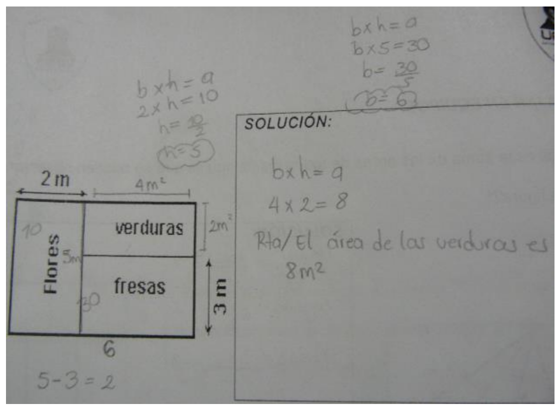


Figura 14. Planteamiento propuesto por un estudiante.

A continuación, se muestra los indicadores alcanzado por los estudiantes:

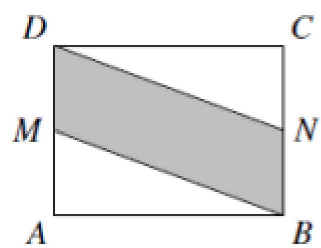
Indicador	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15
I_1	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_2	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_3	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_4	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_5	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_6	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_7	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_8	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si

I_9	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si

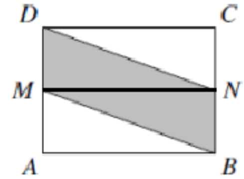
Indicadores / Grupos	G1	G2	G3	G4	G5
I_1	SI	SI	SI	SI	SI
I_2	NO	NO	SI	SI	SI
I_3	NO	NO	SI	SI	SI
I_4	SI	SI	SI	SI	SI
I_5	NO	NO	SI	SI	SI
I_6	NO	NO	SI	SI	SI

Problema:

6. El área del rectángulo ABCD es 10. M y N son puntos medios de los lados AD y BC. ¿Cuál es el área del cuadrilátero MBND?[66]



Solución esperada: El área del rectángulo ABCD es igual a 10, M y N son puntos medios, por tanto, al trazar una recta por estos dos puntos divide al rectángulo en dos partes iguales (ver imagen). Las rectas DN y MB están dividiendo en dos partes iguales a los rectángulos DCMN y ABMN, es decir que son congruentes, y estas áreas son un medio de área en los rectángulos, por tanto, el área del triángulo MND y MNB corresponde a 2,5 y al sumarlos es igual a 5.



[66] Canguro Matemático. Prueba 2014. Nivel 3, ejercicio 4

Soluciones generadas por los estudiantes:

En este punto los estudiantes generaron los siguientes aportes para la solución del problema:

- Si el área del rectángulo es igual a 10, entonces la base puede ser igual a 5 y la altura a 2.
- La longitud de los lados CN, NB, DM y MA es 1 m.
- DN y MB son diagonales que pasan por los rectángulos DCNM y ABNM.

Posteriormente a los aportes brindados por los estudiantes, cada grupo abordo el problema, indicando que las áreas de los rectángulos DCNM y ABNM son igual a 5, y las diagonales dividen en partes iguales el rectángulo y una de estas partes es sombreada por lo tanto corresponde a 2,5 en cada rectángulo y al sumarlos es igual a 5.

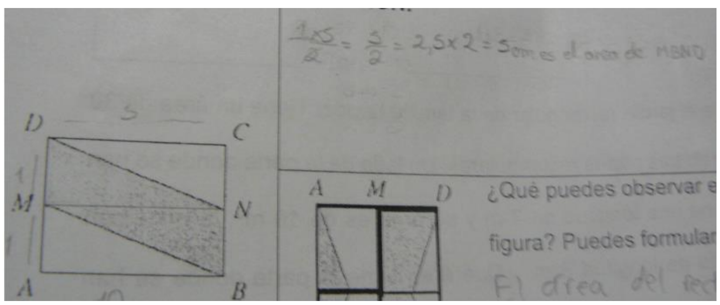


Figura 15. Planteamiento propuesto por un estudiante.

A continuación, se muestra los indicadores alcanzado por los estudiantes:

Indicador	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15
I_1	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_2	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_3	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_4	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_5	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si

I_6	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_7	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_8	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_9	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si

Grupos / **Indicadores**	**G1**	**G2**	**G3**	**G4**	**G5**
I_1	SI	SI	SI	SI	SI
I_2	NO	SI	SI	NO	SI
I_3	NO	SI	SI	NO	SI
I_4	SI	SI	SI	SI	SI
I_5	NO	SI	SI	NO	SI
I_6	NO	SI	SI	NO	SI

Para este problema, los estudiantes platearon las siguientes preguntas de acuerdo a una situación similar:

- ¿Cuál es el área de la región sombreada, sabiendo que el perímetro de los rectángulos pequeños es igual a 20 cm?
- Sí el rectángulo ABCD tiene un área de 20 ¿cuál sería el valor del área sombreada?
- ¿Cuál es valor de las áreas no sombreadas?

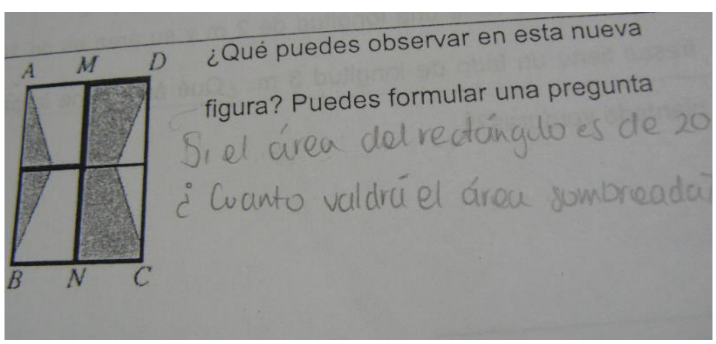
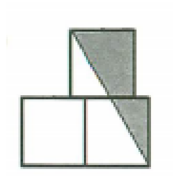


Figura 16. Planteamiento propuesto por un estudiante.

Problema:

7. Cada uno de los lados de los tres cuadrados de la figura adjunta tienen longitud 1 cm. ¿Cuál es el área de la región gris?[67]



Solución esperada: El área de cada uno de los cuadrados es igual a 1, la figura sombreada que se observa en los cuadros, no podemos identificarla para poder hallar su área con una operación, por tanto, sí movemos el área sombreada que está ubicado en la parte superior y la completamos con el cuadrado que está en la parte inferior, podemos observar que completan el cuadrado ya que al mover el área de un lado a otro esta se conserva. Por tanto, el área de la región sombreada es igual a 1.

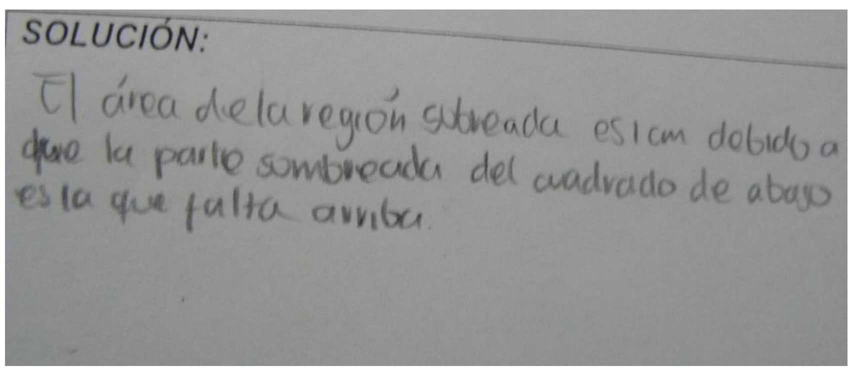


Figura 17. Planteamiento propuesto por un estudiante.

Soluciones generadas por los estudiantes:

Las soluciones generadas por la mayoría de los estudiantes fueron:

- La región sombreada que se encuentra en el rectángulo del cuadrado de abajo, al recortar y pegarlo completa el cuadrado superior.

[67] Canguro Matemático. Prueba 2015. Nivel 3, ejercicio 12

- Otros estudiantes solo colocaron con respuesta 1 cm^2.

La mayoría de los estudiantes dieron con la solución esperada del problema.

A continuación, se muestra los indicadores alcanzado por los estudiantes:

Indicador	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15
I_1	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	Si	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_2	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	Si	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_3	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	Si	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_4	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	Si	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_5	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	Si	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_6	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	Si	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_7	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	Si	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_8	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	Si	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_9	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	Si	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si

Para este apartado, los estudiantes generaron las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el área de la región sombreada?
- Sí duplicáramos la imagen ¿qué pasaría con el área?
- ¿cuál es el área de la región no sombreada?

Conceptos involucrados: Concepto de perímetro, propiedades de los triángulos, rectángulos y cuadrados.

Dificultades: Algunos estudiantes solo se limitan a trabajar con los datos que son explícitos en el problema no son capaces de realizar una construcción auxiliar como ayuda para hallar la solución del problema.

Conclusión: Los problemas sobre área ayudaron a los estudiantes a poder precisar ese concepto y en especial a diferenciarlo del concepto de perímetro. Esto genera un gran interés en los estudiantes en especial porque pueden diferenciar estos dos conceptos en un problema para así poder abordarlo y solucionarlo.

4.5. Actividad 4: ¿Qué tanto sabes de triángulos?

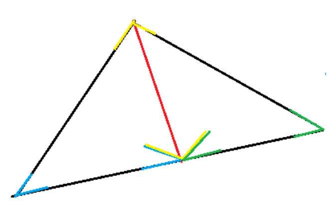
Objetivo: Diferenciar los distintos tipos de triángulos, así como conocer las principales propiedades de sus ángulos y lados.

Descripción de la actividad:

Se hizo una retroalimentación de todos los conceptos a utilizar en la guía. También una actividad para revisar los conceptos referentes a ángulos.

Antes de hacer entrega de la guía a desarrollar, se solicita a los estudiantes sacar una hoja y en ella trazar un triángulo cualquiera, posteriormente se le indica seguir los siguientes pasos:

- Trazar una de las alturas del triángulo.
- Doblar el papel de manera que cada vértice del triángulo coincida en el punto de corte de esa altura con la base correspondiente.
- Doblando los tres vértices los ángulos del triángulo quedarán dispuestos uno a continuación del otro sumando 180°.

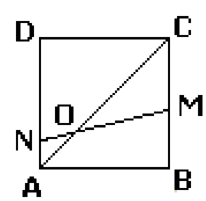


Posteriormente se les hicieron las siguientes preguntas y comentarios a los estudiantes, *¿qué puedes observar?, ¿puedes decirme si la actividad cumple con el objetivo de hallar la suma interna de los ángulos de un triángulo?, compara con tus compañeros los resultados obtenidos.*

Lo que se pretende en esta actividad es identificar los procedimientos y estrategias de solución que realizan los estudiantes en un problema de triángulos, en el cual se requiere involucrar cada una de las propiedades que ellos reconocen y han trabajado en las actividades anteriores, junto con los conceptos de perímetro y área.

Problema:

1. ABCD es un cuadrado y la medida del ángulo ∠OND=60º ¿Cuál es la medida del ángulo ∠COM y ∠CMO?[68]



Solución esperada: Los ángulos internos del cuadrado son igual a 90°y la diagonal divide en dos partes iguales el $\angle DAB$ y $\angle CBA$, es decir; miden 45°. Podemos observar que los ángulos $\angle OND$ y $\angle ONA$ conforman un ángulo suplementario (la suma de estos dos ángulos es igual a 180°), el $\angle OND = 60°$ por tanto el ángulo $\angle ONA = 120°$, la diagonal mencionado anteriormente divide los ángulos en dos partes iguales, por lo tanto el $\angle NAO = 45°$ y por propiedad de suma interna de los ángulos de un triángulos equivalen a 180° es decir que $\angle NOA = 15°$, aplicando las propiedades de ángulos opuestos por los vértices, tenemos que el $\angle NOA = \angle COM$ es decir que el $\angle COM = 15°$ Y $\angle cmo = 120°$.

[68] Canguro Matemático. Prueba 2001. Nivel 3, ejercicio 5

Solución generada por los estudiantes:

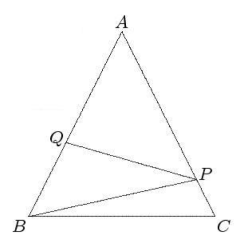
Para el problema 1 los aportes que generaron los estudiantes fueron los siguientes:

- Podemos hallar los valores de los ángulos que se muestran en la figura, para así poder llegar a la solución.
- La línea que pasa por los vértices A y B es una diagonal que divide en partes iguales los ángulos rectos.
- Los ángulos DNO y ONA forman un ángulo suplementario.

La solución que brindaron los estudiantes fue complementar cada uno de los ángulos de acuerdo a los datos que mencionaron anteriormente. Cuando comenzaron a identificar el valor de cada ángulo, posteriormente identificaron los valores de los ángulos internos del triángulo NOA, cuyas medidas eran N= 120°, A=45° y O=15°. Uno de los estudiantes agregó que el triángulo ONA es semejante al triángulo COM ya que compartían dos de sus lados.

Problema:

2. La figura muestra un triángulo isósceles ABC, con AB=AC. Si PQ es perpendicular a AB, el ángulo BPC es 120º y el ángulo ABP es 50º. ¿cuánto mide el ángulo PBC?[69]



Solución esperada: Sabemos que PQ es perpendicular a AB y por tanto los ángulos $\angle AQP\ y\ \angle PQB$ miden 90°. Como el $\angle ABP = 50°$ por propiedad de suma interna de ángulos en el triángulo BPQ,

[69] Canguro Matemático. Prueba 2008. Nivel 5, ejercicio 19

tenemos que $\angle BPQ = 40°$. Luego $\angle BPQ = 40°$, $\angle BPC = 120°$ por lo tanto el $\angle APQ = 20°$. Para el triángulo AQP tenemos que $\angle AQP = 90°$, $\angle APQ = 20°$ es decir que el ángulo $\angle QAP = 70°$ y como estamos hablando de que el triángulo ABC es isósceles (los dos ángulos de la base son iguales) cada ángulo mide 55°, para complementar con el resultado el $\angle QBP = 50°$ es decir que $\angle PBC = 5°$.

Soluciones generadas por los estudiantes:

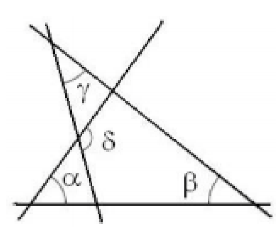
Para el problema dos, los estudiantes dieron los siguientes aportes:

- El triángulo es isósceles, por tanto, los dos ángulos de la base son iguales.
- Complementar cada ángulo interno en el triángulo para poder hallar el ángulo PBC.

Posterior a esto, el docente hizo una aclaración sobre un concepto básico que ellos no reconocieron: dos líneas son perpendiculares cuando se intersectan en un punto formando un ángulo de 90°. Después de la aclaración los estudiantes pudieron continuar con la solución del problema agregando que los ángulos BQP y AQP miden 90°, cuando terminaron de complementar los ángulos internos de los triángulos analizaron que los ángulos del triángulo isósceles miden 70°, 55° y 55°, es decir que el ángulo QBP mide 50° y lo restante equivale a 5°, el valor de la mitad del ángulo PBC.

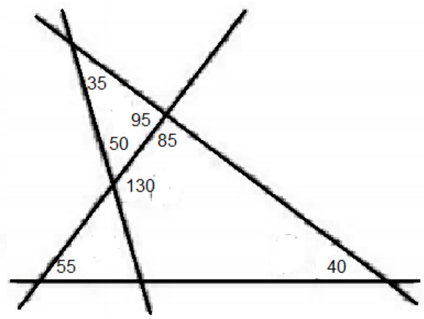
Problema:

3. En la figura, α = 55º, β = 40º y γ = 35º. ¿Cuánto mide δ?[70]



[70] Canguro Matemático. Prueba 2013. Nivel 3, ejercicio 12

Solución esperada: Sabemos que la suma interna de los ángulos de un triángulo es igual a 180°. La idea es utilizar esta propiedad para cada uno de los triángulos que se puede observar en la figura y posteriormente a esto utilizar la propiedad de ángulo suplementario. (Ver figura)



Soluciones generadas por los estudiantes:

Para el punto 3, los estudiantes plasmaron los siguientes aportes:

- Complementar la suma interna de los ángulos de los triángulos que podemos observar.

