

**REPÚBLICA DE COLOMBIA**  
**UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO**

**Programa de Doctorado en Educación Matemática**

**OLIMPIADAS MEDIOAMBIENTALES PARA EL DESARROLLO DEL  
PENSAMIENTO MATEMÁTICO Y DE MODELACIÓN MATEMÁTICA EN  
PROYECTOS AMBIENTALES EN EL DEPARTAMENTO DE MAGDALENA**

**Proyecto de Tesis presentado como requisito para optar al título de  
Candidato a Doctor en Educación Matemática**

**M Sc. Ellery Gregorio Chacuto López**

**Bogotá D.C.**

**2023**

**REPÚBLICA DE COLOMBIA**  
**UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO**

**Programa de Doctorado en Educación Matemática**

**OLIMPIADAS MEDIOAMBIENTALES PARA EL DESARROLLO DEL  
PENSAMIENTO MATEMÁTICO Y DE MODELAMIENTO MATEMÁTICO EN  
PROYECTOS AMBIENTALES EN EL DEPARTAMENTO DE MAGDALENA**

**Proyecto de Tesis presentado como requisito para optar al título de  
Candidato a Doctor en Educación Matemática**

**Mg. Ellery Gregorio Chacuto López**

**Directores de tesis**

**Dra. Mary Falk de Losada**

**Dr. Roberto Carlos Torres Peña**

**Bogotá D.C.**

2023

**Nota de aceptación:**

---

---

---

---

---

Firma del presidente del Jurado

---

Firma del Jurado

---

Firma del Jurado

Bogotá D.C. Marzo de 2017

## **AGRADECIMIENTOS**

En primer lugar, quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mis directores de tesis, la Dra. Mary Falk de Losada y el Dr. Roberto Torres, por su guía, apoyo y confianza. Su orientación ha sido fundamental para el desarrollo de este trabajo.

También quiero agradecer al grupo de profesores del Doctorado en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño a la Dra. Diana Carolina Pérez Duarte, Dr. Miguel Ángel Borges Trenard, Dr. Rafael Sánchez Lamonedá y de forma especial al Dr. Gerardo Antonio Chacón Guerrero y al Dr. Osvaldo Jesús Rojas Velázquez por su compromiso con la formación de investigadores en esta área. Sus clases, seminarios y asesorías han sido de gran valor para mi formación.

A mis compañeros de estudio, por su apoyo, amistad y motivación; juntos hemos compartido muchos momentos de aprendizaje y crecimiento.

A mis compañeros de trabajo, por su apoyo y comprensión, gracias por su paciencia y comprensión y su contribución durante el tiempo que he dedicado a esta investigación.

Finalmente, deseo agradecer a mi familia, pareja y amigos por su apoyo incondicional a lo largo de este arduo camino. Sus palabras de aliento, y amor me brindaron la fortaleza necesaria para finalizar este proceso.

A los docentes y estudiantes de las instituciones educativas participantes en la investigación, por su colaboración y disposición, sus aportes han sido fundamentales para el desarrollo de este trabajo.

## **DEDICATORIA**

A Dios por todas las bendiciones. A mis padres Jacobo E Chacuto B y María B López M. gracias por todo el amor y esfuerzo realizado. A mi hijo Santiago David por ser mi amor y fortaleza.

## SÍNTESIS

El presente trabajo se centra en avanzar en la caracterización del pensamiento matemático y la formación científica de estudiantes de educación media en el Distrito de Santa Marta, específicamente en el contexto de las olimpiadas medioambientales, que incorporan un componente de modelación matemática, aprendizaje basado en proyectos y educación matemática crítica. El trabajo de investigación se llevó a cabo a través de un enfoque de estudio de casos que involucró a 16 estudiantes de cuatro instituciones educativas, los resultados de la tesis revelaron avances significativos en el desarrollo del pensamiento matemático de estos estudiantes, lo que sugiere que la integración teórica propuesta y el desarrollo de las olimpiadas medioambientales puede ser efectiva para estimular la capacidad de resolución de problemas y el pensamiento crítico en los estudiantes de educación media.

Uno de los logros destacados de esta tesis además de la integración de tres teorías importantes en la educación matemática, como lo son el aprendizaje basado en proyectos, la modelación matemática, y la educación matemática crítica, es la creación de una rúbrica analítica que permite valorar el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. Esta rúbrica se basa en las fases de abordaje, ataque y revisión del modelo de Mason, Burton y Stacey, proporcionando un marco sólido para evaluar el progreso de los estudiantes en

términos de sus habilidades matemáticas y su capacidad para aplicarlas a la resolución de problemas medioambientales.

Otro aporte de este trabajo es la adaptación de un modelo evaluativo como una extensión del método de la telaraña que permite valorar una tarea o proyecto a partir de la calificación de cada una de las dimensiones que lo componen. El modelo consiste en una comparación mediante el cociente del área de un polígono generado por la calificación de los evaluadores y el área total que está definida por la calificación óptima en cada dimensión. La valoración se visualiza a través de una representación gráfica y su respectiva descripción cualitativa.

Finalmente la importancia de esta investigación radica en su contribución al ámbito de la educación matemática y el cuidado ambiental, al proporcionar evidencia empírica de que la modelación matemática y el aprendizaje basado en proyectos pueden ser una herramienta efectiva para abordar desafíos ambientales. Además, la rúbrica desarrollada puede servir como una guía útil para educadores y formuladores de políticas interesados en mejorar la enseñanza de las matemáticas en el contexto de la educación media.

## **ABSTRACT**

This work focuses on advancing the characterization of mathematical thinking and scientific education of high school students in the Santa Marta District, specifically in the context of environmental Olympiads that incorporate a mathematical modeling component, project-based learning, and critical mathematical education. The research was carried out through a case study

approach involving 16 students from four educational institutions. The thesis's results revealed significant progress in the development of mathematical thinking in these students, suggesting that the proposed theoretical integration and the development of environmental Olympiads can be effective in stimulating problem-solving ability and critical thinking in high school students.

One of the salient achievements of this thesis, in addition to the integration of three important theories in mathematical education, namely project-based learning, mathematical modeling, and critical mathematical education, is the creation of an analytical rubric for assessing students' mathematical thinking development. This rubric is based on the phases of approach, attack, and revision of the Mason, Burton, and Stacey model, providing a solid framework for evaluating students' progress in terms of their mathematical skills and their ability to apply them to solving environmental problems.