Después de observar lo anterior, se le solicitó a un estudiante pasar al tablero para poder desarrollar el problema con ayuda de sus compañeros y la intervención del docente. Uno de ellos agrego que en la figura se puede ver que hay ángulos que son suplementarios, esto es su suma es 180°.

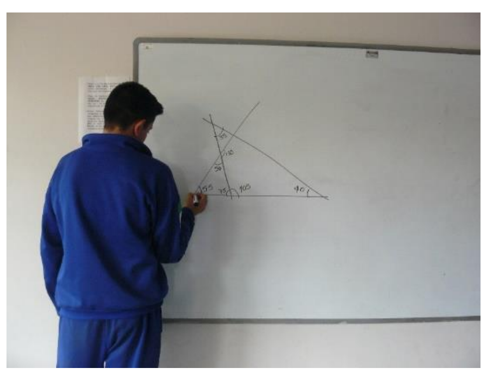


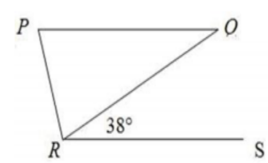
Figura 18. Planteamiento propuesto por un estudiante.

En esta situación los estudiantes generaron las siguientes preguntas:

- ¿pueden hallar el ángulo faltante?
- ¿es posible hallar el valor de todos los ángulos?
- ¿cuál es el valor de los ángulos externos de la figura?

Problema:

4. El triángulo PQR es isósceles, con PQ = QR, las rectas PQ y RS son paralelas. Si el ángulo QRS mide 38º, ¿cuánto mide el ángulo PRS?[71]



Solución esperada: Al trazar un segmento desde el punto Q a S obtenemos un cuadrilátero donde el triángulo PQR es isósceles y es congruente al triangulo QRS, por ende, los ángulos de RQS y RSQ miden ambos 71° y el ángulo PRS mide 38°+70°= 108°.

Soluciones generadas por los estudiantes:

Los aportes que hicieron los estudiantes para resolver el problema fueron los siguientes:

- Podemos trazar un segmento desde Q a S.
- Usar congruencia de triángulos.
- Hay dos líneas paralelas y QR es una diagonal.

Después los grupos entraron en diálogo para generar propuestas de solución al problema, algunos de grupos utilizaron las líneas paralelas para poder comprobar que los ángulos PQR y QRS son iguales.

[71] Canguro Matemático. Prueba 2011. Nivel 2, ejercicio 25

Otros estudiantes trazaron el segmento QS para observar que los triángulos PRQ y QRS son congruentes, debido a que comprante un mismo lado y sus lados paralelos son iguales.

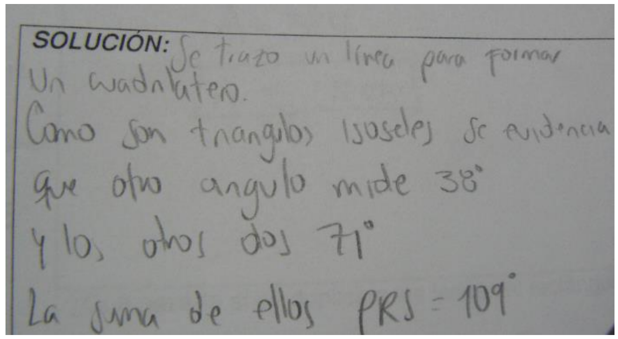


Figura 19. Planteamiento propuesto por un estudiante.

A continuación, se señala los indicadores alcanzados por los estudiantes:

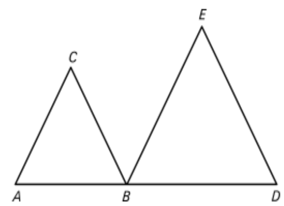
Indicador	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15
I_1	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No
I_2	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No
I_3	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No
I_4	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No
I_5	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No
I_6	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No
I_7	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No
I_8	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No
I_9	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	No	No	No

Grupos / **Indicadores**	**G1**	**G2**	**G3**	**G4**	**G5**
I_1	SI	SI	SI	SI	SI
I_2	SI	SI	SI	SI	NO
I_3	SI	SI	SI	SI	NO
I_4	SI	SI	SI	SI	SI

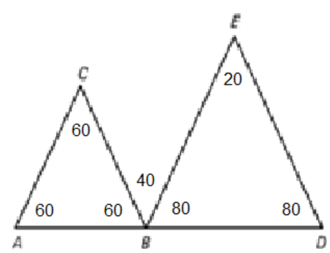
I_5	SI	SI	SI	SI	NO
I_6	SI	SI	SI	SI	NO

Problema:

5. El triángulo ABC es equilátero y en el triángulo BDE se tiene que BE = ED y ∠BED = 20°. ¿Cuál es la medida del ∠ABE?



Solución esperada: El triángulo ABC es equilátero (sus ángulos internos miden 60°), el triángulo BDE es isósceles (los ángulos de la base son iguales) y el ángulo BED mide 20° por tanto los ángulos restantes del triángulo isósceles miden 80° cada uno de ellos, las medidas de los ángulos ABC, CBE y EBD suman 180°, por tanto, que el ángulo CBE mide 40°, luego el ángulo ABE mide 100° (Ver figura).



Soluciones generadas por los estudiantes:

Los aportes que brindaron los estudiantes para el quinto punto, fueron los siguientes:

- Los ángulos del triángulo equilátero miden 60°.
- El triángulo BED es isósceles, si el ángulo BED mide 20°, entonces los ángulos de la base son igual a 80° cada uno.
- Los ángulos ABD, CBE y EBD suman 180°.

Los grupos utilizaron los aportes que se generaron anteriormente para poder hallar el valor del ángulo que se le solicita en el problema, para ello determinaron que el ángulo CBE mide 40°, por ende el ángulo buscado mide 100°.

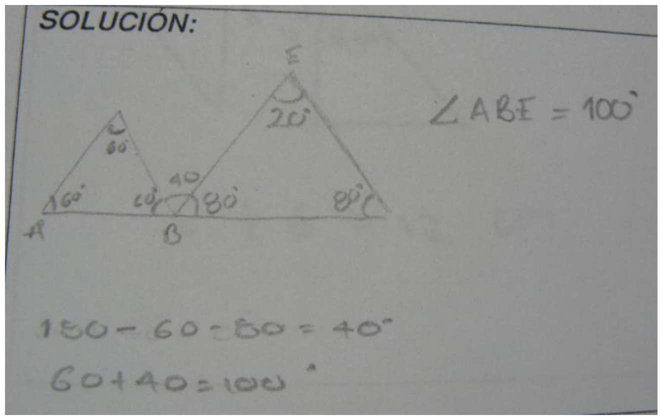


Figura 20. Planteamiento propuesto por un estudiante.

Indicadores alcanzados por los estudiantes:

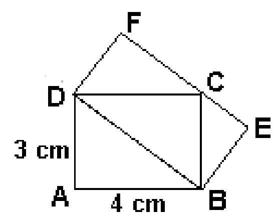
Indicador	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15
I_1	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_2	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_3	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_4	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_5	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_6	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_7	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_8	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_9	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si

Grupos / Indicadores	G1	G2	G3	G4	G5

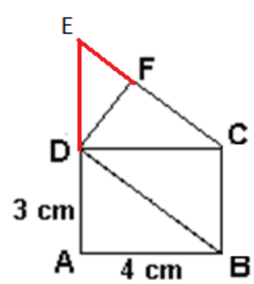
I_1	SI	SI	SI	SI	SI
I_2	SI	SI	SI	SI	SI
I_3	SI	SI	SI	SI	SI
I_4	SI	SI	SI	SI	SI
I_5	SI	SI	SI	SI	SI
I_6	SI	SI	SI	SI	SI

Problema:

6. En la figura se muestran dos rectángulos ABCD y DBEF. ¿Cuál es el área del rectángulo DBEF?[72]



Solución esperada: Usando descomposición y recomposición de figuras como se ilustra a continuación vemos que el área del rectángulo DBEF es igual a la del triángulo CDE la cual 6 centímetros cuadrados. (Ver imagen).



Soluciones generadas por los estudiantes:

En algunos grupos los estudiantes realizaron construcciones auxiliares para poder identificar el valor del área que se desea buscar en la figura, algunos complementaron con rectángulos mientras que otros no generaron ningún tipo de solución.

[72] Canguro Matemático. Prueba 2005. Nivel 3, ejercicio 21

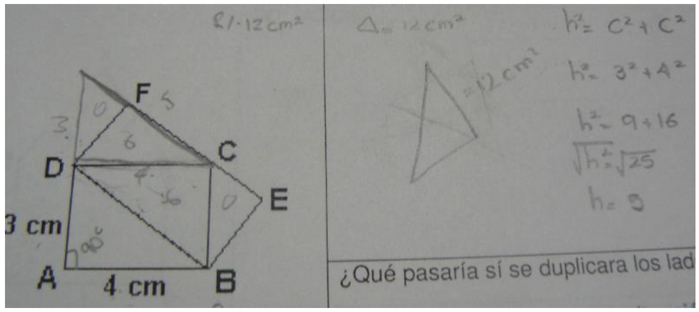


Figura 21. Planteamiento propuesto por un estudiante.

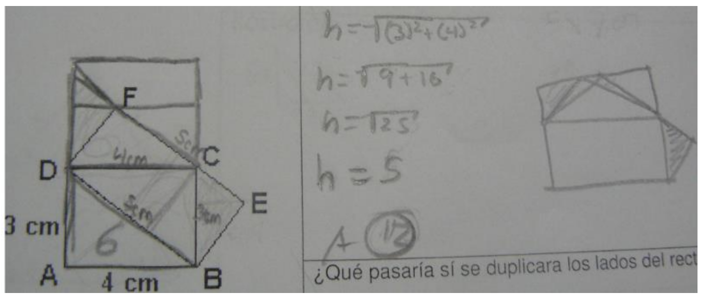


Figura 22. Planteamiento propuesto por un estudiante.

A continuación, se muestra los indicadores alcanzados por los estudiantes:

Indicador	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15
I_1	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_2	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_3	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_4	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_5	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_6	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_7	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_8	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_9	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si

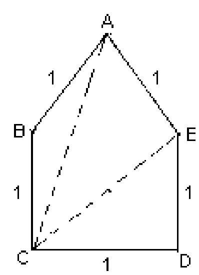
Indicadores \ Grupos	G1	G2	G3	G4	G5
I_1	SI	SI	SI	SI	SI
I_2	NO	NO	SI	NO	SI
I_3	NO	NO	SI	NO	SI
I_4	SI	SI	SI	SI	SI
I_5	NO	NO	SI	NO	SI
I_6	NO	NO	SI	NO	SI

En esta situación los estudiantes plantearon las siguientes preguntas:

- ¿Qué pasaría si se duplicara la figura?
- ¿Hay otro tipo de procedimiento para resolverlo?

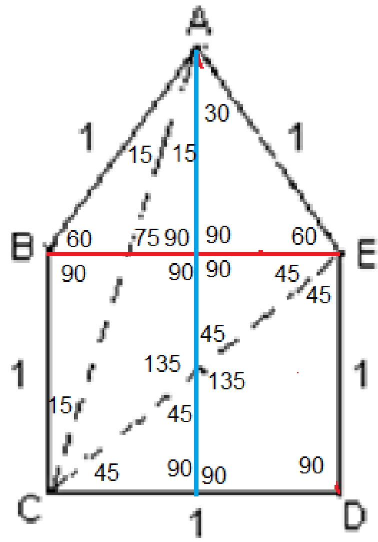
Problema:

7. En la figura, ¿Cuánto mide el ángulo $\angle$BAC?[73]



Soluciones esperadas: Trazamos un segmento desde B hasta E formando el cuadrado BCDE. El triángulo ABE es equilátero. También observamos que EC es una diagonal que divide los ángulos BED y BCD en partes iguales. Trazamos la altura del triángulo ABE prolongándola hasta intersectar el segmento CD y ahora es fácil observar las relaciones que se ilustran en la figura y resuelven el problema.

[73] Canguro Matemático. Prueba 2000. Nivel 2, ejercicio 27



Soluciones generadas por los estudiantes:

Solo dos estudiantes de quince lograron resolver el problema por medio de construcciones auxiliares, uno de ellos trazó la altura del triángulo y un segmento por los puntos B y E, mientras que otro complemento la figura con dos cuadrados y comenzó a complementar ángulos de acuerdo a lo que observaba.

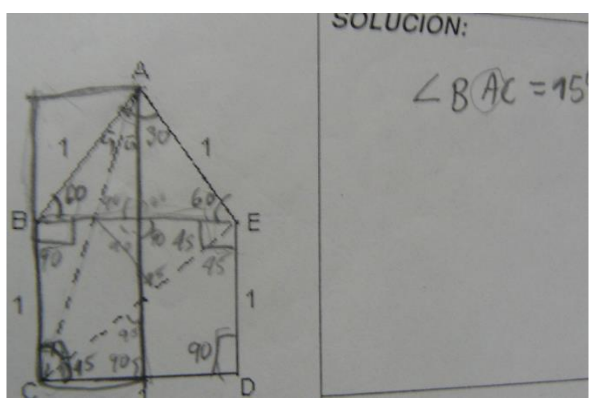


Figura 23. Planteamiento propuesto por un estudiante.

Indicador	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15
I_1	No	No	No	No	No	No	No	Si	No	No	No	No	No	No	Si
I_2	No	No	No	No	No	No	No	Si	No	No	No	No	No	No	Si

I_3	No	No	No	No	No	No	No	Si	No	No	No	No	No	No	Si
I_4	No	No	No	No	No	No	No	Si	No	No	No	No	No	No	Si
I_5	No	No	No	No	No	No	No	Si	No	No	No	No	No	No	Si
I_6	No	No	No	No	No	No	No	Si	No	No	No	No	No	No	Si
I_7	No	No	No	No	No	No	No	Si	No	No	No	No	No	No	Si
I_8	No	No	No	No	No	No	No	Si	No	No	No	No	No	No	Si
I_9	No	No	No	No	No	No	No	Si	No	No	No	No	No	No	Si

Conceptos involucrados: Propiedades de ángulos, tipos de triángulos, rectas perpendiculares, rectas paralelas, cuadrados y rectángulos.

Dificultades: Las dificultades más evidentes fueron identificar la diferencia entre un triángulo equilátero y un triángulo isósceles, puesto que algunos estudiantes confundían sus propiedades.

Conclusión: Los estudiantes por medio de la actividad pudieron generar conjeturas adecuadas para la solución de los problemas, en particular reconocieron las propiedades de los ángulos que para ellos jamás fue algo importante sino por el contrario era un tema sin importancia.

4.6. Actividad 5: ¿Qué tanto sabes de círculos y circunferencias?

Objetivo: Determinar las propiedades de la circunferencia y el círculo para implementarlo en diversos problemas.

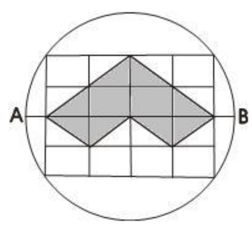
Descripción de la actividad:

Antes de hacer entrega de las guías a desarrollar, el docente realizó una retroalimentación de los conceptos previos que se van a utilizar en la actividad. Para ello se hizo uso de la herramienta dinámica *GeoGebra* para la explicación de círculo, circunferencia, radio y diámetro. También se hizo uso de materiales manipulables: un reloj de pared para la explicación del concepto de radio y una tabla del juego *Twister* para explicar el concepto de diámetro.

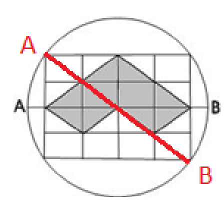
En la explicación del concepto de radio se utilizó la manecilla que marca los minutos para mostrar a los estudiantes que al estar ubicada en diferentes lugares la longitud de ella siempre será la misma y para el diámetro se hacía girar la manecilla de tal forma que los estudiantes observaran que en cualquier posición sigue conservando su longitud.

Problema:

1. El diámetro AB del círculo de la figura mide 10 cm. y todos los rectángulos pequeños son iguales. ¿Cuál es el perímetro de la figura sombreada?[74]



Respuesta esperada: El diámetro de la circunferencia mide 10 cm. Un diámetro forma de diagonal de los cuatro rectángulos (ver imagen). Podemos concluir que la diagonal de un rectángulo mide 2,5 cm y por tanto el perímetro de la figura sombreada mide 20 cm.