"Another contribution of this work is the adaptation of an evaluative model as an extension of the spider method that allows to assess a task or project based on the rating of each of its composing dimensions. The model consists of a comparison by means of the ratio of the area of a polygon generated by the evaluators' rating and the total area that is defined by the optimal rating in each dimension. The assessment is visualized through a graphic representation and its respective qualitative description."

In conclusion, the significance of this research lies in its contribution to the field of mathematical education and environmental awareness. It provides empirical evidence that mathematical modeling and project-based learning can be effective tools in addressing environmental challenges. Furthermore, the rubric

developed can serve as a useful guide for educators and policymakers interested in enhancing mathematics instruction in the context of high school education.

# Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN .....	1
1 ESTADO DEL ARTE.....	8
1.1 Investigaciones sobre aprendizaje basado en proyectos .....	8
1.1.1 Aprendizaje basado en proyectos: Una experiencia universitaria. ....	9
1.2 Investigaciones acerca la modelación matemática .....	12
1.2.1 Modelling with authentic data in sixth grade (English & Watson, 2017) .....	12
1.2.2 Ways to teach modelling a 50 year study (Burkhardt, 2017) .....	13
1.2.3 Professional modellers`conceptions of the notion of mathematical modelling: ideas for education (Frejd & Bergsten, 2018).....	15
1.2.4 Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints (Barquero et al., 2018).....	17
1.2.5 Mathematical modelling with digital tools- a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software .....	19
1.2.6 Engaging Teachers in the Powerful Combination of Mathematical Modeling and Social Justice: The Flint Water Task (Aguirre et al., 2019) .....	21
1.2.7 Quality Teaching of Mathematical Modelling: ¿What Do We Know, What Can We Do? (Blum, 2015).....	22
1.2.8 Models and modelling for authentic STEM education: reinforcing the argument 24	
1.2.9 Towards a didactical theory for mathematical modelling .....	26
1.2.10 Creativity in students` modelling competencies: conceptualisation and measurement .....	27
1.3 Investigaciones sobre el desarrollo del pensamiento matemático .....	29
1.3.1 Modelo de John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey .....	29
1.3.2 Teaching for Robust Understanding with Lesson Study .....	35
1.4 Conclusiones del Capítulo 1 .....	38
2 MARCO TEÓRICO .....	39
2.1 Las Olimpiadas Ambientales.....	40
2.2 Educación matemática crítica.....	41
2.3 El Aprendizaje Basado en Proyectos. ....	42
2.4 Modelación matemática. ....	47
2.5 Pensamiento Matemático. ....	56
2.6 Conclusiones del Capítulo 2 .....	58
3 METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN .....	59

3.1	Tipo o enfoque de investigación.....	60
3.2	Alcance del estudio .....	85
3.3	Población y muestra .....	86
3.4	Conclusiones del Capítulo 3 .....	86
4	ANÁLISIS DE RESULTADOS .....	87
4.1	Aspectos de la educación matemática crítica, la modelación matemática y el aprendizaje basado en proyectos observados durante el desarrollo del curso formativo que favorecen el desarrollo del pensamiento matemático de estudiantes y docentes de educación media, en situaciones medioambientales .....	87
4.2	Análisis de los presupuestos teóricos que sustentan el desarrollo de oportunidades para generar proyectos que favorezcan el medioambiente en estudiantes de educación media en el Distrito de Santa Marta. ....	91
4.3	Análisis de los resultados de las actividades del curso formativo .....	99
4.4	Análisis de la percepción de estudiantes y profesores a cerca del impacto del curso en el proceso formativo de modelación matemática y formulación de proyectos.....	104
4.5	Valoración de los expertos a los proyectos presentados. ....	118
4.6	Análisis de los avances en el desarrollo del pensamiento matemático a la luz de los proyectos presentados. ....	139
4.7	Resumen de los proyectos presentados por los colegios participantes en las olimpiadas .....	147
4.8	Conclusiones del capítulo .....	149
5	CONCLUSIONES .....	150
	RECOMENDACIONES .....	153
	ANEXOS .....	155
	REFERENCIAS.....	186

## **INTRODUCCIÓN**

En la actualidad existe un interés mayúsculo a nivel mundial por el daño ambiental que la humanidad le está causando al planeta Tierra por lo cual es importante el desarrollo de una conciencia ambiental que genera proyectos efectivos que permitan convivir de mejor manera con la naturaleza y por eso el Plan de Desarrollo del Departamento del Magdalena empieza por lo ambiental, porque los recursos naturales dependen en muchos aspectos de la paz, el progreso y la equidad social; todos estos factores permeados por la educación y la responsabilidad ciudadana.

En el mundo de hoy, es necesario que todos se eduquen no sólo con una cultura de cuidado ambiental, sino con posibilidades de generar proyectos sencillos pero efectivos que contrarresten las tendencias nocivas, debido a los fenómenos del calentamiento global y los inevitables efectos que está trayendo el cambio climático. La naturaleza está enseñando a la humanidad cuánto depende de la biodiversidad y de sus ecosistemas para poder subsistir en el planeta. Esto es cierto especialmente frente a la problemática del agua, particularmente en un departamento en el cual es un bien escaso. Además, ello influye en el ahondamiento de las brechas de desigualdad socioeconómicas y de la inequidad social. La Unesco (2015) se pronuncia respecto al medio ambiente afirmando que

“el agotamiento de los recursos naturales y los efectos de la degradación del medio ambiente, incluidas la desertificación, la sequía, la degradación de las tierras, la escasez de agua dulce y la pérdida de la biodiversidad, aumentan y exacerbaban las dificultades a las que se enfrenta la humanidad” (p.28).

Ahora bien, si lo ambiental es esencial, la política social apunta a las brechas sociales más importantes, con enfoque diferencial y territorial. El Departamento del Magdalena demanda proporcionar mejores servicios de salubridad, aumentar la cobertura de agua potable y de gas natural a las viviendas, mejorar la educación, además de mejorar los índices de desnutrición. A las oportunidades de crecimiento y desarrollo de los niños, niñas y adolescentes del departamento, como a mejores condiciones de empleabilidad y acceso a oportunidades de educación superior; ahí está una gran apuesta estratégica y de inversión (Oficina Asesora de Planeación del Magdalena, 2016). Por lo expuesto anteriormente es importante y necesario generar un fuerte impacto en propiciar una cultura de cuidado ambiental que permita convivir de mejor manera con la naturaleza, mostrando formas en que la ciudadanía y en particular la juventud pueda crear proyectos de intervención sencillos pero eficaces.