Soluciones generadas por los estudiantes:

Para el primer problema, los estudiantes realizaron los siguientes aportes:

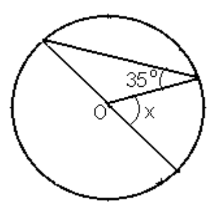
[74] Canguro Matemático. Prueba 2006. Nivel 2, ejercicio 11

- Rotar el radio hasta un vértice del rectángulo para poder hallar el valor de una diagonal.
- Los estudiantes indicaron que la base de los rectángulos pequeños mide 2 cm.

El primer aporte que brindaron los estudiantes ayuda efectivamente a la solución del problema. Se trazó un radio desde el centro del círculo hasta cualquier vértice del rectángulo. Ellos observaron que el radio pasa por dos diagonales de los rectángulos pequeños y el radio mide 5 cm. Por tanto, la medida de las diagonales de los rectángulos pequeños es igual a 2,5 cm. Después de identificar el valor, los estudiantes comenzaron a contar la cantidad de diagonales que podían observar en la figura sombreada para poder hallar el perímetro. Uno de los estudiantes respondió que el total son 8 diagonales que forman la figura y sí cada diagonal tiene un valor de 2,5 cm al multiplicarlo por 8 obtendremos que el perímetro es igual a 20 cm.

Problema:

2. Se tiene el siguiente círculo donde O es el centro. ¿Cuánto mide el ángulo x de la figura adjunta?[75]



Solución esperada: El ángulo en el centro del triángulo de la figura mide 110°, pues la suma de los tres ángulos internos de ese triángulo es 180° y los dos ángulos determinados por la cuerda y los radios miden cada uno 35°. El ángulo buscado es el suplemento de ese ángulo y mide por tanto 70°.

Solución generada por los estudiantes:

Para el segundo problema, los aportes brindados para la solución fueron los siguientes:

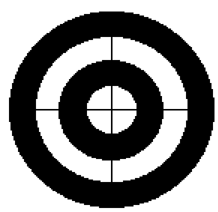
[75] Canguro Matemático. Prueba 2004. Nivel 2, ejercicio 8

- Los tres radios que están en el círculo tienen la misma medida.
- Si los radios son iguales, quiere decir que el triángulo es isósceles.
- Los dos ángulos de la base son iguales, cada uno mide 35°.
- El ángulo buscado es el suplemento del tercer ángulo de ese triángulo isósceles.

De acuerdo a los datos que manifestaron los estudiantes, se comienza a solucionar el problema, para ello se le solicita a un estudiante pasar al tablero para poder llevar a cabo la solución. El estudiante utilizó los datos de triángulo isósceles y la propiedad de la suma interna de ángulos de un triángulo para hallar el ángulo faltante que mide 110° y por último utilizó el concepto de ángulo suplementario para poder hallar el valor del ángulo x que es igual a 70°.

Problema:

3. Se consideran cuatro círculos concéntricos de radios 1, 2, 3 y 4 respectivamente, y se colorean las coronas circulares mayores y menores ¿Cuál es el área de la región coloreada?[76]



Solución esperada: Hallemos el radio de cada una de los círculos llamando círculo A al menor de ellos y círculo D al mayor. El círculo A tiene área 1π, el círculo B tiene área 4π, el círculo C tiene área 9π y por último el círculo D tiene radio 16π. Por tanto realizamos las siguientes operaciones para determinar el área sombreada de los círculos $16\pi + 4\pi - 9\pi - 1\pi = 10\pi$

Soluciones generadas por los estudiantes:

[76] Canguro Matemático. Prueba 2001. Nivel 2, ejercicio 21

Antes de que los estudiantes comentaran sus aportes para la solución del problema, el docente hizo una intervención para dar una explicación del concepto de círculos concéntricos. Posteriormente a esto, los estudiantes comenzaron a brindar aportes al problema, los cuales fueron:

- Debemos hallar las áreas de cada uno de los círculos.
- Sumamos las áreas sombreadas y las no sombreadas para luego restar una con la otra.

Por tanto, los aportes que brindaron los estudiantes después de interpretar el problema, fue hallar cada una de las áreas de los círculos y luego sumar las áreas sombreadas y las no sombreadas, para luego poder realizar una resta entre los dos resultados y poder identificar el valor total de las área sombreadas.

Las preguntas generadas por los estudiantes a una situación similar al problema, fueron los siguientes:

- ¿Cuál sería el área de la región sombreada si hubiera seis círculos concéntricos?
- Sí seguimos trazando círculos concéntricos hasta poder llegar centésimo ¿cuál sería el área?
- ¿Cuál es el área de la región sombreada si tenemos tres círculos concéntricos y su radio son 1, 3, 4?

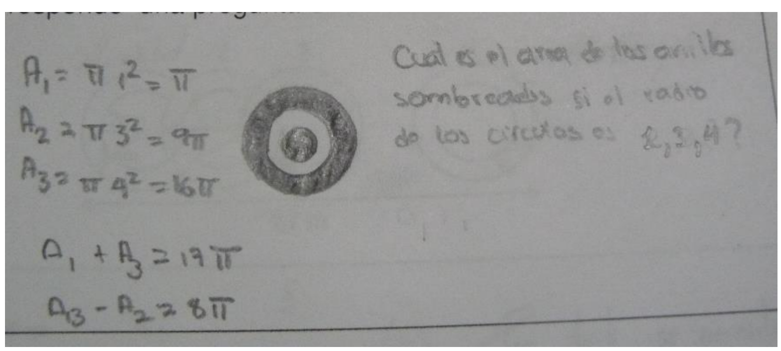
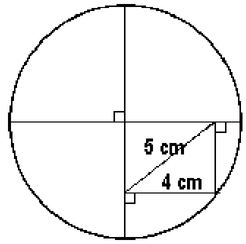


Figura 24. Planteamiento propuesto por un estudiante.

Problema:

4. ¿Cuál es el diámetro del círculo?



Solución esperada: Las dos diagonales del rectángulo en la figura son iguales y miden 5 cm cada una. El radio del círculo mide entonces 5 cm y el diámetro 10 cm.

Soluciones generadas por los estudiantes:

Los aportes que brindaron los estudiantes para la solución del problema fueron los siguientes:

- Utilizar el teorema de Pitágoras para poder hallar el lado faltante del triángulo rectángulo.
- En el rectángulo se observa una diagonal que divide al rectángulo en partes iguales y su longitud es 5 cm.
- Trazar la otra diagonal en el rectángulo para que así tener un radio del círculo.

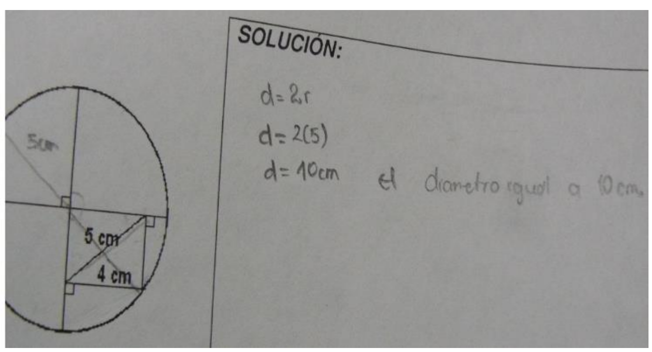


Figura 25. Planteamiento propuesto por un estudiante.

Indicadores alcanzados por los estudiantes:

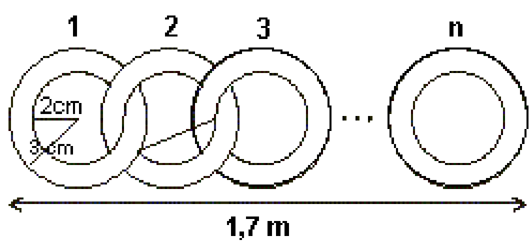
Indicador	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15
I_1	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si

I_2	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_3	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_4	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_5	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_6	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_7	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_8	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_9	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si

Grupos / **Indicadores**	**G1**	**G2**	**G3**	**G4**	**G5**
I_1	SI	SI	SI	SI	SI
I_2	NO	SI	SI	SI	SI
I_3	NO	SI	SI	SI	SI
I_4	SI	SI	SI	SI	SI
I_5	NO	SI	SI	SI	SI
I_6	NO	SI	SI	SI	SI

Problema:

5. Enlazamos anillos (con el radio de la circunferencia exterior 3 cm y el radio de la circunferencia interior 2 cm) como se muestra en la figura. La longitud de la cadena es 1,7m. ¿Cuántos anillos necesitamos?[77]



[77] Canguro Matemático. Prueba 2004. Nivel 3, ejercicio 10

Solución esperada: Observemos que el primer anillo aporta 6 cm a la longitud, pero el segundo (y los siguientes), por cómo está enlazado, aporta solamente 4 m. Se necesitaran; $\frac{170\ cm - 6cm}{4} = 41$ anillos además del primero, es decir, se requieren 42 anillos en total.

Soluciones generadas por los estudiantes:

Los aportes de solución que brindaron los estudiantes fueron los siguientes:

- Para el primer anillo el radio que ocupa es de 6 cm, después del primer anillo ocupan solo 4 cm.
- 1,7 m equivalen a 170 cm.

Para la solución los estudiantes tomaron la longitud de la cadena que equivale a 170 cm y le restaron la longitud inicial del primer anillo, posterior a esto el resultado fue 164 y al dividirlo en la cantidad de longitud que ocupa los demás anillos obtienen como resultado 41, después suman el faltante para tener un total de 42.

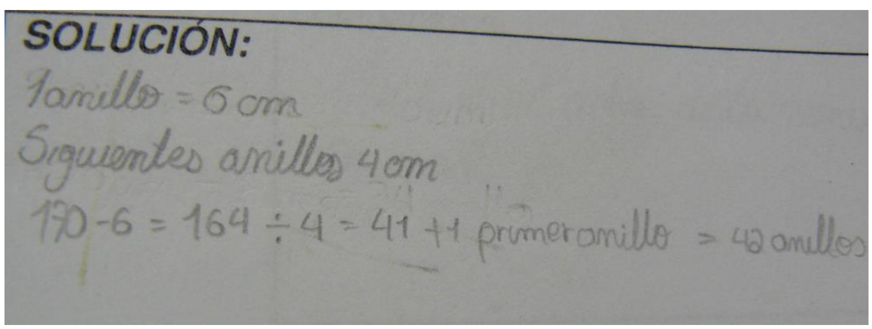


Figura 26. Planteamiento propuesto por un estudiante.

A continuación, se muestran los indicadores alcanzados por los estudiantes:

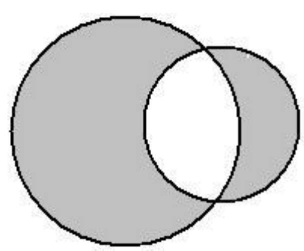
Indicador	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15
I_1	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_2	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si

I_3	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_4	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_5	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_6	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_7	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_8	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si
I_9	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si	Si	Si	Si

Grupos / **Indicadores**	**G1**	**G2**	**G3**	**G4**	**G5**
I_1	SI	SI	SI	SI	SI
I_2	NO	SI	NO	SI	SI
I_3	NO	SI	NO	SI	SI
I_4	SI	SI	SI	SI	SI
I_5	NO	SI	NO	SI	SI
I_6	NO	SI	NO	SI	SI

Problema:

6. Dos círculos de radios 4 y 6 se cortan como se ve en la figura. ¿Cuál es la diferencia de las áreas de las partes que no se superponen? [78]



Solución esperada: El área del círculo mayor es de 36π y del círculo menor es de 16π, por tanto al realizar una resta en estas dos áreas podemos identificar que el resultado es igual a 20π.

Soluciones generadas por los estudiantes:

[78] Canguro Matemático. Prueba 2008. Nivel 2, ejercicio 29

Los estudiantes propusieron los siguientes aportes para la solución del problema:

- Hallar el área de cada uno de los círculos.
- Al unir las dos áreas de los círculos podemos identificar el diámetro de una circunferencia.

Los estudiantes hallaron el valor del área de los círculos que corresponden a 36π y 16π, posterior a esto tomaron los valores y los restaron para poder hallar el área de los círculos que no se superponen.

Indicador	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15
I_1	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_2	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_3	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_4	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_5	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_6	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_7	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_8	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si
I_9	No	No	No	No	No	No	Si	Si	Si	No	No	No	Si	Si	Si

Grupos / **Indicadores**	**G1**	**G2**	**G3**	**G4**	**G5**
I_1	SI	SI	SI	SI	SI
I_2	NO	NO	SI	NO	SI
I_3	NO	NO	SI	NO	SI
I_4	SI	SI	SI	SI	SI
I_5	NO	NO	SI	NO	SI
I_6	NO	NO	SI	NO	SI

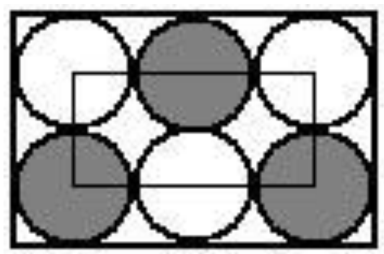
Las situaciones que generaron los estudiantes de acuerdo al problema planteado fueron los siguientes:

- ¿cuál es el área de la región sombreada?

- Sí el radio de los círculos fuera 2 y 8 ¿cuál es el área de la región sombreada?

Problema:

7. En la figura hay seis círculos iguales, tangentes entre sí y a los lados del rectángulo. Los vértices del rectángulo pequeño son los centros de 4 círculos. El perímetro del rectángulo pequeño es 60 cm. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo grande?[79]



Solución esperada: El diámetro de un círculo es dos veces el radio por tanto tenemos lo siguiente:

$$2r = d$$

Ahora identifiquemos que hay ocho radios y dos diámetros que podemos observar en el rectángulo menor, es decir:

$$8r + 2d = 60\ cm$$

$$8r + 2(2r) = 60\ cm$$

$$12r = 60\ cm$$

$$r = 5\ cm$$

Para el rectángulo mayor podemos observar que el lado más largo está conformado por tres diámetros es decir seis radios y el lado pequeño está conformado por dos diámetros es decir cuatro radios. Por tal razón la respuesta es 100 cm.

[79] Canguro Matemático. Prueba 2007. Nivel 3, ejercicio 9

Soluciones generadas por los estudiantes:

Los aportes que propusieron los estudiantes para la solución del problema fueron los siguientes:

- El diámetro es el doble del radio.
- Hay en total seis diámetros que conforman el rectángulo pequeño.
- Hay en total doce radios que conforman el rectángulo pequeño.

Posteriormente a determinar los datos del problema, los estudiantes comenzaron a solucionarlo. Para ello, tomaron la cantidad de radios o diámetros y lo dividieron entre el perímetro del rectángulo. Por tanto, el diámetro de un círculo es igual a 10 cm y los radios son igual a 5 cm. Es decir que el rectángulo mayor está conformado por tres diámetros de ancho y su longitud es 30 cm y dos diámetros de alto y su longitud es 20 cm. Así que el perímetro es igual a 100 cm.

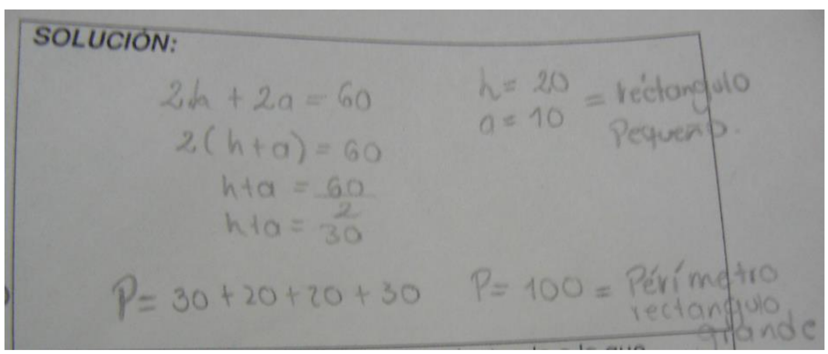


Figura 27. Planteamiento propuesto por un estudiante.

Las situaciones que generaron los estudiantes similares al problema planteado, fueron las siguientes:

- ¿cuál es el área de las regiones sombreadas que se ven en la figura?
- ¿cuál es el área del rectángulo mayor y menor?
- ¿Cuál es el área de un círculo?

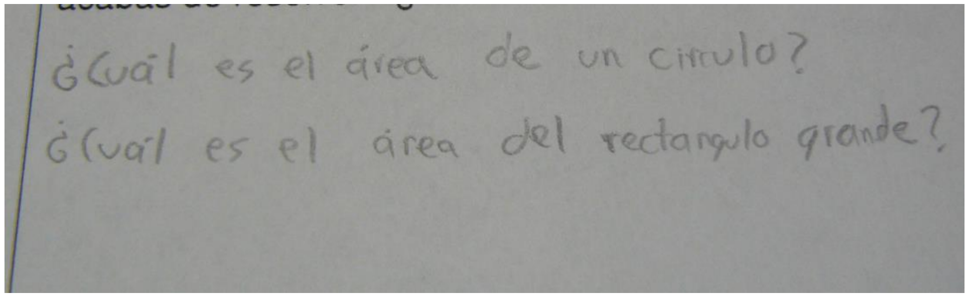


Figura 28. Planteamiento propuesto por un estudiante.

La siguiente tabla muestra los indicadores alcanzados por los estudiantes:

Indicador	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15
I_1	No	Si	Si	Si	No	Si	Si	Si	Si	No	No	Si	Si	Si	Si
I_2	No	Si	Si	Si	No	Si	Si	Si	Si	No	No	Si	Si	Si	Si
I_3	No	Si	Si	Si	No	Si	Si	Si	Si	No	No	Si	Si	Si	Si
I_4	No	Si	Si	Si	No	Si	Si	Si	Si	No	No	Si	Si	Si	Si
I_5	No	Si	Si	Si	No	Si	Si	Si	Si	No	No	Si	Si	Si	Si
I_6	No	Si	Si	Si	No	Si	Si	Si	Si	No	No	Si	Si	Si	Si
I_7	No	Si	Si	Si	No	Si	Si	Si	Si	No	No	Si	Si	Si	Si
I_8	No	Si	Si	Si	No	Si	Si	Si	Si	No	No	Si	Si	Si	Si
I_9	No	Si	Si	Si	No	Si	Si	Si	Si	No	No	Si	Si	Si	Si

Conceptos involucrados: Propiedades de círculo, triángulo isósceles, triángulos rectángulos, rectángulos, círculos concéntricos, diámetro, radio, suma interna de ángulos, concepto de área y de perímetro.

Dificultades: La mayoría de los estudiantes tuvieron dificultad en solucionar problemas que tengan que ver con círculos, ya que para ellos este fue un tema nuevo y no aparece en el plan de estudios. A pesar de lo anterior, los estudiantes estuvieron muy participativos y atentos a cada una de las observaciones e indicaciones que les daba el docente para así poder comprender el tema de círculos y circunferencias.

Conclusión: Los estudiantes se presentaron activos durante la actividad para así poder entender cada una de las propiedades que se utilizan en círculos y circunferencias en diferentes problemas.

4.7. PRUEBA FINAL.

Objetivo: Determinar las habilidades de razonamiento geométrico en relación con los conceptos de perímetro, área, propiedades de los triángulos y círculos desarrolladas por los estudiantes de grado Octavo, después de la aplicación de las actividades.

Descripción de la prueba: La prueba final se desarrolló con 15 estudiantes de grado octavo. Se presentaron una serie de problemas del *Canguro Matemático* a los estudiantes, en que involucran los conceptos básicos de geometría elemental, similares a la prueba inicial, con el propósito de identificar si los estudiantes desarrollaron las habilidades de razonamiento matemático.

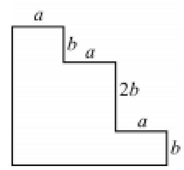
Los estudiantes estuvieron concentrados y atentos durante el desarrollo de la prueba inicial la cual tuvo una duración de 1 Hora para su realización.

A continuación, se muestra en una tabla, para cada problema, el método que implementaron cada uno de los estudiantes, dado el caso que no diera una respuesta se indicara como "no aplica".

Problemas:

1. ¿Cuál es el perímetro de la figura?[80]

[80] Canguro Matemático. Prueba 2010. Nivel 3, ejercicio 1



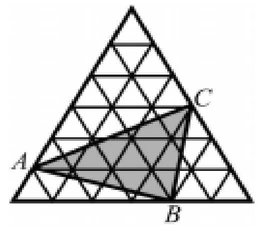
Respuesta esperada: La longitud total de los segmentos horizontales es 2(a + a + a) = 6a y la de los segmentos verticales es 2(b + 2b + b) = 8b, por lo tanto, el perímetro es 6a + 8b.

Soluciones generadas por los estudiantes:

Estudiante	Solución
Estudiante 1	El estudiante identifico que la longitud de la izquierda de la figura es la misma a las que se observan en la derecha de la figura en forma vertical. Por tanto dedujo que la longitud de la figura es 6a+8b.
Estudiante 2	El estudiante no indicó ningún procedimiento y colocó como solución 6a+8b.
Estudiante 3	Realizó mismo procedimiento del estudiante 1.
Estudiante 4	Realizó mismo procedimiento del estudiante 1.
Estudiante 5	Realizó mismo procedimiento del estudiante 1.
Estudiante 6	Realizó mismo procedimiento del estudiante 1.
Estudiante 7	Indicó que la solución es 6a+8b.
Estudiante 8	Indicó que la solución es 6a+8b.
Estudiante 9	Indicó que la solución es 6a+8b.
Estudiante 10	Realiza mismo procedimiento del estudiante 1.
Estudiante 11	Realiza mismo procedimiento del estudiante 1.
Estudiante 12	Realiza mismo procedimiento del estudiante 1.
Estudiante 13	Realiza mismo procedimiento del estudiante 1.
Estudiante 14	Realiza mismo procedimiento del estudiante 1.
Estudiante 15	Realiza mismo procedimiento del estudiante 1.

2. El triángulo equilátero más grande está dividido en 36 triangulitos equiláteros de área $1cm^2$ cada uno. ¿Cuál es el área del triángulo ABC?[81]

[81] Canguro Matemático. Prueba 2010. Prueba preliminar, ejercicio 14



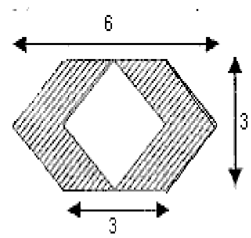
Solución esperada: AC es la diagonal de un paralelogramo compuesto por 12 triangulitos, AB es la diagonal de un paralelogramo compuesto por 6 triangulitos y BC es la diagonal de un paralelogramo compuesto por 4 triangulitos. El área sombreada es la unión de la mitad de cada uno de los paralelogramos mencionados, por lo tanto, su área 6 + 3 + 2 = 11 cm^2.

Soluciones generadas por loes estudiantes:

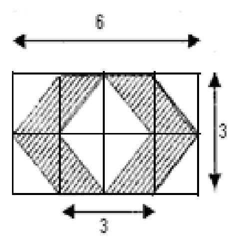
Estudiante	Solución
Estudiante 1	El estudiante por medio de composición y recomposición de área, observó que el total de triángulos que conforman el triángulo ABC son 11 en total, por tanto el área es igual a 11 cm^2.
Estudiante 2	Realizó mismo procedimiento del estudiante 1.
Estudiante 3	Realizó mismo procedimiento del estudiante 1.
Estudiante 4	Realizó mismo procedimiento del estudiante 1.
Estudiante 5	Realizó mismo procedimiento del estudiante 1.
Estudiante 6	Realizó mismo procedimiento del estudiante 1.
Estudiante 7	Realizó mismo procedimiento del estudiante 1.
Estudiante 8	Realizó mismo procedimiento del estudiante 1.
Estudiante 9	Realizó mismo procedimiento del estudiante 1.
Estudiante 10	Realiza mismo procedimiento del estudiante 1.
Estudiante 11	Realiza mismo procedimiento del estudiante 1.
Estudiante 12	Realiza mismo procedimiento del estudiante 1.
Estudiante 13	Realiza mismo procedimiento del estudiante 1.
Estudiante 14	Realiza mismo procedimiento del estudiante 1.
Estudiante 15	Realiza mismo procedimiento del estudiante 1.

3. ¿Cuánto vale el área de la parte oscura?[82]

[82] Canguro Matemático. Prueba 2000. Nivel 1, problema 25



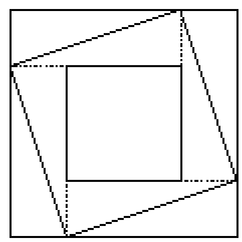
Solución esperada: Sí completamos el hexágono en un rectángulo como se observa en la figura, el área del rectángulo es igual a 18 cm^2. Sí dividimos el rectángulo en pequeños rectángulos de la misma área y que contengan en ellos dos triángulos rectángulos, observamos que, el área de un triángulo es igual a $\frac{9}{8}$ del área del rectángulo superior. El total de triángulos rectángulos sombreados son 8 y al calcular obtenemos $8 \times \frac{9}{8} = 9cm^2$.



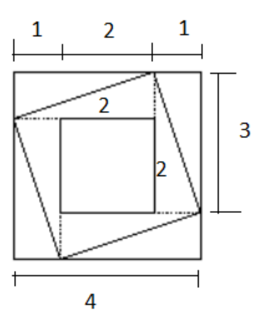
Estudiante	Solución
Estudiante 1	El estudiante indica que el resultado es 6 cm^2.
Estudiante 2	El estudiante dividió la figura en pequeños triángulos rectángulos de tal forma que pudiera observar la cantidad de triángulos sombreados que son 8.
Estudiante 3	No aplica
Estudiante 4	El estudiante halla el área del cuadrado el cual equivale a 9 cm^2. Después indica que el área de los triángulos que están en el cuadrado tienen área de 1,125 cm^2 y señala que hay en total hay 8, el resultado es igual a 9 cm^2.
Estudiante 5	No aplica
Estudiante 6	El estudiante hizo uso de la fórmula del área para un hexágono el cual indicó que es igual a 6 cm^2, posteriormente dividió el hexágono en triángulos rectángulos y cada uno tiene área de 0.5 cm^2 por tanto el área sombreada es igual a 4 cm^2.
Estudiante 7	Realizó mismo procedimiento del estudiante 4.
Estudiante 8	Realizó mismo procedimiento del estudiante 4.
Estudiante 9	Realizó mismo procedimiento del estudiante 4.
Estudiante 10	Realizó mismo procedimiento del estudiante 4.

Estudiante 11	No aplica
Estudiante 12	No aplica
Estudiante 13	Realiza mismo procedimiento del estudiante 4.
Estudiante 14	Realiza mismo procedimiento del estudiante 6.
Estudiante 15	Realiza mismo procedimiento del estudiante 4.

4. El cuadrado grande tiene área $16u^2$; el más pequeño, $4u^2$. ¿Cuál es el área del cuadrado intermedio?[83]



Solución esperada: La longitud de los lados del cuadrado superior es igual 4u, mientras que la longitud de los lados del cuadrado pequeño es 2u, los triángulos rectángulos que se observan en la figura tienen altura 3 y base 1, por tanto al aplicar la fórmula para hallar su área, este es igual a $\frac{3}{2}u^2$. El cuadrado intermedio está compuesto por el cuadrado pequeño y cuatro triángulos rectángulos, es decir, el área del cuadrado pequeño es $4u^2$ y de los cuatro triángulo es igual a $6u^2$, por tanto al sumarlos el resultado es $10u^2$.

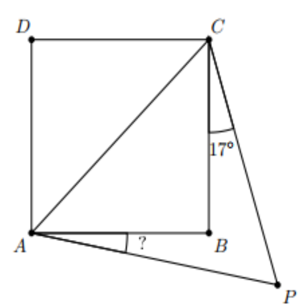


Soluciones generadas por los estudiantes:

[83] Canguro Matemático. Prueba 2001. Nivel 1, problema 24

ESTUDIANTES	SOLUCIONES
Estudiante 1	No aplica.
Estudiante 2	Colocó como solución $8u^2$.
Estudiante 3	No aplica
Estudiante 4	No aplica
Estudiante 5	El estudiante resta las áreas del cuadrado mayor y menor para tener un total de $12u^2$ del área que corresponde a los rectángulos que se muestran en la figura, posterior a esto lo divide en 4 que corresponde a la cantidad de rectángulos que se observan en la figura para obtener como resultado el área que corresponde a cada rectángulo la cual es: $3u^2$. Por tanto el área de cada triángulo es $1{,}5u^2$, como el cuadrado intermedio está compuesto por el cuadrado menor y cuatro triángulos rectángulos quiere decir que el área es igual a: $4u^2 + (1{,}5u^2 \times 4) = 4u^2 + 6u^2 = 10u^2$
Estudiante 6	Colocó como solución $12u^2$.
Estudiante 7	Hizo mismo procedimiento del estudiante 5
Estudiante 8	Hizo mismo procedimiento del estudiante 5
Estudiante 9	Hizo mismo procedimiento del estudiante 5
Estudiante 10	Colocó como resultado $12u^2$
Estudiante 11	No aplica
Estudiante 12	Hizo mismo procedimiento del estudiante 5
Estudiante 13	Hizo mismo procedimiento del estudiante 5
Estudiante 14	Hizo mismo procedimiento del estudiante 5
Estudiante 15	Hizo mismo procedimiento del estudiante 5

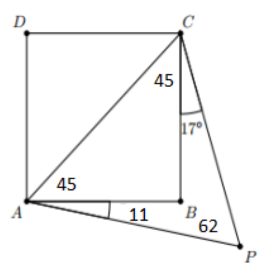
5. En la figura de la derecha ABCD es un cuadrado y P es un punto exterior tal que AP = AC y ∠BCP = 17°. Calcula la medida del ángulo ∠BAP[84]



SOLUCIÓN ESPERADA: El cuadrado ABCD tiene ángulos rectos. Al trazar la diagonal, esta divide a estos ángulos en dos partes iguales es decir en ángulos de 45°. Sabemos que el triángulo ACP es

[84] Canguro Matemático. Prueba 2000. Prueba final prueba primer año, problema 2

isósceles ya que AP=AC por tanto el ángulo C y P son iguales. Ahora complementando cada ángulo obtenemos lo siguiente: el ángulo C mide 62°, como es igual al ángulo P quiere decir que él también mide 62°, por suma interna de los ángulos de un triángulo tenemos que 62°+62°+A=180°, es decir que el ángulo A mide 56°, una parte de ella esta interna al cuadrado y la divide en la diagonal por tanto esta mide 45° y la parte restante es igual a 11°. Ver la figura.

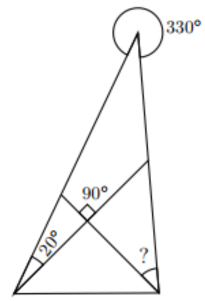


Soluciones generadas por los estudiantes:

ESTUDIANTES	SOLUCIONES
Estudiante 1	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 2	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 3	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 4	No aplica
Estudiante 5	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 6	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 7	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 8	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 9	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 10	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 11	No aplica
Estudiante 12	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 13	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 14	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 15	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada

6. ¿Cuál es el valor del ángulo marcado con el signo de interrogación?[85]

[85] Canguro Matemático. Prueba 2010. Nivel 3, problema 16

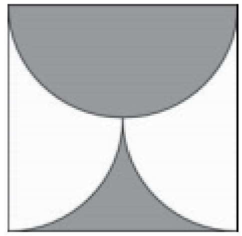


SOLUCIÓN ESPERADA: Tenemos que en el triángulo ABC, ∠BAC = 360° − 330° = 30° y ∠ADC = 20° + 90° = 110° por ser exterior del triángulo BDE, por lo tanto ∠ACD = 180° − 110° − 30° = 40°. Ver figura.

ESTUDIANTES	SOLUCIONES
Estudiante 1	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 2	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 3	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 4	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 5	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 6	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 7	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 8	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 9	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 10	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 11	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 12	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 13	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 14	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 15	Realiza el mismo procedimiento de la solución esperada

7. La parte sombreada de un cuadrado de lado a está limitada por una semicircunferencia y dos cuartos de circunferencia. ¿Cuál es su área?[86]

[86] Canguro Matemático. Prueba 2015. Nivel 4, problema 3

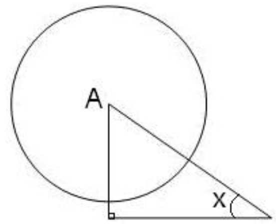


SOLUCIÓN ESPERADA: $\frac{a^2}{2}$ ya que el semicírculo superior se puede descomponer en dos cuartos de círculo, que se pueden acomodar en la parte inferior de la figura para completar medio cuadrado.