Este proyecto de investigación puede hacer una contribución significativa por la importancia que tiene el entendimiento de cómo cuidar el medio ambiente en la actualidad y aportar con actividades que promuevan una cultura de cuidado del medio ambiente, que ayude a mejorar la calidad de vida de todos los seres vivos, y a la vez emplear conocimientos matemáticos que permitan contextualizar y modelar comportamientos de diversas situaciones medioambientales y plantear soluciones de mejoramiento.

Por otra parte, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es de vital importancia el contexto de aplicación de las nociones matemáticas estudiadas en el aula en los diferentes niveles del sistema educativo colombiano y en particular en la educación obligatoria básica y media. La Unesco (2015) en su objetivo para alcanzar la Educación y el Desarrollo Sostenible (EDS) propone una formación que posibilite a los estudiantes tomar decisiones y adoptar medidas responsables para cuidar el medio ambiente.

Por esta razón, importantes corrientes de la educación matemática en la actualidad centran sus esfuerzos en el estudio de situaciones reales o concretas que resulten ser significativas para los estudiantes y que proporcionen herramientas no sólo para la aplicación de las matemáticas sino también para el desarrollo del pensamiento matemático. Por su parte, las crecientes problemáticas ambientales del planeta exigen la intervención de todos los ciudadanos, y exigen del sistema educativo la formación eficaz de los estudiantes en una buena educación ambiental, dada su relevancia como arma para luchar en favor de la conservación del entorno, por lo que es importante trabajar por el mejoramiento de las relaciones con la naturaleza y el estudio de las relaciones que el ser humano establece con ella (Rodríguez, 2011).

Por otra parte, las matemáticas permiten simular los modelos y analizarlos de nuevo a la luz de los resultados. Gracias a ello se puede entender los fenómenos y predecir a cierto grado de certeza lo que vendrá (León, 2013). Para lograr el propósito de una buena educación ambiental, las matemáticas son una herramienta imprescindible ya que permiten establecer modelos que ayudan a comprender ciertos aspectos medioambientales a la vez que se contextualizan determinados contenidos matemáticos en el proceso de

enseñanza. Lo anterior implica que sería de gran utilidad intentar poner en el contexto de las matemáticas escolares aspectos medioambientales. Así se favorece el desarrollo del pensamiento matemático y se genera no solo conciencia ambiental sino convicción que todos puedan jugar un papel en prevenir y/o revertir los efectos negativos que el ser humano ha tenido en el medio ambiental.

En conclusión, el desarrollo de las olimpiadas medioambientales permite trabajar en contextos reales la problemática del medio ambiente además de desarrollar el pensamiento matemático, la creatividad y la habilidad del joven de comprometerse con temas relacionados con la ciencia, como un ciudadano reflexivo en el cuidado y preservación del medio ambiente, además de adquirir la habilidad de explicar fenómenos medioambientales científicamente y diseñar proyectos para el mejoramiento de la calidad de vida en la comunidad.

Otro aspecto fundamental de este trabajo y que se constituye en un enorme beneficio para el Departamento del Magdalena es la vinculación que se espera lograr entre escuela y sociedad a través de generar posibilidades de planear y actuar responsable y positivamente por parte de los estudiantes participantes en las olimpiadas medioambientales.

A partir de las olimpiadas medioambientales y la correspondiente estructuración y puesto en marcha de proyectos favorables al medioambiente se espera avanzar significativamente en la formación de ciudadanos críticos, defensores de los recursos naturales, capaces de vivir en armonía con la naturaleza tal como lo expresa Quintana Arias (2016). La educación ambiental debe lograr la vinculación de la escuela con la sociedad y el ser humano con el territorio.

Además, debe visibilizar la relación Ser humano – Naturaleza - Territorio, estableciendo un diálogo de sensibilización hacia el medio natural, lo que hace necesario incidir proactivamente de forma complementaria ante los recursos naturales desde las redes sociales, las redes de convivencia, las redes de establecimiento humano, y el enfoque cultural a fin de que expliquen cómo la sociedad ocupa, transforma, construye y ordena el espacio.

Las valoraciones anteriores y el estudio epistemológico inicial realizado permiten determinar el siguiente **problema de investigación**: ¿Cómo lograr que las olimpiadas medioambientales favorezcan el desarrollo del pensamiento matemático, y permiten la caracterización del pensamiento desarrollado, así como la generación y puesto en marcha de proyectos planteados desde un análisis matemático de su impacto y de cuidado del medioambiente en el Departamento del Magdalena?

Se precisa como **objeto de estudio**: el proceso de enseñanza aprendizaje de la de las ciencias y de las matemáticas

Se infiere como **objetivo general**: Avanzar en la caracterización del pensamiento matemático y del tipo de formación científica ante el panorama ambiental que se involucra en el desarrollo de olimpiadas medioambientales realizadas a través del diseño (con su respectivo componente de modelación matemática), implementación, análisis de resultados y valoración de proyectos ambientales en estudiantes de educación media del Distrito de santa Marta.

Acorde con el objetivo, el **campo de acción** se enmarca en el desarrollo del pensamiento matemático, la modelación matemática y la proyección de acciones de cuidado ambiental.

Para el cumplimiento del objetivo y la solución del problema, se presenta la siguiente hipótesis: El desarrollo de olimpiadas medioambientales realizadas a través del diseño (con su respectivo componente de modelación matemática), implementación, análisis de resultados y valoración de proyectos favorecen el desarrollo del pensamiento matemático y el cuidado proactivo del medio ambiente en estudiantes de educación media del Departamento del Magdalena.

En aras de dar cumplimiento al objetivo y lograr resolver el problema planteado, así como para guiar el curso de la tesis fueron propuestas las siguientes **tareas de investigación**:

1. Describir los aspectos de la educación matemática crítica, la modelación matemática y el aprendizaje basado en proyectos que favorecen el desarrollo del pensamiento matemático de estudiantes y docentes de educación media, en situaciones medioambientales.
2. Analizar los presupuestos teóricos que sustentan el desarrollo de oportunidades para generar proyectos que favorezcan el medioambiente en estudiantes de educación media en el distrito de Santa Marta.
3. Valorar los aspectos del pensamiento matemático promovidos por el desarrollo de proyectos medioambientales a través de la modelación matemática en estudiantes del Distrito de Santa Marta.