ESTUDIANTES	SOLUCIONES
Estudiante 1	El estudiante indica que el área sombreada representa la mitad del área del cuadrado.
Estudiante 2	Realiza mismo procedimiento del estudiante 1
Estudiante 3	Realiza mismo procedimiento del estudiante 1
Estudiante 4	El estudiante traza una línea que divida en partes iguales el cuadro, por medio de recomposición de composición de áreas indica que el valor del área sombreada es la mitad del área del cuadrado.
Estudiante 5	Realiza mismo procedimiento del estudiante 1
Estudiante 6	Realiza mismo procedimiento del estudiante 1
Estudiante 7	Realiza mismo procedimiento del estudiante 1
Estudiante 8	Realiza mismo procedimiento del estudiante 4
Estudiante 9	Realiza mismo procedimiento del estudiante 4
Estudiante 10	Realiza mismo procedimiento del estudiante 1
Estudiante 11	Realiza mismo procedimiento del estudiante 4
Estudiante 12	Realiza mismo procedimiento del estudiante 1
Estudiante 13	Realiza mismo procedimiento del estudiante 4
Estudiante 14	Realiza mismo procedimiento del estudiante 4
Estudiante 15	Realiza mismo procedimiento del estudiante 4

8. El círculo de la figura tiene centro A y radio 6. El área interior al círculo, pero exterior al triángulo es 30π. ¿Cuánto vale x (la medida en grados del ángulo marcado)?[87]

[87] Canguro Matemático. Prueba 2010. Nivel 4, problema 22



Solución esperada: La región comprendida dentro del círculo y el triángulo de la figura corresponde a 1/6 del área del círculo, pues la región dentro del círculo y exterior al triángulo representa 5/6 del área del círculo y por lo tanto el ángulo el centro que determina el triángulo mide 60°. Por tanto, como el triángulo es rectángulo tenemos: 60°+90°+x=180° y x corresponde a 30°. Ver la figura

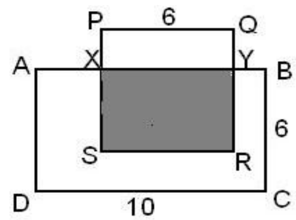
SOLUCIONES GENERADAS POR LOS ESTUDIANES:

ESTUDIANTES	SOLUCIONES
Estudiante 1	No aplica
Estudiante 2	El estudiante indica que el resultado es 70°
Estudiante 3	No aplica
Estudiante 4	El estudiante indica que el resultado es 30°
Estudiante 5	Realiza mismo procedimiento del estudiante 4
Estudiante 6	No aplica
Estudiante 7	No aplica
Estudiante 8	Realiza mismo procedimiento del estudiante 4
Estudiante 9	No aplica
Estudiante 10	No aplica
Estudiante 11	Realiza mismo procedimiento del estudiante 4
Estudiante 12	Realiza mismo procedimiento del estudiante 4
Estudiante 13	Realiza mismo procedimiento del estudiante 4
Estudiante 14	Realiza mismo procedimiento del estudiante 4
Estudiante 15	Realiza mismo procedimiento del estudiante 4

Se incluyó en la prueba final dos problemas adicionales con la finalidad de ofrecer otros retos a los estudiantes, los cuales son los siguientes:

9. En la figura, ABCD es un rectángulo y PQRS es un cuadrado. El área sombreada es la mitad del área del rectángulo ABCD. ¿Cuál es la longitud de PX?[88]

[88] Canguro Matemático. Prueba 2008. Nivel 4, problema 18

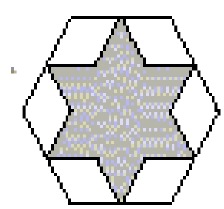


Solución esperada: El área de ABCD es 6 × 10 = 60, por lo tanto, el área de XSRY es 30, y como XY = PQ = 6, resulta XS = 5, de donde PX = 6 − 5 =1.

Soluciones generadas por los estudiantes:

ESTUDIANTES	SOLUCIONES
Estudiante 1	No aplica
Estudiante 2	Indica que el resultado es 2, no realiza ningún procedimiento.
Estudiante 3	No aplica
Estudiante 4	Indica que el resultado es 2, no realiza ningún procedimiento.
Estudiante 5	No aplica
Estudiante 6	No aplica
Estudiante 7	No aplica
Estudiante 8	Indica que el resultado es 2 y no realiza ningún procedimiento
Estudiante 9	No aplica
Estudiante 10	No aplica
Estudiante 11	Indica que el resultado es 1 y o realiza ningún procedimiento
Estudiante 12	Indica que el resultado es 1 y o realiza ningún procedimiento
Estudiante 13	No aplica
Estudiante 14	Indica que el resultado es 2 y no realiza un procedimiento
Estudiante 15	No aplica

10. La estrella de la figura se ha trazado usando los puntos medios de los lados del hexágono regular. Si el área de la estrella es 6, ¿Cuál es el área del hexágono?[89]



SOLUCIÓN ESPERADA: Una opción es dividir el hexágono regular en triángulos pequeños como se puede ver en una de las puntas de la estrella, como se observa en la figura. Por tanto si el área de la

[89] Canguro Matemático. Prueba 2001. Nivel 3, problema 28

estrella equivale a 6 y el total de triángulos que lo conforman son 12, el área que corresponde a cada triangulo es $\frac{1}{2}$, el total de triángulos que conforman el hexágono regular es 24, por tanto el área del hexágono es 12.

Soluciones generadas por los estudiantes:

ESTUDIANTES	SOLUCIONES
Estudiante 1	No aplica
Estudiante 2	No aplica
Estudiante 3	Realiza mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 4	Realiza mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 5	Realiza mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 6	Realiza mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 7	No aplica
Estudiante 8	Realiza mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 9	Realiza mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 10	Realiza mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 11	No aplica
Estudiante 12	No aplica
Estudiante 13	No aplica
Estudiante 14	Realiza mismo procedimiento de la solución esperada
Estudiante 15	No aplica

En comparación a la prueba inicial, en la cual algunos de los estudiantes no utilizaban algún tipo de estrategia o procedimiento en la solución y otros no intentaron solucionar el problema y algunos daban con la solución del problema, observamos en la prueba final que los estudiantes tuvieron un avance en los indicadores que se evaluaron en los problemas. Ahora reconocen la importancia del concepto de perímetro y área, sus diferencias y emplearlos junto con otras propiedades básicas y aplican correctamente propiedades de los triángulos, círculos y circunferencias.

A continuación, se muestra una tabla indicando el número de estudiantes que acertaron en la solución de los problemas de la prueba inicial y de la prueba final

Problema	**Prueba inicial**	**Prueba final**
1	5	15

2	9	15
3	10	7
4	4	8
5	2	13
6	4	15
7	2	15
8	6	6
9	4	8
10	3	8

Conceptos involucrados: Los conceptos matemáticos involucrados fueron los siguientes:

- Para el primer problema el concepto de perímetro y comparación de longitudes de lados.
- Para el segundo problema propiedades de los triángulos rectángulos, de los triángulos equiláteros, concepto de área, uso de descomposición y recomposición de figuras para cálculos de áreas.
- Para el tercer problema propiedades de los hexágonos, triángulos y rectángulos, y concepto de área.
- Para el cuarto problema propiedades de los triángulos rectángulos y los cuadrados, y uso de descomposición y recomposición de figuras para cálculos de áreas.
- Para el quinto problema triángulos, cuadrados, ángulos internos, suma de los ángulos internos de un triángulo y diagonales.
- Para el sexto problema triángulo rectángulo y suma interna de ángulos en un triángulo.
- Para el séptimo problema el concepto de área, cuadrado, semicircunferencia, circunferencia, uso de descomposición y recomposición de figuras para cálculos de áreas.

- Para el octavo problema área, radio, círculo, triangulo rectángulo y suma interna de ángulos en un triángulo.
- Para el noveno problema el área en un rectángulo y longitudes.
- Para el décimo problema hexágono, área y triángulos equiláteros.

Dificultades: Algunos estudiantes tuvieron confusiones referentes a algunas propiedades sobre triángulos y círculos. El tiempo en resolver la prueba final solo se limitó a una hora y esto puedo afectar que los estudiantes lograran desarrollar las soluciones de algunos problemas.

Conclusión: Después de aplicar las actividades referentes a las temáticas, conceptos y propiedades que los estudiantes reconocían, pero no sabían emplear en un problema, se observó que el avance fue efectivo, puesto que los estudiantes ahora tienen conocimiento de cómo emplear una estrategia de solución y comprenden la importancia de una propiedad para el desarrollo del problema.

Conclusiones capítulo 4

Los resultados de las actividades son analizados teniendo en cuenta la forma en que fueron desarrollados, los indicadores alcanzados por los estudiantes en la resolución de problemas y la comunidad práctica de Wenger.

Las actividades propuestas fueron de gran importancia para el trabajo, esencialmente en el análisis de resultados.

El avance de los estudiantes fue satisfactorio, puesto que en grado octavo los desempeños que se trabajan en geometría son muy escasos y no se hace uso de ellos en problemas, por tanto los estudiantes al conocer un concepto o propiedad no reconocían como poder usarlos en un problema, después de generar habilidades de razonamiento matemático por medio de las actividades con problemas del

Canguro Matemático los estudiantes fortalecieron su conocimiento respecto a estos temas seleccionados en el proyecto de investigación.

Las estrategias de soluciones fueron muy valiosas a la hora de análisis puesto que los estudiantes demostraron valiosas soluciones no esperadas.

CONCLUSIONES

El proceso de investigación sobre el uso de los problemas del Canguro Matemático para favorecer el aprendizaje de la geometría en el grado octavo del Colegio Elisa Borrero de Pastrana, se desarrolló según lo previsto y se puede afirmar que el objetivo inicialmente planteado fue alcanzado.

En este trabajo se plantearon previamente las siguientes tareas de investigación.

1. Determinar las investigaciones que se han realizado sobre la implementación los problemas del Canguro Matemático en el aula para el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes, específicamente aquellas que contribuyan en generar habilidades, estrategias y construcción de conocimiento.
2. Investigar los fundamentos teóricos que sustentan el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes, específicamente aquellas que contribuyan en generar habilidades y construcción de conocimiento.
3. Estimular a los estudiantes a realizar preguntas, construir o relacionar una situación similar al problema principal de manera que vayan surgiendo frente a los problemas del Canguro Matemático.
4. Implementar los problemas del Canguro Matemático para mejorar las habilidades de razonamiento matemático a partir de los conceptos previos y propiedades que tienen los estudiantes en situaciones referentes a geometría.
5. Determinar las estrategias de solución que surgen en los estudiantes cuando en el marco de la resolución de problemas se plantean diversos problemas que incluyen contenidos geométricos.

En relación a la primera tarea se observó que existen pocas investigaciones sobre la implementación de problemas del Canguro Matemático en el aula en el área de geometría.

Los trabajos encontrados se orientan fundamentalmente en ver la importancia de las Competiciones Matemáticas en los estudiantes, identificar estudiantes talentosos y ver la importancia en la resolución de problemas.

Dentro de las insuficiencias encontradas se observa que son escasos los trabajos que propician en el aula la enseñanza por medio de problemas del Canguro Matemático y en los que el centro del aprendizaje sea la construcción de conocimiento y la elaboración de estrategias de solución. Sin embargo, existen valiosos aportes entre los cuales destacamos:

- The Rainbow of Mathematics—Teaching the Complete Spectrum and the Role Mathematics Competitions Can Play por Robert Geretschläger.
- Geretschläger, Competition Aims to Develop Flexibility in the Classroom por Ingrid Semanišinová, Matúš Harminc and Martina Jesenská.
- Discovering, Development, and Manifestation of Mathematical Talent por Iliana Tsvetkova.

Las entrevistas realizadas a los doctores Mary Falk y Rafael Sánchez indican la importancia de las Competiciones Matemáticas para detectar y hacer seguimiento a estudiantes talentosos pero fundamentalmente en la enseñanza de las matemáticas por medio de la resolución de problemas, siendo un eje central para desarrollar un mejor razonamiento matemático y la construcción del conocimiento, en especial porque existe un enorme banco de problemas del Canguro Matemático que favorece en el proceso de enseñanza aprendizaje en el aula.

Para la segunda tarea de investigación en relación a los fundamentos teóricos, se utilizaron para este trabajo de investigación

- La teoría de resolución de problemas y en particular los pasos de Polya.
- Las Competiciones Matemáticas.

- Problemas en geometría del Canguro Matemático.
- Las pautas sobre geometría establecidas en los estándares curriculares establecidos por el Ministerio de Educación de Colombia.
- Teoría de la Comunidad Práctica de Wenger.

Todas las actividades se diseñaron basándose en estos fundamentos.

En relación con la tercera tarea de investigación, los estudiantes plantearon situaciones similares a los problemas dados, para aprovechar su creatividad y considerar este tipo de problemas en diferentes contextos. Aparte de planear el problema también realizaron su respectiva solución.

En relación con las actividades se presentaron problemas del Canguro Matemático donde tuvieran que utilizar los pasos de Polya como una estrategia de solución, posteriormente hacer uso de estos pasos en las siguientes actividades que abordan las siguientes temáticas: perímetro, área, propiedades de los triángulos, círculos y circunferencias. Esto generó gran expectativa a los estudiantes ya que algunos manifestaban curiosidad e interés al sentirse retados por las situaciones planteadas y querer encontrar soluciones concretas para el problema o también preguntarse qué otro tipo de estrategia pueden utilizar para resolverlo.

Se promovió el trabajo en grupo, basada en la teoría de Comunidad de Práctica de Wenger, organizando pequeños grupos de tres personas. Los estudiantes dialogaron e intercambiaron ideas. En los grupos se refutaron argumentos, se generaron dudas, surgieron interrogantes y también se hizo explicita la solución generada por cada uno de los grupos. En cada actividad, los problemas que se trabajaron en grupos, se evaluaron los indicadores generados por los componentes dela Comunidad de Práctica de Wenger las cuales son: significado, práctica, comunidad e identidad.

Para la cuarta tarea de investigación, se evidenció la importancia del uso de los problemas del Canguro Matemático en el aula para el mejoramiento de las habilidades de razonamiento matemático.

Se determinaron las dificultades y falencias que tenían los estudiantes referentes a las temáticas.

Se discutieron las soluciones por parte de los estudiantes a los problemas.

En relación a la quinta tarea de investigación, es importante destacar que en las actividades se observó que, en muchos casos, las soluciones generadas por los estudiantes no eran las esperadas. Hubo gran motivación y participación por parte de los estudiantes porque nunca habían trabajado en geometría con este tipo de problemas.

Dentro de las dificultades observadas en el proceso de la investigación pudo apreciar que en el plan de estudios del colegio son escaso los desempeños a evaluar en geometría y su tiempo de aplicación y desarrollo en el aula es muy poco. Por tal razón los estudiantes no presentaban una base adecuada en las temáticas cuando se les solicitó presentar la prueba. Después de trabajar en las actividades los estudiantes se mostraron agradecidos y motivados al observar la importancia de la geometría en este tipo de problemas y especialmente en un ambiente escolar que le exige razonar frente a un problema retador para ellos.

La evaluación de cada actividad, problema y estrategia de solución, se realizó mediante el uso de dos tablas donde se registró la evolución de los estudiantes respecto a indicadores relacionados con la resolución de problemas y la Comunidad Práctica de Wenger.

RECOMENDACIONES

A partir de la implementación de la presente investigación y las actividades propuestas en los estudiantes de grado octavo del Colegio Elisa Borrero de Pastrana y el análisis de resultados de esa aplicación, se propone las siguientes recomendaciones:

- Emplear los problemas del Canguro Matemático como motivación al aprendizaje en estudiantes desde grado preescolar hasta último grado, para identificar el mejoramiento de las habilidades de razonamiento matemático en diferentes edades.
- Hacer uso de los problemas del Canguro Matemático como herramienta de enseñanza de la geometría en un curso de 35 a 40 estudiantes.
- Utilizar los problemas del Canguro Matemático en diferentes ramas de la matemática para mejorar las habilidades de razonamiento en los estudiantes de grado octavo.
- Fomentar el trabajo en comunidad de práctica en los estudiantes para así poder generar discusiones que favorezcan en su aprendizaje y con ayuda de la intervención del docente aclarar todo tipo de dudas o inquietudes que surjan en los problemas.
- Hacer una comparación de las estrategias de solución que utilizan los niños de grados inferiores y los estudiantes de grados superiores.
- Seguir fomentando las competiciones matemáticas en los estudiantes para la enseñanza de las matemáticas y para la exploración y construcción de un nuevo conocimiento.