El **aporte práctico** radica en el diseño e implementación de olimpiadas medioambientales basadas en proyectos y la modelación matemática que promuevan el desarrollo del pensamiento matemático y la actuación responsable ante el medio ambiente. También se propone un conjunto de

actividades preparatorias basadas en proyectos relacionados con la modelación matemática y el cuidado del agua que promueven el pensamiento matemático en estudiantes de educación media.

Como **aporte teórico** se destaca presentar avances en la caracterización de los efectos de la integración de la educación matemática crítica, la modelación matemática y el aprendizaje basado en proyectos medioambientales en el desarrollo del pensamiento matemático de estudiantes y docentes de educación media del Distrito de Santa Marta.

La tesis consta de introducción, cuatro capítulos, conclusiones, recomendaciones y anexos. En el primer capítulo se realiza un análisis del estado del arte. En el segundo se proponen los fundamentos teóricos sobre el aprendizaje basado en proyectos, la educación matemática crítica, la modelación matemática, el impacto ambiental favorable, y el desarrollo del pensamiento matemático. En el tercer capítulo se describen los fundamentos metodológicos tanto de la investigación planteada como de las olimpiadas medioambientales en sí y la correspondiente generación de proyectos de cuidado medioambiental, y en el cuarto capítulo se valoran los aspectos del pensamiento matemático promovidos por el desarrollo de proyectos medioambientales a través de la modelación matemática en estudiantes del Departamento del Magdalena, así como en sus profesores y el trabajo en equipo. El documento concluye exponiendo las conclusiones y recomendaciones generadas por la investigación.

## **1 ESTADO DEL ARTE**

Las investigaciones en el campo de la enseñanza de las matemáticas y en particular el desarrollo del pensamiento matemático y su relación con los problemas reales del mundo cobra gran relevancia en la actualidad. Es así como en el TSG 22 del ICME-14 titulado “Mathematical applications and modelling in mathematics education” (Gilbert Greefrath, University of Muenster, German, lídery) se considera la importancia de explorar las relaciones entre las matemáticas y el mundo real que ocurren en entornos educativos. Uno de los subtemas es enseñar modelos matemáticos desde varias perspectivas, como perspectivas crítico-sociales o sociopolíticas.

Por otro lado, en el TSG 54 del ICME-14 titulado “Social and political dimensions of mathematics education”, se revisan los avances reportados en ICME-13 a la luz del panorama actual del cambio climático. ¿Cómo su investigación y práctica en educación matemática se relaciona con la configuración de “cambio climático” en sus localidades y fuera de ellas?

### **1.1 Investigaciones sobre aprendizaje basado en proyectos**

Entre las investigaciones que se realizan actualmente relacionadas con el aprendizaje basado en proyectos, la modelación matemática y el desarrollo del pensamiento matemático se encuentran las que se reseñan a continuación.

### **1.1.1 Aprendizaje basado en proyectos: Una experiencia universitaria<sup>1</sup>.**

En este artículo (Morales & García, 2018) implementan la metodología del aprendizaje basado en proyectos con 107 estudiantes de segundo curso del grado en educación infantil de la Universidad de Sevilla (España). Los 107 estudiantes pertenecen a dos grupos de clase diferentes, el grupo 1 formado por 56 estudiantes y el grupo 2 formado por 51 estudiantes. Se crearon 30 pequeños grupos de trabajo, formado por tríos y cuartetos. La investigación realizada tenía como finalidad realizar un cambio metodológico orientado al aprendizaje de los estudiantes universitarios empleando la metodología del ABP en la asignatura “Funciones del profesorado” con la cual se pretendía brindar a los estudiantes ciertas competencias profesionales importantes de gran ayuda a nivel profesional. Entre dichas capacidades se encuentran: Desarrollar en los estudiantes la capacidad de pensar críticamente, analizar y resolver problemas complejos, problemas del mundo real; desarrollar la capacidad de encontrar, evaluar y usar de forma apropiada los recursos de aprendizaje con los que se dispone, aplicar conocimientos sobre estrategias de actualización de la función docente para desarrollar el liderazgo y la creatividad, entre otras.

El diseño de la investigación se desarrolló en cinco etapas las cuales se relacionan a continuación:

---

<sup>1</sup> Toledo Morales, P., & Sánchez García, J. M. (2018). *Aprendizaje basado en proyectos: Una experiencia universitaria*.

1. Etapa 1: Determinar el problema a investigar. En esta etapa se describió cuáles eran los posibles temas o problemas sobre los cuales tenían que trabajar los equipos.
2. Etapa 2: Descripción y propósito del proyecto. Los estudiantes debían investigar libremente mediante la observación, entrevistas y revisión de documentos con el fin de obtener información necesaria la cual les permitiera verificar sus hipótesis.
3. Etapa 3: Especificaciones de desempeño. Los proyectos presentados debían tener los siguientes apartados: introducción, desarrollo, interpretación, análisis y discusión de los resultados, conclusión y fuentes bibliográficas.

Para evaluar el desempeño se tuvo en cuenta la siguiente rúbrica.

Rúbrica de evaluación

Aspectos a valorarse	Escala de valores			
	3 Excelente	2 Satisfactoria	1 Puede mejorar	0 Inadecuado
Contenido	La presentación muestra un notable conocimiento de los contenidos y una profunda comprensión del problema trabajado. Investigación excelente	La presentación muestra un conocimiento satisfactorio de los contenidos y comprensión suficiente del problema. Investigación adecuada	La presentación demuestra poco conocimiento del contenido o comprensión limitada del problema investigado. Investigación inadecuada	La presentación no demuestra conocimiento del contenido o del problema investigado. Muy poca o ninguna investigación
Destrezas de presentación	El equipo comunica la información, la solución, y el razonamiento de una manera clara, eficaz y atractiva. Excelentes habilidades para hablar en público y el uso de la tecnología.	El equipo comunica la información, la solución, y el razonamiento de una manera adecuada. Satisfactorias habilidades para hablar en público y el uso de la tecnología.	El equipo no comunica uno o dos de los siguientes elementos: información, solución, y razonamiento. Necesitan mejorar habilidades para hablar en público y el uso de la tecnología	El equipo no comunica información, solución, y razonamiento. Pobres habilidades para hablar en público. Ningún uso de la tecnología.
Trabajo en equipo	Los miembros del grupo aprenden interactuando y comunicándose entre sí. El trabajo es compartido en	Los miembros del grupo interactúan y se comunican adecuadamente entre sí. El trabajo es compartido,	Los miembros del grupo en su mayoría hacen sus propias cosas de manera independiente o dejan de	Los miembros del equipo trabajan de forma individual y no como un equipo. El equipo no se comunica bien.
	partes iguales entre los miembros del grupo.	pero no está dividido por igual.	comunicarse con los demás. El trabajo no se comparte equitativamente.	Los trabajos no son compartidos por igual.
Resultados de la investigación	El resultado es creativo, práctico, y aborda a fondo el problema. El resultado obtenido se aplica en el mundo real y tiene en cuenta muchos factores que lo limitan.	El resultado es práctico y aborda el problema. El resultado se aplica en el mundo real y tiene en cuenta algún factor que lo limita.	El resultado es superficial y no aborda todo el problema. El resultado no es realista y no tiene en cuenta la mayoría de los factores que lo limitan.	El resultado es insuficiente para resolver el problema. El resultado no se aplica en el mundo real e ignora factores que lo limitan.

Ilustración 1: rúbrica para evaluar el desempeño de los estudiantes.

4. Etapa 4: Reglas.

5. Etapa 5: Evaluación.

Los resultados que se obtuvieron con la investigación son los siguientes.

El empleo del ABP tiene un efecto positivo en el conocimiento de contenidos fundamentales y el desarrollo en los estudiantes de habilidades tales como la colaboración, el pensamiento crítico y la resolución de problemas. Además, se produce un aumento de la motivación y compromiso en los estudiantes.

Este artículo aportó al brindar ideas para el diseño de las olimpiadas medioambientales, esto mediante la planeación del curso formativo, las fases de las olimpiadas y la forma como se realizaría la evaluación de los proyectos de deben presentar los estudiantes en las olimpiadas.

## **1.2 Investigaciones acerca la modelación matemática**

### **1.2.1 Modelling with authentic data in sixth grade (English & Watson, 2017)<sup>2</sup>**

El objetivo de este artículo es explorar la importancia de la alfabetización estadística en los estudiantes de la escuela primaria y cómo se puede desarrollar a través del modelado con datos auténticos. La experiencia se realizó con la participación de 89 estudiantes de sexto grado con edades alrededor de los 11 años de una escuela pública de un suburbio de nivel socioeconómico medio de la capital australiana. Cabe resaltar que gran parte de los estudiantes habían participado en el estudio durante los dos años y medio anteriores.

Los estudiantes desarrollaron modelos con el objetivo de seleccionar un equipo de natación australiano para los (entonces) juegos olímpicos 2016. Para ello emplearon datos sobre los tiempos de los nadadores en varios eventos anteriores.

El proceso de modelado por parte de los estudiantes se realizó en cuatro fases: inicialmente trabajar en espacios de problemas relacionados con matemáticas y estadística; interpretar y reinterpretar contextos y preguntas problemáticas;

---

<sup>2</sup> “Inglés, LD y Watson, J. (2018). *Modelling with authentic data in sixth grade*. *ZDM*, 50, 103-115”

interpretar, organizar y operar con datos en la construcción de modelos; y sacar inferencias informales.

En el artículo se presentan varios resultados relacionados con la interpretación, organización y operación de los estudiantes sobre los datos del problema en la construcción de sus modelos. El estudio también encontró que el enfoque propuesto de modelado con datos brinda grandes oportunidades para establecer conocimientos estadísticos fundamentales subrepresentados en los grados primarios y para vincular importantes procesos de transnumeración y matematización.

Este artículo aportó dando ideas sobre los posibles problemas que los estudiantes pueden modelar de situaciones de la vida real y las fases que se podrían tener en cuenta en el proceso de modelado.

### **1.2.2 Ways to teach modelling a 50 year study (Burkhardt, 2017)<sup>3</sup>**

El objetivo de la investigación es la de compartir los resultados de un estudio de 50 años sobre la enseñanza de la modelación y el análisis de habilidades de modelación. El autor, Hugh Burkhardt, tenía como objetivo explorar los desafíos de establecer la modelación como parte integral de los planes de estudio en matemáticas y describir una secuencia de proyectos de investigación de diseño, algunos exploratorios y otros más formales, sobre el tema.

El artículo describe el desarrollo de proyectos de investigación exploratoria y de diseño formal en el transcurso de 50 años. También se menciona que se realizaron talleres de modelación con profesores de secundaria y estudiantes universitarios de matemáticas, y que se observaron y analizaron algunos de

---

<sup>3</sup> "Burkhardt, H. (2018). *Ways to teach modelling—a 50 year study*. *ZDM*, 50(1-2), 61-75."

estos talleres utilizando video, como también el trabajo realizado por los estudiantes en el desarrollo de proyectos de modelado en situaciones de la vida real, en donde el estudiante tenía como objetivo indagar, tomar datos y decisiones para poder ejecutar el proyecto. Entre los proyectos realizados por los estudiantes se encuentran: Construir un juego de mesa; construir un programa de preguntas; planificar un viaje; convertirse en un ingeniero de papel. Los estudiantes también participaban resolviendo problemas de la vida real como, por ejemplo: (1) determinar cuál debe ser la distancia mínima entre vehículos necesaria para garantizar una conducción segura; (2) un supermercado está interesado en determinar qué cantidad de cajas registradoras deben estar disponibles en un momento dado; (3) otra tarea de modelado destacada es la de estudiar un grupo de accidentes automovilístico para luego proponer recomendaciones en busca de evitar siniestros en las vías.

Como conclusión se destaca la importancia de la enseñanza de la modelación en la educación matemática y cómo puede desarrollar la alfabetización matemática y numérica de los estudiantes. También se discuten los desafíos y las oportunidades para la enseñanza de la modelación en el aula. Finalmente se sugiere que la enseñanza de la modelación puede ser una herramienta valiosa para desarrollar habilidades matemáticas y numéricas en los estudiantes.

Con este artículo brindo a mi investigación ideas para el desarrollo del curso formativo en especial la parte en la cual se muestran ideas de modelado en situaciones reales con amplia participación de los estudiantes como en la indagación, toma de datos y decisiones para el desarrollo de proyectos.

### **1.2.3 Professional modellers`conceptions of the notion of mathematical modelling: ideas for education (Frejd & Bergsten, 2018)<sup>4</sup>**

El propósito de este proyecto consistió en identificar elementos de la conceptualización de modelado matemático fundamentada en el saber académico que pueda aportar al ejercicio del modelado matemático en el ámbito educativo.