BIBLIOGRAFÍA

- Alda, F. L., & Hernández, M. D. (1998). Resolución de problemas. Cuadernos de Pedagogía, 31, 28-32.
- Amaya, C., & Yair, W. (2017). Influencia de los problemas reto en la construcción del concepto de área en estudiantes de grado séptimo.
- Ávila, O. Barragán, R. Barrera, F. Reyes, A. & Sepúlveda, A (2008) Segundo Seminario Nacional sobre Resolución de Problemas y el Aprendizaje de las Matemáticas. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.
- Bellot, F. (2017). From a Mathematical Situation to a Problem. Competitions for Young Mathematicians: Perspectives from Five Continents, 38
- Canguro Matemático. Pruebas 2000 hasta 2016, Niveles del 1 al 6.
- Carro, A., & Victoria, M. (2014). Las actividades extracurriculares que fomentan la resolución de problemas matemáticos para competir.
- Chacel. R. (s.f.) George Polya: estrategias para la solución de problemas
- Falk, M. (2001). Olimpiadas de Matemáticas: retos, logros (y frustraciones). Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. VIII, No. 1, pág 15.
- Falk, M. M. F. (2017). Are Mathematics Competitions Changing the Mathematics that Is Being Done and the Way Mathematics Is Done?. Competitions for Young Mathematicians: Perspectives from Five Continents, 329..
- Falk, M. MF (2017), entrevista, 4 de Mayo del 2017.
- Esteban-Romero, R. (2009). La Prova Cangur en la Comunitat Valenciana. Modelling in Science Education and Learning, 2, 3-9.

- González, E. (2014). Problemas de olimpiadas matemáticas sobre geometría. Máster de matemáticas. Universidad de Granada
- Guinjoan, M. Fortuny, J. Gutiérrez, A. (2015). Análisis del comportamiento de alumnos expertos resolutores de problemas en el contexto del concurso matemático Pruebas Cangur. Enseñanza de las ciencias
- Hodaňová, J. (2008). Mathematical Competitions at primary schools. University in Ružomberok http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf.
- M.E.N. (1998). Lineamientos curriculares. Recuperado el 15 de enero de 2016 de la URL:
- Méndez, H. V. Geometría Olímpica. Memorias de las Grandes Semanas Nacionales de la Matemática Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, 161.
- Mio, J. (2007). Historia de las olimpiadas matemáticas. Artículo organización internacional Le Kangourou sans frontières.
- Morales, A. H., & Macías, R. D. C. F. (2013). Caracterización de una comunidad de práctica orientada al uso de la matemática en la enseñanza de la ingeniería. El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, 101.
- Nieto Said, H. (2009). Resolución de problemas matemáticos. Colección Digital Eudoxus, 1(3).
- Olimpiadas Matemáticas Españolas RSME (2007). ¿Qué son las Olimpiadas Matemáticas?.España.

  http://www.olimpiadamatematica.es/platea.pntic.mec.es/_csanchez/olimpque.htm
- Oliu, M. (2015). Los problemas de los concursos de matemáticas como recurso didáctico. Ponencia
- Olsen, M. (2016). Material Didáctico Problemario: Resolución de Problemas Matemáticos. Departamento de matemáticas aplicadas y sistemas.

- Polya, G. (1973). How To Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. Stanford University, Second Edition, Princeton University Press. Princeton, New Jersey, p. 5-16.
- Ramos Palacios, L. A. (2006). Una Estrategia Metodológica para desarrollar olimpiadas matemáticas en el nivel medio del sistema educativo Hondureño (Doctoral dissertation).
- Sánchez, R. (2017), entrevista, 4 de Abril del 2017.
- Santos, L. M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica.
- Semanišinová, I., Harminc, M., & Jesenská, M. (2017). Competition Aims to Develop Flexibility in the Classroom. Competitions for Young Mathematicians: Perspectives from Five Continents, 174.
- Shum, K. P. (2017). Techniques for Solving Problems of Plane Geometry. Competitions for Young Mathematicians: Perspectives from Five Continents, 55.
- Soifer, A. (Ed.). (2017). Competitions for Young Mathematicians: Perspectives from Five Continents. Springer.
- Tsvetkova, I. (2017). Descubrimiento, Desarrollo y Manifestación de Talentos Matemáticos. En Competiciones para Jóvenes Matemáticos (pp. 187-201). Springer International Publishing.
- Valle, M. Juárez, M. & Guzmán, M. (2007). Estrategias generales en la resolución de problemas de la olimpiada mexicana de matemáticas. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 9 (2).
- Vásquez Bronfman, S. (2011). Comunidades de práctica. Educar, 47(1).

ANEXOS

PLANEACIÓN PASOS DE POLYA.

Temática a abordar y grado Los pasos de Polya como estrategia para la resolución de problemas en los estudiantes de grado octavo del colegio Elisa Borrero de Pastrana.
Importancia de la temática: La estrategia de los pasos de Polya ha generado un gran aporte en la educación matemática, debido a que la mayoría de los investigadores afirman que enseñar matemáticas con resolución de problemas genera una alta probabilidad de aprendizaje en los estudiantes. La utilización de los pasos de Polya se centra en la resolución de problemas para mejorar la interpretación y el razonamiento matemático en los problemas del Canguro Matemático, debido a que las características y propósito del problema propuesto generan en los estudiantes procesos de argumentación para la solución de dicho problema.
¿Por qué consideras importante que este tema haga parte del currículo? Las situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo en las matemáticas escolares son situaciones que superan el aprendizaje pasivo, gracias a que generan contextos accesibles a los intereses y a las capacidades intelectuales de los estudiantes y, por tanto, les permiten buscar y definir interpretaciones, modelos y problemas, formular estrategias de solución y usar productivamente materiales manipulativos, representativos y tecnológicos. (MEN 1998)

Dentro de la organización de los estándares en matemáticas se describen tres aspectos que siempre deben estar presentes, uno de ellos es la resolución de problemas. En la cual se encuentran en los cinco pensamientos matemáticos desde grado primero hasta undécimo.
¿Qué esperas que tus estudiantes aprendan? • Realizan representaciones mentales por medio de gráficas o diagramas para cada problema. • Identifican los datos irrelevantes que no están siendo explícitos en el problema. • Replantear el problema con sus propias palabras para poder comprenderlo. • Elaboran una lista de datos que identifican en el problema y que no están explícitos en ella. • Efectúan un procedimiento de solución de acuerdo a lo datos que ellos observan. • El alumno al ejercer en un problema pone en diálogo sus concepciones y cocimientos. • Elabora conjeturas, ideas y estrategias de solución sobre los problemas.

Parte II. Planeación y reflexión

Material de apoyo	• Guías impresas. • Video Beam. • Tablero. • Marcadores. • Computador.

Momentos de la clase	La clase se desarrolla en una hora y treinta minutos, estando dividida en tres fases de trabajo: con el docente, en grupo e individual. Por medio de pequeños grupos de trabajo donde los estudiantes entran en diálogo frente a los problemas conocido como la comunidad práctica de Wenger. • Saludo hacia los estudiantes. • En el tiempo inicial el docente debe realizar una retroalimentación de los conceptos básicos a utilizar en la actividad, como lo son: propiedades de los cuadriláteros, triángulos y círculos, también hacer una breve aclaración de los conceptos de perímetro y área. • En los tiempos intermedios, los estudiantes deben participar en las tres fases de la clase, para poder brindar ideas y argumentos a la solución del problema. • En el tiempo final la actividad el docente debe realizar una retroalimentación de cada una de las propiedades básicas y conceptos que se emplearon en la actividad.
Planeación	La clase inicia con un saludo hacía los estudiantes y una breve introducción que se va a realizar en el aula: la actividad a desarrollar es la implementación de la estrategia del modelo de Polya que consta de cuatro pasos para la resolución de problemas las cuales son: • ***Comprender el problema:*** Entender el problema que se quiere resolver es de gran importancia, la persona debe sentir una gran

	motivación y esfuerzo para poderlos resolver, puesto que podrá identificar que no es nada sencillo abordarlo. • ***Diseñar un plan:*** Es considerada como la idea fundamental para poder conjeturar el problema. Estas ideas surgen de los estudiantes cuando están enfrentando el problema, es preciso que el docente oriente al estudiante para que él pueda identificar cuál de esta ayuda favorece a la solución del problema planteado. • ***Llevar a cabo el plan:*** si el plan está bien formulado, su realización será factible. • ***Mirando hacia atrás:*** Identificar si la solución que genero el estudiante es coherente o satisface con los tres pasos anteriores. Posterior a darles la introducción, el docente se dirige a los estudiantes para dar inicio a la actividad de acuerdo a los establecido anteriormente: • **Trabajo con el docente:** La idea es que el docente desarrolle la actividad con cada uno de los pasos de Polya. En el primera instancia, el docente solicita a sus estudiantes volver a replantear el problema en términos que ellos puedan comprender; en este caso pueden variar la formulación del problema, para ello el docente anota en el tablero todas las ideas que surgen por parte de los estudiantes y así al final poder armar un nuevo problema. en segunda instancia el docente se dirige a sus estudiantes con la siguiente pregunta: *¿puedes comprender la pregunta que te están haciendo?, sí es así realiza una lista de los datos considerables y que no están siendo explícitos en el enunciado que*

	aportan a la solución, es necesario anotar en el tablero cada uno de los datos que observan los estudiantes. En tercera instancia el docente comienza a desarrollar el problema con cada uno de los datos que mencionaron anteriormente los estudiantes, en este caso es necesario que los estudiantes participen en la solución, su intervención es fundamental para la adquisición de los pasos de Polya como estrategia de solución. Por último se debe hacer una verificación sobre la solución del problema; satisface lo establecido con el problema, en este caso el docente debe desarrollar el problema con los datos que se mencionaron en el segundo paso y si es necesario agregar otros datos que favorezcan en la solución, posterior a esto desarrollarlo con un procedimiento diferente al realizado en el tercer paso para verificar la solución del problema. • **Trabajo en equipos:** La idea es que los estudiantes se organicen en pequeños grupos de tres personas para realizar el segundo punto. Los estudiantes deben entrar en diálogo para intercambiar ideas o sugerencias de solución para el problema. En el primer paso el docente interviene con las siguientes preguntas: *¿Puedes replantear el problema con tus propias palabras?, ¿puedes identificar la pregunta que te están haciendo?, ¿tienes dificultad para comprender le problema?* Estas preguntas ayudan a que el estudiante pueda asimilar el primer paso de Polya, ya que para muchos estudiantes es difícil entender el problema, especialmente si su comprensión lectora en baja.

	En el segundo paso el docente realiza las siguientes preguntas a los estudiantes: *¿Qué datos puedes observar?, ¿puedes identificar datos importantes en el problema pero no son explícitos en el enunciado?, ¿Cuáles son?* Posterior a realizar una lista de los datos que favorecen en la solución los estudiantes comienzan a solucionar el problema, siendo este el tercer paso de Polya. Por último con la intervención del docente se hace una verificación de la solución del problema; es necesario que el docente lo realice en el tablero para así poder intercambiar sugerencias o ideas de solución por cada uno de los equipos de trabajo y aclarar dudas e inquietudes. • **Trabajo individual:** El docente no debe hacer ningún tipo de intervención al principio, debe dejar que el estudiante pueda abordar el problema con todo lo que trabajo anteriormente. El estudiante debe estar en la capacidad de poder recordar cada uno de los aportes que realizaron en el primer y segundo punto. El docente debe ser paciente y darle un tiempo entre 10 a 15 minutos para que puedan resolver el problema, posterior a esto, seleccionar el mejor exponente de la clase para que pase al tablero y pueda exponer la solución. Allí el docente hace intervenciones para aclarar las propiedades que utilizaron. Al finalizar la clase se hará una retroalimentación por parte del docente de cada uno de los conceptos y propiedades de figuras planas que se implementaron en los problemas retadores y aclarar dudas que surgieron por cada uno de los estudiantes.

Dificultades que podrían tener los estudiantes para lograr el aprendizaje esperado	• Los estudiantes no puedan generar alguna conjetura. • No emplean las propiedades en los problemas. • Tienen problemas en comprensión lectora.
Estrategias utilizarías para superar dichas dificultades	• El docente presenta en el tablero las estrategias de solución más interesantes que generaron algunos estudiantes en cada uno de los problemas, con el fin de que el estudiante identifique el procedimiento que empleo uno de sus compañeros, pueda comprenderlo y así adaptarlo para su conocimiento. • Hacer una retroalimentación de cada una de las propiedades de las figuras planas, con el fin de aportar una ayuda en los conceptos previos del estudiante. • Generar un ambiente de lenguaje matemático en el aula para que el estudiante se vaya adaptando a términos que son desconocidos para él.
Bibliografía	Ninguna

PLANEACIÓN PERÍMETRO.

Temática a abordar y grado

La temática a abordar es *Calculando perímetros en problemas del Canguro Matemático* para los estudiantes de grado octavo en el colegio Elisa Borrero de Pastrana.
¿Por qué escogiste esa temática? El perímetro es un tema básico y fundamental en la enseñanza de la geometría para ayudar a resolver problemas de medición y construcción para los estudiantes de educación media. Una de las razones para implementar la actividad con respecto a esta temática es la comprensión de perímetro en diferentes figuras planas, las relaciones de dependencia entre las medidas, la confusión de términos y la reducción del concepto a una simple expresión o fórmula, de acuerdo a lo anterior se propone vincular el uso del concepto del perímetro a problemas del Canguro Matemático para beneficiar el aprendizaje a los estudiantes de grado octavo.
¿Por qué consideras importante que este tema haga parte del currículo? El Ministerio de Educación propone acoger elementos especiales relacionados con la interpretación, argumentación y explicación de procedimientos y soluciones propuestas. En los estándares curriculares relacionados con el concepto de perímetro, son los siguientes: • Identifico y uso medidas relativas en distintos contextos. • Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones. • Uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas. • Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza en figuras.

• Diferencio y ordeno, en objetos y eventos, propiedades y atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficies, volúmenes de cuerpo sólidos, volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes; peso y masa de cuerpos sólidos; duración de eventos y procesos; amplitud de ángulos). • Selecciono unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones. • Reconozco el uso de algunas magnitudes (longitud, área, volumen, capacidad de peso, y masa, duración, rapidez, temperatura) y algunas de las unidades que se usan para medir cantidades de la magnitud respectiva en situaciones aditivas y multiplicativas. • Describo y argumento relaciones entre el perímetro y área de figuras diferentes, cuando se fija una de estas medidas.
¿Qué esperas que tus estudiantes aprendan? • Identifican medidas de longitud en diferentes contextos. • Resolver problemas donde el perímetro este presente y pueda interactuar con otras propiedades de los cuadriláteros, círculos y triángulos. • Emplea estrategias de solución para hallar el perímetro en un problema de Canguro Matemático. • Diferencian el concepto de perímetro y área en polígonos regulares.

Parte II. Planeación y reflexión

Material de apoyo	• Guías impresas.

	• Video Beam. • Tablero. • Marcadores. • Computador.
Momentos de la clase	La clase se desarrolla en una hora y treinta minutos, estando dividida en tres fases de trabajo: con el docente, en grupo e individual. Por medio de pequeños grupos de trabajo donde los estudiantes entran en diálogo frente a los problemas conocido como la comunidad práctica de Wenger. • Saludo hacia los estudiantes. • El docente debe realizar una retroalimentación de las propiedades básicas a utilizar en la actividad, como lo son: propiedades de los cuadriláteros, triángulo equilátero y círculos. • Los estudiantes deben participar en las tres fases de la clase, para poder brindar sus ideas y argumentos a la solución del problema. • Al finalizar la actividad el docente debe realizar una retroalimentación de cada una de las propiedades básicas que se emplearon en la actividad y hacer una breve aclaración del concepto de perímetro.
Planeación	La clase inicia con un saludo hacía los estudiantes y una breve introducción de la actividad a desarrollar en el aula, consta de siete problemas con la temática de perímetro.

	Posterior a darles la introducción, el docente menciona los tres tiempos a desarrollar en el aula, los cuales son: el trabajo con el docente, trabajo en equipos y trabajo individual. Cada ítem se desarrolla de la siguiente manera: En relación a los dos primeros puntos, son los problemas que presentaron los alumnos en la prueba inicial, la idea es que el docente desarrolle estos problemas en el tablero con ayuda de los estudiantes para poder identificar las ideas, estrategias de solución y procedimientos. El nuevo proceso que realiza el docente es la implementación de los pasos de Polya; comprender el problema, elaborar un plan, emplear un plan y evaluar el resultado. • ***Problema 1:*** Para abordar el problema, el docente se dirige a los estudiantes con la siguiente pregunta: *¿Qué datos pueden identificar en el problema?,* los estudiantes podrán observar que estamos hablando de una figura geométrica en tercera dimensión, la longitud de la cinta que rodea la figura geométrica, el nudo de la cinta es prescindible y las dimensiones de la caja; 10 cm ancho, 10 cm de alto y 30 cm de largo. Después de identificar los datos el docente se dirige de nuevo a los estudiantes con una nueva pregunta: *¿Qué relación pueden identificar con respecto a las dimensiones de la caja y la cinta que lo rodea?* La idea que es que ellos observen que las dimensiones de la caja permiten calcular la cantidad de cinta que rodea cada cara, por tanto los estudiantes comienzan a realizar cálculos con los valores de las dimensiones. Relacionando la cantidad de cinta que se utiliza en las

	seis caras de la caja; para un total de doce trozos de cinta con longitud de 10 cm y cuatro trozos de cinta con longitud de 30 cm. Al operar deben obtener: $12 \times 10cm = 120\ cm, 4\ \times 30cm = 120\ cm\ por\ tanto\ 12\ cm + 120\ cm = 240cm$ • ***Problema 2:*** Para abordar el problema, el docente se dirige a los estudiantes con la siguiente pregunta: *¿Qué pueden observar en cada una de las figuras que se presentan en el problema?,* los estudiantes podrán observar que cada una de ellas es diferente, pero necesitan identificar cuál de ellas se utiliza en mayor cantidad para rodear la parcela o en esta situación que tenga una mayor longitud para poder guiar a los estudiantes, el docente realiza una nueva pregunta: *¿qué relación pueden realizar con la cerca de Mr Ale con las demás cercas rectangulares?, a*l comenzar a relacionar cada una de las parcelas rectangulares con la inicial, pueden identificar que las figuras son diferentes, para ello el docente solicita a cada uno de sus estudiantes poder mover las longitudes de un lado a otro de tal manera que forme un rectángulo, por tanto podrán observar que las longitudes son igual al rectángulo inicial, pero en la parcela de Mr Cod no se utiliza la misma longitud del rectángulo inicial. • ***Problema 3:*** El tercer punto está relacionado a los dos puntos anteriores. La idea es que los estudiantes vuelvan a emplear las ideas o estrategias de solución que realizaron en los problemas anteriores para poderlo aplicar en este nuevo problema, el docente se dirige a ellos

	por medio de esta pregunta: *¿qué datos o propiedades pueden identificar en el nuevo problema?, e*s aquí donde el estudiante debe relacionar el concepto de perímetro en figuras geométricas, recordando la propiedad del cuadrado; sus lados son iguales. De nuevo el docente se dirige con la siguiente pregunta: *¿Qué entienden por perímetro?, e*llos reconocen que es la suma de todos los lados de una figura geométrica, así que pueden relacionar el perímetro en cada figura, es decir, en el cuadrado I el perímetro es 16 m y por propiedad del cuadrado sabemos que sus lados son iguales, por tanto un lado mide 4 m, emplean mismo procedimiento en el cuadrado II sus lados son igual a 6 m, en el cuadrado III sus lados son igual a 10 m y en el cuadrado IV es igual a 16 m, hasta poder hallar la solución que es 32m^2. Los estudiantes se organizan en pequeños grupos de tres personas para poder realizar los puntos cuatro, cinco y seis. La idea es que ellos inicien un diálogo para expresar sus ideas y sugerencias en las soluciones de cada problema. El docente debe hacer intervenciones en los grupos realizando las siguientes preguntas: *¿qué puedes observar en la figura?, ¿Qué datos puedes identificar? ¿Debes emplear alguna propiedad? ¿Qué sugerencia o idea puedes emplear?* • ***Problema 4:*** Los estudiantes deben emplear la propiedad de un cuadrado (todos sus lados son iguales) de forma que pueda observar que los trozos faltantes del cuadrado equivalen a 2,5 cm y sí toman dos de estos trozos equivalen a un lado de un cuadrado. Por tanto al poder

	operar cada uno de los trozos podrán identificar que el perímetro de la figura es igual a 40 cm. • ***Problema 5:*** La idea es que los estudiantes puedan sacar una lista de los datos que tienen, referentes al problema, para esto el docente facilita trozos de papel para que puedan manipular los datos que ellos recolectaron del problema. Ellos deben identificar que al superponer los cuatro palos superiores en la longitud de 80 cm van a ocupar 56 cm; una parte de la longitud total y los espacios sobrantes son igual a 24 cm. El estudiante reconoce que sobran tres espacios iguales. Cada longitud del palo es igual a 14 cm, es decir que estos pequeños espacios solo están ocupando 8 cm del cual se obtiene un excedente, en este caso que es igual a 6 cm que equivalen a dos trozos y cada uno de ellos es igual a 3 cm. • ***Problema 6:*** una de las propiedades del rectángulo; los lados a (alto) y b (ancho) son iguales a sus opuestos. Por tanto el procedimiento que debe realizar el estudiantes es más álgebraico, ya que solo tiene conocimiento del concepto del perímetro; $2a + 2b = 16\ cm.$ La idea es que el docente pueda intervenir en el proceso del estudiante, guiándolo a la solución por medio de pruebas y errores. Una sugerencia es preguntarle a los estudiantes *¿Qué números satisfacen la ecuación?* Los estudiantes deben resolver el último problema en forma individual, para poder identificar si ellos adquirieron el concepto de perímetro, manejan

	estrategias de solución y pueden implementarlo en los problemas del Canguro Matemático. • ***Problema 7:*** El docente no debe hacer ningún tipo de intervención al principio, debe dejar que el estudiante pueda abordar el problema con todo lo que trabajo anteriormente. El estudiante debe estar en la capacidad de poder recordar cada una de las propiedades de un triángulo equilátero, círculo y cuadrado. El docente debe ser paciente y darle un tiempo entre 10 a 15 minutos para que puedan resolver el problema, posterior a esto seleccionar el mejor exponente de la clase para que pase al tablero y pueda exponer la solución. Allí el docente hace intervenciones para aclarar las propiedades que utilizaron. Al finalizar la clase se hará una retroalimentación por parte del docente de cada uno de los conceptos y propiedades de polígonos regulares que se implementaron en los problemas retadores y aclarar dudas que surgieron por cada uno de los estudiantes.
Dificultades que podrían tener los estudiantes para lograr el aprendizaje esperado	• La comprensión del concepto de perímetro. • Emplear una estrategia que permita analizar el proceso de comprensión del concepto de perímetro. • Confundir los conceptos de perímetro y área en figuras planas.

Estrategias para superar dichas dificultades	- El docente presenta en el tablero las estrategias de solución más interesantes que generaron algunos estudiantes en cada uno de los problemas, con el fin de que el estudiante identifique el procedimiento que empleo uno de sus compañeros, comprenderlo y así adaptarlo para su conocimiento sobre perímetro. - El docente debe explicar las veces que sean necesarias los pasos de Polya para que el estudiante tenga la capacidad de resolver un problema por un método de estrategia. - Por medio de un juego con figuras geométricas y una regla se le solicita al estudiante identificar el perímetro en diferentes casos, es decir, con ayuda de la regla medir cada uno de los lados de las figuras y poder emplear el concepto de perímetro, también realizarlo en otro caso como puede ser la unión de dos, tres o más figuras.
Bibliografía	M.E.N. (1998). Lineamientos curriculares. Recuperado el 15 de enero de 2016 de la URL: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf. M.E.N. (1998). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Recuperado el 15 de enero de 2016 de la URL: http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-116042_archivo_pdf2.pdf.

PLANEACIÓN ÁREA.

Temática a abordar y grado
La temática a abordar es *Calculando áreas en problemas del Canguro Matemático* para los estudiantes de grado octavo en el colegio Elisa Borrero de Pastrana.
¿Por qué escogiste esa temática? El área es un tema básico y fundamental en la enseñanza de la geometría para ayudar a resolver problemas de medición y construcción para los estudiantes de educación media. Es evidente que la comprensión del concepto de área es necesaria, no solo en el ambiente escolar o de formación académica, sino también para entender información de diversas situaciones basadas en una forma de medición u otros entornos de la vida cotidiana.
¿Por qué consideras importante que este tema haga parte del currículo? El Ministerio de Educación propone acoger elementos especiales relacionados con la interpretación, argumentación y explicación de procedimientos y soluciones propuestas. En los estándares curriculares relacionados con el concepto de perímetro, son los siguientes: • Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones. • Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de composición, transformación, comparación e igualación. • Uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas. • Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza en figuras. • Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas.

• Conjeturo y verifico resultados de aplicar transformaciones a figuras en plano para construir diseños. • Diferencio y ordeno, en objetos y eventos, propiedades y atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficies, volúmenes de cuerpo sólidos, volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes; peso y masa de cuerpos sólidos; duración de eventos y procesos; amplitud de ángulos). • Reconozco el uso de algunas magnitudes (longitud, área, volumen, capacidad de peso, y masa, duración, rapidez, temperatura) y algunas de las unidades que se usan para medir cantidades de la magnitud respectiva en situaciones aditivas y multiplicativas. • Describo y argumento relaciones entre el perímetro y área de figuras diferentes, cuando se fija una de estas medidas.
¿Qué esperas que tus estudiantes aprendan? • Comprender el concepto de área. • Diferencian los conceptos de área y perímetro en polígonos regulares. • Resolver problemas donde el perímetro este presente y pueda interactuar con otras propiedades de los cuadriláteros y triángulos. • Emplea estrategias de solución para hallar el área en un problema de Canguro Matemático. • Descomposición y recomposición de figuras para poder hallar el área.

Parte II. Planeación y reflexión

Material de apoyo	• Guías impresas.

<table>
<tr><td></td><td>

- Video Beam.
- Diapositivas.
- Tablero.
- Marcadores.
- Computador.

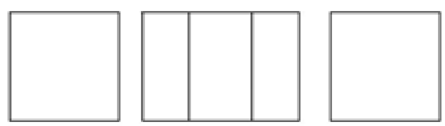
</td></tr>
<tr><td>Momentos de clase</td><td>La clase se desarrolla en una hora y treinta minutos, estando dividida en tres fases de trabajo: con el docente, en grupo e individual. Por medio de pequeños grupos de trabajo donde los estudiantes entran en diálogo frente a los problemas conocido como la comunidad práctica de Wenger.

- Saludo hacia los estudiantes.
- El docente debe realizar una retroalimentación de las propiedades básicas a utilizar en la actividad, como lo son: propiedades de los cuadriláteros y triángulos.
- Los estudiantes deben participar en las tres fases de la clase, para poder brindar ideas y argumentos a la solución del problema.
- Al finalizar la actividad el docente debe realizar una retroalimentación de cada una de las propiedades básicas que se emplearon en la actividad y hacer una breve aclaración del concepto de área.

</td></tr>
<tr><td>Planeación</td><td>La clase inicia con un saludo hacía los estudiantes y una breve introducción de la actividad a desarrollar en el aula, consta de siete problemas con la temática de área.</td></tr>
</table>

Posterior a darles la introducción, el docente menciona los tres tiempos a desarrollar en el aula, los cuales son: el trabajo con el docente, trabajo en equipos y trabajo individual. Cada ítem se desarrolla de la siguiente manera:

En relación a los dos primeros puntos, son los problemas que presentaron los alumnos en la prueba inicial, la idea es que el docente desarrolle estos problemas en el tablero con ayuda de los estudiantes para poder identificar las ideas, estrategias de solución y procedimientos.



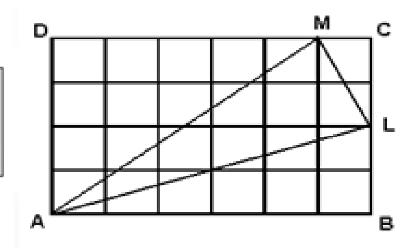


Figura 1. Problema 1 Figura 2. Problema 2

- ***Problema 1:*** Para abordar el problema, el docente se dirige a los estudiantes con la siguiente pregunta: *¿Qué datos pueden identificar en el problema?,* los estudiantes podrán observar que estamos hablando de dos cuadrados cuya longitud de los lados es igual a 9 cm y al colocar una parte del cuadrado encima de la otra parte del otro cuadrado, estas dos conforman un rectángulo cuya longitud de la base es igual a 13 cm y la altura es 9 cm. Posterior a esto, el docente se dirige de nuevo a los estudiantes con esta pregunta: *De acuerdo a los datos mencionados anteriormente, ¿Qué puedes deducir de la base del rectángulo?,* los estudiantes identifican que la base del rectángulo mide 13 cm y está dividido en tres partes; dos de ellas son iguales. En este caso el estudiante emplea la siguiente ecuación: $2a + b = 13\ cm$ o también pueden identificar que una parte de la base rectangular está conformada por la base de un cuadrado que mide 9 cm y la restante equivale a 4 cm. Como última instancia el docente se dirige de nuevo a los estudiantes con la siguiente pregunta: *¿pueden reconocer la longitud de la base rectangular que se observa en medio del rectángulo inicial?,* en esta parte el estudiante puede deducir que la base de los dos cuadrados que están superpuestos es igual a 5 cm, por tanto al efectuar la fórmula del área de un rectángulo los estudiantes podrán concluir que la respuesta es igual a 45 cm^2.

- ***Problema 2:*** Para abordar el segundo punto, el docente debe incentivar a los estudiantes con la siguiente pregunta: *algunos de ustedes puede decirme ¿cuál es la fórmula del área de un triángulo y por qué se establece esa fórmula?,* en este caso, el docente le brinda a cada estudiante una hoja cuadrada, posterior a esto, se le solicita a los estudiantes trazar una diagonal en el cuadrado, luego podrán observar que el cuadrado está divido en dos triángulos iguales, de nuevo el docente reitera la pregunta y agrega lo siguiente: *De acuerdo a la fórmula que ustedes me señalaron, ¿Si es un cuadrado sirve para triángulos rectángulos con base y altura igual?,* el estudiantes está en la capacidad de argumentar que la base y altura que corresponde al cuadrado es la misma para el triángulo, al dividirlo en dos que

	representa la cantidad de triángulos que hay en el cuadrado y así podemos obtener el valor del área de un triángulo. Posterior a finalizar el trabajo anterior, el docente se dirige a los estudiantes con la siguiente pregunta: *volviendo al problema, ¿Qué datos pueden identificar en el problema?,* la idea es que el estudiante no solo determine que la longitud del lado de un cuadrado: es igual a 1, sino que también puedan detallar que hay tres triángulos rectángulos en la figura y puedan deducir el área de cada uno de estos triángulos por medio del trabajo que realizó con el papel que tenía una forma cuadrada. Posterior a esto, el estudiante entra a realizar cálculos e identifica el área de cada uno de los triángulos que son: 10 cm^2, 1 cm^2 y 6 cm^2 al sumar estas áreas se obtiene 17 cm^2 y el área total (del rectángulo) es igual a 24 cm^2, por tanto al resta estás dos áreas se obtiene el valor del área de triángulo que se solicita hallar: 7 cm^2. Otra forma de desarrollar el problema, es por medio de descomposición y recomposición de áreas en una figura, es decir; que tipo de figura está conformando el área del triángulo, en este caso son cuadrados, pero algunos de ellos están divididos, así que al recomponer estos trozos en cuadrados se pueda determinar que hay en total 7 cuadrados. • ***Problema 3:*** El tercer punto está relacionado a los dos puntos anteriores. La idea es que los estudiantes vuelvan a emplear las ideas o estrategias de solución que realizaron en los problemas anteriores para poderlo aplicar en este nuevo problema, el docente se dirige a ellos

	por medio de esta pregunta: *¿qué datos o propiedades pueden identificar en el nuevo problema?, e*s aquí donde el estudiante debe relacionar el concepto de perímetro en figuras planas, recordando la propiedad del rectángulo; sus lados opuestos son iguales. De nuevo el docente se dirige con la siguiente pregunta: *¿Qué entienden por perímetro?, e*llos reconocen que es la suma de todos los lados de una figura geométrica, así que pueden relacionar el perímetro en cada rectángulo, por medio de la siguiente ecuación, $2a + 2b = 20\ cm$, posterior a esto el docente se dirige a los estudiantes con una nueva pregunta: *¿qué números satisfacen la ecuación?,* por medio de pruebas y errores, al identificar los dos números el estudiante podrá ver que al sumar resultados siempre será igual a 10, pero al analizar la figura inicial, ciertos números no cumplen con una condición, es decir; la base del rectángulo y su lado opuesto indican lo siguiente: $3a = 2b$, siendo *a* la altura y *b* la base de los pequeños rectángulos. El docente le indica a sus estudiantes cuál de los números que ellos identificaron en la primera ecuación también satisface con la segunda ecuación. Allí los estudiantes podrán comprobar que los números que cumplen con las dos ecuaciones son 6 cm y 4 cm, por tanto al tener estos valores se puede concluir que la base es igual a 12 cm y la altura a 10 cm del rectángulo inicial. Por tanto el área del rectángulo es igual a 120 cm^2. Otra forma de resolver el problema es: el rectángulo inicial está descompuesto por cinco rectángulos iguales, se sabe que cada uno de