La investigación se fundamentó en un conjunto de nueve modeladores matemáticos expertos con variadas trayectorias profesionales en la disciplina.

El examen se sustentó en una pregunta de la entrevista junto con preguntas de seguimiento, excluyendo deliberadamente cualquier otra información pertinente proporcionada durante la totalidad de la entrevista. Esta elección se hizo intencionalmente al introducir la pregunta al inicio de la entrevista con el propósito de obtener respuestas espontáneas. El estudio aplicó un análisis temático para detectar los temas y patrones fundamentales en los datos de la entrevista.

La investigación identifica cuatro aspectos primordiales del modelado: descripción, comprensión, abstracción y negociación. Estos elementos reflejan atributos esenciales de los modelos matemáticos y cómo influyen en las personas involucradas en el proceso de modelado. El estudio realiza un análisis exhaustivo de cada uno de estos aspectos y examina las ventajas potenciales que podrían derivarse para la enseñanza de las matemáticas a partir de esta investigación.

---

<sup>4</sup> "Frejd, P. y Bergsten, C. (2018). *Concepciones de los modeladores profesionales sobre la noción de modelado matemático: ideas para la educación*. *ZDM*, 50, 117-127."

La investigación identificó cuatro categorías principales para clasificar las perspectivas de los participantes en relación con el concepto de modelación matemática: descripción, comprensión, abstracción y negociación. Además, el estudio examinó las posibles ventajas para la enseñanza de las matemáticas derivadas de esta investigación, entre ellas la reducción de la brecha entre el modelado en el contexto escolar y el modelado como actividad profesional. También se ofrecieron recomendaciones sobre cómo integrar y definir este concepto en la planificación curricular y se identificaron estrategias didácticas viables para diseñar actividades de modelación en el aula. Es crucial destacar que los resultados no pueden extrapolarse más allá de la muestra específica analizada.

El estudio ofrece recomendaciones para diseñar planes de estudio en modelación matemática, como la inclusión de descripción y comprensión de la dinámica de la realidad como objetivos de aprendizaje. También sugiere la enseñanza interdisciplinaria y destaca los beneficios educativos al reducir la brecha entre el modelado en la escuela y el profesionalismo. Se brindan sugerencias para la integración curricular y principios didácticos para actividades de modelación en el aula.

Este artículo se consideró para el desarrollo de la tesis por los aportes que este brinda con respecto a la identificación de estrategias didácticas viables para diseñar actividades de modelación en el aula las cuales son parte importante del curso formativo en modelación matemática.

#### **1.2.4 Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints (Barquero et al., 2018)<sup>5</sup>**

El artículo aborda varios temas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la modelación matemática en la educación. Se plantean cuestiones sobre cómo evaluar, ajustar, crear y fusionar un proceso de aprendizaje centrado en la modelación matemática en la enseñanza, cómo mantener de manera sostenible procesos de aprendizaje a largo plazo basados en la modelación, y qué desafíos deben superarse. Además, se ofrecen propuestas de instrucción respaldadas por la investigación educativa.

En la investigación se destaca las perspectivas y experiencias de varios participantes que han tomado parte en talleres y discusiones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la modelación matemática en la educación. Estos participantes representan a profesores de matemáticas de diversos niveles educativos y proceden de diferentes países.

La metodología utilizada en el estudio es cualitativa y se basa en los principios de la ingeniería didáctica que se originaron a partir de la Teoría de Situaciones Didácticas. Este enfoque metodológico consta de cuatro pasos fundamentales: identificar un fenómeno didáctico a abordar, diseñar una actividad educativa relacionada con dicho fenómeno, implementar la actividad y evaluar los resultados obtenidos. En este caso, el fenómeno didáctico en cuestión se refiere a las dificultades asociadas con la incorporación de la modelación matemática como práctica común en el aula, así como a las posibilidades de formación docente para superar estos desafíos.

---

<sup>5</sup> “Barquero, B., Bosch, M., & Romo, A. (2018). *Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints*. *ZDM*, 50, 31-43.”

Como conclusión se abordan múltiples temas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la modelación matemática en la educación. Se ofrecen propuestas de instrucción respaldadas por la investigación educativa y se analizan las dificultades y obstáculos que deben superarse al implementar la modelación matemática en la enseñanza. Entre las dificultades que se presentaron en la investigación se destacan la ausencia de nociones y conceptos sobre modelado matemático lo cual influyó de manera negativa al realizar la primera actividad la cual consistió en identificar un problema de modelado y pasar por las fases del proceso de modelación matemática. También se reflexiona sobre la importancia de llevar a cabo más experimentos de cursos para mejorar la colaboración entre educadores y participantes.

Como recomendaciones se tienen: (1) proporcionar formación adecuada a los profesores en modelación matemática y en estrategias de enseñanza efectivas. (2) Desarrollar actividades educativas que involucren a los estudiantes en la modelación matemática y les permitan aplicar sus conocimientos a situaciones del mundo real. (3) Fomentar la colaboración entre profesores de matemáticas y otros profesionales, como científicos, ingenieros y economistas, para crear actividades de modelación matemática auténticas y relevantes. (4) Superar las barreras institucionales y culturales, como la falta de recursos, el tiempo limitado y la falta de apoyo institucional, que dificultan la integración de la modelación matemática en la educación.

Este artículo aporta a mi tesis conocimiento de experiencias de procesos de formación educativa empleando la modelación, además de conocer los pasos empleados en la modelación matemática y finalmente conocer las dificultades

que se presentaron en el proceso formativo y tener en cuenta las posibles recomendaciones en este aspecto.

### **1.2.5 Mathematical modelling with digital tools- a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software<sup>6</sup>**

El proyecto descrito en este artículo busca explorar el uso de herramientas digitales, específicamente software de geometría dinámica, en el proceso de matematización y comparar el desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes que utilizan herramientas digitales versus los métodos tradicionales de papel y lápiz. Estudios previos sugieren que el uso de software de geometría dinámica puede mejorar la competencia matemática y las habilidades geométricas de los estudiantes. El estudio utilizó una muestra de conveniencia de 709 estudiantes de secundaria de dos escuelas en Alemania.

El estudio utilizó una metodología cuasi-experimental, dividiendo a los estudiantes en dos grupos: uno que utilizó software de geometría dinámica y otro que utilizó métodos tradicionales de papel y lápiz. Los estudiantes trabajaron en tareas de modelado matemático durante cuatro lecciones de 45 minutos, y se observó a los maestros y estudiantes durante el proceso. Además, se recopilaron datos a través de cuestionarios y hojas de observación. Aunque el estudio no fue un ensayo controlado aleatorio, los resultados de estudios previos sugieren que el uso de software de geometría dinámica puede mejorar la competencia matemática y las habilidades geométricas de los estudiantes.

---

<sup>6</sup> "Greefrath, G., Hertleif, C. y Siller, HS (2018). Modelado matemático con herramientas digitales: un estudio cuantitativo sobre matematización con software de geometría dinámica. *Zdm*, 50, 233-244."

El estudio no encontró diferencias significativas en el rendimiento matemático entre los estudiantes que utilizaron software de geometría dinámica y los que utilizaron métodos tradicionales de papel y lápiz. Sin embargo, se observó una tendencia en que los estudiantes que utilizaron el software de geometría dinámica tuvieron un rendimiento ligeramente peor en la parte de matematización de la prueba de modelado matemático que el grupo de control que utilizó papel y lápiz. Aunque los resultados de este estudio no son concluyentes, estudios previos sugieren que el uso de software de geometría dinámica puede mejorar la competencia matemática y las habilidades geométricas de los estudiantes.

Se sugiere que se requiere una mayor investigación para obtener una comprensión más profunda sobre cómo la utilización de software de geometría dinámica puede influir en el desempeño de los estudiantes en las actividades de modelado matemático. Además, el estudio resalta la relevancia de tomar en consideración el aspecto temporal y la duración de las intervenciones, así como la necesidad de ser conscientes de las variaciones en las tareas y los métodos de evaluación empleados.

Este artículo ofrece a mi investigación conocimiento sobre el uso de herramientas digitales empleadas en el proceso de modelado lo cual es importante dado que en el curso formativo de las olimpiadas medioambientales se emplean herramientas se emplea un software en una de las actividades y es importante conocer de otras experiencias en este aspecto.

### **1.2.6 Engaging Teachers in the Powerful Combination of Mathematical Modeling and Social Justice: The Flint Water Task (Aguirre et al., 2019)<sup>7</sup>**

Este artículo trata sobre dos principales desafíos en la formación de docentes en matemáticas, siendo ellos la orientación hacia la comprensión y aplicación de la justicia social y la modelación matemática como contenido y práctica de matemáticas. El desafío de trabajar la modelación matemática y la justicia social de una forma sinérgica es abordado por medio de una situación social que se presentó en la ciudad de Flint en el estado de Michigan, en donde había un problema social y ambiental de contaminación del agua con plomo, situación que impactó de diversas maneras a los habitantes de esa ciudad.

El desafío en la formación de docentes en los aspectos de modelado y justicia social fue llamado **el problema de agua de Flint FWT**; con esta experiencia se buscaba fortalecer la comprensión de los maestros sobre los modelos matemáticos y promover el uso de las matemáticas para analizar y criticar situaciones de equidad de tal forma que tanto las matemáticas como las situaciones sociales se traten de manera significativa.

El FWT fue desarrollado por los cuatro autores con futuros docentes de primaria y secundaria en cursos de métodos y con profesores en ejercicio en proyectos de desarrollo profesional financiado por subvenciones. Para las secciones se utilizaron materiales curriculares de enseñanza compartidos que incluían imágenes, vídeos de noticias, artículos, entre otros. Las fuentes de datos primarios con las cuales se pretendía estudiar la efectividad de la innovación se consiguieron de un trabajo de formación de 19 docentes de

---

<sup>7</sup> Aguirre, J. M., Anhalt, C. O., Cortez, R., Turner, E. E., & Simic-Muller, K. (2019). Engaging teachers in the powerful combination of mathematical modeling and social justice: The Flint water task. *Mathematics Teacher Educator*, 7(2), 7-26.

matemática en ejercicio de grados 4 – 9 quienes habían participado en un curso de 40 horas de trabajo en modelado matemático antes de participar en el FWT.

Entre las conclusiones dadas por los docentes participantes en el FWT se encuentran: (1) los maestros estuvieron de acuerdo que modelar problemas genera más aportes que inconvenientes; (2) además que los modelos matemáticos incluían matemáticas realmente buenas y desarrollaban en los estudiantes un pensamiento matemático diverso; (3) además una tarea de trabajo como FWT beneficia a los estudiantes debido a su relevancia y los vínculos de las matemáticas con el mundo real.

Uno de los inconvenientes mencionados fue la cantidad de antecedentes necesaria para aprender sobre la crisis y que algunos estudiantes se vuelven políticos en sus conversaciones y se alejan de la tarea. (Aguirre et al., 2019)

Este trabajo se considera importante para el desarrollo de la presente investigación ya que aporta ideas para la metodología específicamente en el desarrollo de las olimpiadas, tipo de problemas y la construcción de un seminario de modelación matemática con docentes y estudiantes.

### **1.2.7 Quality Teaching of Mathematical Modelling: ¿What Do We Know, What Can We Do? (Blum, 2015)<sup>8</sup>**

El tema principal de este artículo es la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el ámbito de las relaciones entre el mundo matemático y la realidad. El objetivo es mostrar los aspectos más importantes relacionados con

---

<sup>8</sup>“Blum, W. (2015). *Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do?* In *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education* (pp. 73-96). Springer, Cham.”

la enseñanza de aplicaciones del modelado a nivel de la escuela secundaria. Además, se tratan aspectos teóricos tomando como referentes distintos autores entre estos Pollak, Freudenthal, Burghes, Kaiser, Niss, etc., también se tratan los aspectos empíricos, la formación del profesorado y se muestran ejemplos concretos del proceso de modelado.

Con respecto a los aspectos teóricos, se tratan definiciones básicas de los procesos de modelado, dificultades encontradas en el proceso, y recomendaciones de pasos para tener en cuenta en el desarrollo de un proceso de modelado matemático. La metodología empleada fue la de analizar diferentes investigaciones sobre lo que se sabe del modelado matemático, por ejemplo, materiales de Shell Center en Nottingham, el proyecto UCSMP, actividades de obtención del modelo de Richard Lesh, etc.