	ellos tiene longitud de 6 cm x 4 cm, es decir, su área es igual a 24 cm^2. Al sumar las cinco áreas de los rectángulos el área total es 120 cm^2. Los estudiantes se organizan en pequeños grupos de tres personas para poder realizar los puntos cuatro, cinco y seis. La idea es que ellos inicien un diálogo para expresar sus ideas y sugerencias en las soluciones de cada problema. El docente debe hacer intervenciones en los grupos realizando las siguientes preguntas: *¿qué puedes observar en la figura?, ¿Qué datos puedes identificar? ¿Debes emplear alguna propiedad?, ¿Qué sugerencia o idea puedes emplear? ¿Debes emplear alguna fórmula?* • ***Problema 4:*** Los estudiantes deben hallar cada una de las áreas de todos los triángulos que pueden observar en la figura. Posterior a esto los estudiantes deben sumar el total de áreas que analizaron en todos los triángulos. • ***Problema 5:*** El rectángulo de las flores indica que la base es igual a 2 m y su área es igual a 10 m^2, por lo tanto $2\,m \times h = 10m^2$, al despejar la variable h, la altura es igual a 5 m. El total del área del jardín rectangular es igual a 30 m^2. Por tanto, sabemos que la altura del rectángulo de las flores tiene la misma longitud de la altura compuesta por el rectángulo de las flores y las verduras, para poder hallar la base, empelamos la fórmula $b \times 5\ m = 20m^2$, al despejar la variable de la ecuación, el valor de b es igual a 4 m. En última instancia el docente

	debe estar haciendo intervenciones de tal forma que los estudiantes estén cerca de una solución del problema. • ***Problema 6:*** para abordar el problema, los estudiantes deben emplear el concepto de área, más que la fórmula, es emplear el concepto en un problema. Para ello el docente se dirige a los estudiantes con las siguientes preguntas *¿Qué pueden deducir con los datos que tienen? ¿Es necesario tener otro dato o estos son necesarios?,* la idea es que el estudiante pueda identificar que las dos partes sombreadas corresponde a la mitad del área total del rectángulo. Los estudiantes deben resolver el último problema en forma individual, para poder identificar si ellos adquirieron el concepto de área, manejan estrategias de solución y pueden implementarlo en los problemas del Canguro Matemático. • ***Problema 7:*** El docente no debe hacer ningún tipo de intervención al principio, debe dejar que el estudiante pueda abordar el problema con todo lo que trabajo anteriormente. El estudiante debe estar en la capacidad de poder recordar cada una de las propiedades de un cuadrado. El docente debe ser paciente y darle un tiempo entre 10 a 15 minutos para que puedan resolver el problema, posterior a esto seleccionar el mejor exponente de la clase para que pase al tablero y pueda exponer la solución. Allí el docente hace intervenciones para

	aclarar las propiedades que utilizaron y dudas o inquietudes que tuvieron los estudiantes. Al finalizar la clase se hará una retroalimentación por parte del docente de cada uno de los conceptos y propiedades de polígonos regulares que se implementaron en los problemas y aclarar dudas que surgieron por cada uno de los estudiantes.
Dificultades que podrían tener los estudiantes para lograr el aprendizaje esperado	• La comprensión del concepto de área. • Reconocer la fórmula adecuada de área para los diferentes polígonos regulares. • Emplear una estrategia que permita analizar el proceso de comprensión del concepto de área. • Confundir los conceptos de área y perímetro en figuras planas.
Estrategias a utilizar para superar dichas dificultades	• El docente presenta en el tablero las estrategias de solución más interesantes que generaron algunos estudiantes en cada uno de los problemas, con el fin de que el estudiante identifique el procedimiento que empleo uno de sus compañeros, comprenderlo y así adaptarlo para su conocimiento sobre perímetro. • El docente debe explicar las veces que sean necesarias los pasos de Polya para que el estudiante tenga la capacidad de resolver un problema por un método de estrategia. • Utilizar como herramienta de aprendizaje el tangram para ayudar a comprender el concepto de área.

PLANEACIÓN PROPIEDADES DE LOS TRIÁNGULOS:

Temática a abordar y grado
Las propiedades de los ángulos en problemas del Canguro Matemático en los estudiantes de grado octavo del colegio Elisa Borrero de Pastrana.
¿Por qué escogiste esa temática? Los triángulos lo podemos evidenciar en nuestro entorno y esencialmente en problemas geométricos. Los triángulos presentan una vinculación con otras disciplinas, como por ejemplo; la arquitectura para diseños de edificios o estructuras. En el aula es fundamental la enseñanza de esta temática, puesto que los problemas, preguntas o incógnitas que surgen de ella son interesantes tanto para el docente como para el estudiante, también son esenciales en la enseñanza de los estudiantes, puesto que, en las pruebas se presentan con frecuencia cada año.
¿Por qué consideras importante que este tema haga parte del currículo? • Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características • Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas. • Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre fi guras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas. • Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).

• Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.
¿Qué esperas que tus estudiantes aprendan? • Clasificar los diferentes tipos de triángulos. • Clasificar los diferentes tipos de ángulos. • Aplicar construcciones auxiliares para la solución del problema. • Emplear los conceptos de perímetro y área en triángulos. • Establecer las relaciones entre propiedades. • Conocer y utilizar adecuadamente los elementos de un polígono: lados, vértices, ángulos interiores y exteriores, diagonales interiores y exteriores.

Parte II. Planeación y reflexión

Material de apoyo	• Guías impresas. • Video Beam. • Tablero. • Marcadores. • Computador.
Momentos de la clase	La clase se desarrolla en una hora y treinta minutos, estando dividida en tres fases de trabajo: con el docente, en grupo e individual. Por medio de pequeños

	grupos de trabajo donde los estudiantes entran en diálogo frente a los problemas conocido como la comunidad práctica de Wenger. • Saludo hacia los estudiantes. • En el tiempo inicial el docente debe realizar una retroalimentación de los conceptos básicos a utilizar en la actividad, como lo son: tipos de triángulos, tipos de ángulos y sus propiedades, también hacer una breve aclaración de los conceptos de perímetro y área. • En los tiempos intermedios, los estudiantes deben participar en las tres fases de la clase, para poder brindar ideas y argumentos a la solución del problema. • En el tiempo final la actividad el docente debe realizar una retroalimentación de cada una de las propiedades básicas y conceptos que se emplearon en la actividad.
Planeación	La clase inicia con un saludo hacía los estudiantes y una breve introducción de la actividad a desarrollar en el aula, consta de siete problemas con la temática de triángulos y sus propiedades. Posterior a darles la introducción, el docente menciona los tres tiempos a desarrollar en el aula, los cuales son: el trabajo con el docente, trabajo en equipos y trabajo individual. Cada ítem se desarrolla de la siguiente manera: En relación a los dos primeros puntos, son los problemas que presentaron los alumnos en la prueba inicial, la idea es que el docente desarrolle estos problemas en el tablero con ayuda de los estudiantes para poder identificar las

	ideas, estrategias de solución y procedimientos. El nuevo proceso que realiza el docente es la implementación de los pasos de Polya; comprender el problema, elaborar un plan, emplear un plan y evaluar el resultado. • ***Problema 1:*** Para abordar el problema, el docente se dirige a los estudiantes con la siguiente pregunta: *¿Qué datos pueden identificar en el problema?,* los estudiantes podrán observar que estamos hablando de dos cuadrados cuya longitud de los lados es igual a 9 cm y al colocar una parte del cuadrado encima de la otra parte del otro cuadrado, estas dos conforman un rectángulo cuya longitud de la base es igual a 13 cm y la altura es 9 cm. Posterior a esto, el docente se dirige de nuevo a los estudiantes con esta pregunta: *De acuerdo a los datos que aportaron anteriormente, ¿de qué manera se pueden organizar en el rectángulo?,* los estudiantes identifican que la base del rectángulo es igual a 13 cm y está dividido en tres partes; dos de ellas son iguales. En este caso el estudiante puede emplear una ecuación que satisface con la condición, es decir; $2a + b = 13\ cm$ o también pueden identificar que una parte de la base rectangular está conformada por la base de un cuadrado que mide 9 cm y la restante equivale a 4 cm. Como última instancia el docente se dirige de nuevo a los estudiantes con la siguiente pregunta: *¿puede identificar la longitud de la base rectangular que se observa en el medio del rectángulo inicial?,* en esta parte el estudiante puede deducir que la base de los dos cuadrados que están superpuestos es

	igual a 5 cm, por tanto al efectuar la fórmula del área de un rectángulo los estudiantes podrán concluir que la respuesta es igual a 45 cm. • ***Problema 2:*** Para abordar el segundo punto, el docente debe incentivar a los estudiantes con la siguiente pregunta: *algunos de ustedes puede decirme ¿cuál es la fórmula del área de un triángulo y por qué se establece esa fórmula?,* en este caso, el docente le brinda a cada estudiante una hoja cuadrada, posterior a esto, se le solicita a los estudiantes trazar una diagonal en el cuadrado, luego podrán observar que el cuadrado está divido en dos triángulos iguales, de nuevo el docente reitera la pregunta y agrega lo siguiente: *De acuerdo a la fórmula que ustedes me señalaron, ¿cómo lo relacionan con el papel cuadrado que tienen en sus manos?,* el estudiantes está en la capacidad de argumentar que la base y altura que corresponde al cuadrado es la misma para el triángulo, al dividirlo en dos que representa la cantidad de triángulos que hay en el cuadrado, podemos obtener el valor del área de un triángulo. Posterior a finalizar el trabajo anterior, el docente se dirige a los estudiantes con la siguiente pregunta: *volviendo al problema, ¿Qué datos pueden identificar en el problema?,* la idea es que el estudiante no solo determine que la longitud del lado de un cuadrado: es igual a 1, sino que también puedan detallar que hay tres triángulos rectángulos en la figura y puedan deducir el área de cada uno de estos triángulos por medio del trabajo que realizó con el papel que tenía una forma cuadrada. Posterior a esto, el estudiante entra a

	realizar cálculos e identifica el área de cada uno de los triángulos que son: 10 cm^2, 1 cm^2 y 6 cm^2 al sumar estas áreas se obtiene 17 cm^2 y el área total (del rectángulo) es igual a 24 cm^2, por tanto al resta estás dos áreas se obtiene el valor del área de triángulo que se solicita hallar: 7 cm^2. • ***Problema 3:*** El tercer punto está relacionado a los dos puntos anteriores. La idea es que los estudiantes vuelvan a emplear las ideas o estrategias de solución que realizaron en los problemas anteriores para poderlo aplicar en este nuevo problema, el docente se dirige a ellos por medio de esta pregunta: *¿qué datos o propiedades pueden identificar en el nuevo problema?, e*s aquí donde el estudiante debe relacionar el concepto de perímetro en figuras geométricas, recordando la propiedad del rectángulo; sus lados opuestos son iguales. De nuevo el docente se dirige con la siguiente pregunta: *¿Qué entienden por perímetro?, e*llos reconocen que es la suma de todos los lados de una figura geométrica, así que pueden relacionar el perímetro en cada figura, es decir, $2a + 2b = 20\ cm$, posterior a esto el docente se dirige a los estudiantes con una nueva pregunta: *¿qué números satisfacen la ecuación?,* por medio de pruebas y errores, al identificar los dos números el estudiante podrá ver que al sumar resultados siempre será igual a 10, pero al analizar la figura inicial, ciertos números no cumplen con una condición, es decir; la base del rectángulo y su lado opuesto indican lo siguiente: $3a = 2b$, siendo *a* la altura y *b* la base de

	los pequeños rectángulos. El docente le indica a sus estudiantes cuál de los números que ellos identificaron en la primera ecuación también cumple con la segunda ecuación. Allí los estudiantes podrán comprobar que los números que cumplen con las dos ecuaciones es 6 cm y 4 cm, por tanto al tener estos valores se puede concluir que la base es igual a 12 cm y la altura a 10 cm del rectángulo inicial. Por tanto el área del rectángulo es igual a 120 cm^2. Los estudiantes se organizan en pequeños grupos de tres personas para poder realizar los puntos cuatro, cinco y seis. La idea es que ellos inicien un diálogo para expresar sus ideas y sugerencias en las soluciones de cada problema. El docente debe hacer intervenciones en los grupos realizando las siguientes preguntas: *¿qué puedes observar en la figura?, ¿Qué datos puedes identificar? ¿Debes emplear alguna propiedad?, ¿Qué sugerencia o idea puedes emplear? ¿Debes emplear alguna fórmula?* • ***Problema 4:*** Los estudiantes deben hallar cada una de las áreas de todos los triángulos que pueden observar en la figura. Posterior a esto los estudiantes deben sumar el total de áreas que analizaron en todos los triángulos. • ***Problema 5:*** La idea es que los estudiantes puedan comenzar de atrás hacia adelante, es decir, emplear el concepto de área de forma contraría, hallando las variables (b y h), que al operar en la fórmula se obtienen los resultados que se indican en el problema. El rectángulo

que contiene en su interior las flores indica que la base es igual a 2 m y su área es igual a 10 m^2, quiere decir que la altura es igual a 5 m. El total del área del jardín rectangular es igual a 30 m^2, pero sabemos que el rectángulo que contiene a las flores ocupa un área de 10 m^2 de 30 m^2. Por tanto, sabemos que la altura del rectángulo de las flores tiene la misma longitud de la altura compuesta por el rectángulo de las flores y las verduras, para poder hallar la base, empelamos la fórmula $b \times 5\ m = 20m^2$, al despejar la variable de la ecuación, el valor de b es igual a 4 m. En última instancia el docente debe estar haciendo intervenciones de tal forma que los estudiantes estén cerca de una solución del problema.

- ***Problema 6:*** para abordar el problema, los estudiantes deben emplear el concepto de área, más que la fórmula es idealizar el concepto en un problema. Para ello el docente se dirige a ellos con las sientes preguntas *¿Qué pueden deducir con los datos que tienen? ¿Es necesario tener otro dato o estos son necesarios?,* la idea es que el estudiante pueda identificar que las dos partes sombreadas corresponde a la mitad del área total del rectángulo.

Los estudiantes deben resolver el último problema en forma individual, para poder identificar si ellos adquirieron el concepto de perímetro, manejan estrategias de solución y pueden implementarlo en los problemas del Canguro Matemático.

	• ***Problema 7:*** El docente no debe hacer ningún tipo de intervención al principio, debe dejar que el estudiante pueda abordar el problema con todo lo que trabajo anteriormente. El estudiante debe estar en la capacidad de poder recordar cada una de las propiedades de un cuadrado. El docente debe ser paciente y darle un tiempo entre 10 a 15 minutos para que puedan resolver el problema, posterior a esto seleccionar el mejor exponente de la clase para que pase al tablero y pueda exponer la solución. Allí el docente hace intervenciones para aclarar las propiedades que utilizaron. Al finalizar la clase se hará una retroalimentación por parte del docente de cada uno de los conceptos y propiedades de polígonos regulares que se implementaron en los problemas retadores y aclarar dudas que surgieron por cada uno de los estudiantes.
Dificultades que podrían tener los estudiantes para lograr el aprendizaje esperado	• La consideración errónea de alguna propiedad, tal que los requisitos puede ser motivo de conclusiones falsas. • Construcciones auxiliares o trazos para la solución de los problemas. • Dificultad al reconocer los diferentes tipos de triángulos en problemas. • Algunos estudiantes presenta dificultades al emplear las propiedades de ángulos cuando el problema solicita hallar el ángulo en un triángulo.
Estrategias a utilizar en dichas dificultades	• El docente presenta en el tablero las estrategias de solución más interesantes que generaron algunos estudiantes en cada uno de los problemas, con el fin de que el estudiante identifique el procedimiento

	que empleo uno de sus compañeros, comprenderlo y así adaptarlo para su conocimiento sobre perímetro. • Facilitar al estudiante guías de problemas con triángulos resueltos. • Utilizar regla, compás y otras herramientas que ayuden en la construcción auxiliar de los problemas para poder hallar la solución.