El modelado matemático es una actividad bastante exigente que requiere de ciertos conocimientos matemáticos, extramatemáticos e ideas conceptuales, además de suposiciones y actitudes apropiadas. Estas demandas cognitivas conducen a la dificultad empírica del proceso de modelado. Cada paso en el proceso de modelado conduce a una barrera o potencial de bloqueo. Por ejemplo, en el paso de simplificar y estructurar, los estudiantes temen el realizar suposiciones por sí mismos, y, por otro lado, el validar es un paso que pocas veces es tenido en cuenta en las soluciones de los estudiantes. Otro resultado encontrado en la investigación es que los estudiantes carecen de estrategias para resolver problemas de la realidad.

Entre los aspectos importantes para una metodología de enseñanza de aplicaciones de modelado se encuentran: Emplear el tiempo de forma eficaz,

separar el aprendizaje y la evaluación, emplear los errores de los estudiantes de forma constructiva, activar cognitivamente a los estudiantes, crear un equilibrio entre la independencia de los estudiantes y las orientaciones del profesor. Adicionalmente, las actividades de los estudiantes deben estar acompañadas de reflexión y visión retrospectiva en busca de mejora continua en los procesos, así como tener en cuenta una alta gama de ejemplos adecuados. Las tecnologías digitales pueden ser una herramienta poderosa en las actividades de modelado dado que las computadoras pueden ser útiles para experimentos, simulaciones, visualizaciones o cálculos (Blum, 2015). Varios estudios de casos han demostrado que, de hecho, los estudiantes de secundaria pueden aprender el modelado matemático si se supone que se tiene una enseñanza de calidad.

La implementación de aplicaciones de modelado debe ser abordada de forma sistemática con todas las componentes del sistema integradas: currículo, estándares, evaluación y formación de los docentes.

Este artículo se considera importante para la presente investigación debido a que aporta ideas en el proceso de modelado matemático, además aporta aspectos teóricos de la modelación matemática al tratar definiciones básicas de los procesos de modelado y dificultades encontradas en el proceso.

### **1.2.8 Models and modelling for authentic STEM education: reinforcing the argument.<sup>9</sup>**

Este escrito se hace con el fin de ampliar el pensamiento sobre los modelos y el modelado para que se pueden utilizar como una especie de base, con el fin de ayudar a fomentar la educación STEM (Science, Technology, Engineering

---

<sup>9</sup> "Hallström, J. y Schönborn, KJ (2019). Modelos y modelaciones para una auténtica educación STEM: reforzando el argumento. *Revista Internacional de Educación STEM*, 6 (1), 1-10."

and Mathematics) y así mismo la alfabetización de estas mismas de una forma integrada y auténtica. Como objetivo principal se tiene el de sintetizar publicaciones claves que documenten las relaciones que existen entre la autenticidad, los modelos, el modelado y la educación STEM. Las implicaciones que posee dicha síntesis son las siguientes. La autenticidad como ya se había mencionado, que debe verse como una piedra angular de la alfabetización STEM. Los modelos y todos los procesos de modelado pueden ser los causantes del cierre de la brecha entre las disciplinas STEM, todo esto a través de prácticas genuinas. Los modelos y el modelado deben usarse como un intermediario para así promover la alfabetización STEM y el intercambio de conocimientos e ingenio en su marco, aspecto que puede ser tanto dentro como fuera de las disciplinas STEM. Las actividades de modelado también pueden servir como una especie de ruta de importancia que va en camino hacia la educación STEM auténtica.

La disciplina de procesos de modelado auténticos debe fundamentarse en marcos explícitos y probados que se basen en la práctica de las disciplinas STEM. La educación STEM auténtica debe estar impulsada por el crecimiento de la colaboración entre la materia STEM en simultaneidad con el mantenimiento de la integridad de cada materia. Si por otro lado se le quiere reforzar la visión, es fundamental la utilización de cualquier actividad educativa de forma auténtica y que ella se base en los modelos respaldados por marcos de referencia que se evidencian y recomendaciones para la práctica docente. Por lo tanto, es obligatorio que se investigue más con respecto a las pedagogías que se fundamentan en modelos para las aulas y espacios de educación STEM con el fin de coadyuvar a una alfabetización STEM integrada.

Este artículo es importante para el desarrollo de esta investigación porque aporta ideas sobre los procesos de modelado y ejemplos del empleo de modelos matemáticos en la realidad.

### **1.2.9 Towards a didactical theory for mathematical modelling<sup>10</sup>**

El objetivo de la investigación de (Kaiser et al., 2006) es mostrar los avances en una teoría en desarrollo en la enseñanza y aprendizaje de los modelos matemáticos. La investigación es desarrollada viendo el estado actual de las investigaciones en la enseñanza y aprendizaje de los modelos matemáticos tomando como referentes los estudios realizados por diferentes investigadores. Las investigaciones en el campo de la enseñanza y aprendizaje de los modelos matemáticos tienen mucho trabajo por realizarse y ese trabajo depende de la noción de teoría que se esté usando. Se necesita mucha más investigación, en especial para mejorar la comprensión en niveles micro, es decir, entender las diversas situaciones que se presentan en los contextos educativos en los cuales los estudiantes participan en actividades de modelado.

En la mayoría de los artículos se desarrolla una descripción general precisa de un proceso de modelado matemático como una herramienta para distinguir las competencias que se encuentran en el modelado, las dificultades presentadas por los estudiantes y los desafíos que se presentan para la enseñanza de las matemáticas. Como resultado de la investigación se encuentra la identificación de diferentes modelos del proceso de modelado general que se han utilizado para diferentes tipos de investigaciones.

---

<sup>10</sup> "Kaiser, G., Blomhøj, M., & Sriraman, B. (2006). *Towards a didactical theory for mathematical modelling*. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 82-85."

Por otro lado, de cara al futuro se plantean interrogantes relacionados con si las actividades de modelado promueven o no la competencia matemática, y en caso de ser así, ¿qué tipo de alfabetización promueven?

Este artículo se considera importante para esta investigación porque aporta información sobre los diferentes procesos de modelado lo cual es relevante para el proceso de modelado que se empleará en el curso formativo.

### **1.2.10 Creativity in students' modelling competencies: conceptualisation and measurement<sup>11</sup>**

En este artículo (Lu & Kaiser, 2021) plantean como objetivo principal proponer un mayor desarrollo de la conceptualización de las competencias del modelado matemático haciendo énfasis en diversas dimensiones de la creatividad. Teniendo en cuenta la complejidad del modelado matemático y el hecho de ser el mismo un constructo multidimensional, se propone un instrumento de evaluación complejo cuyo objetivo es evaluar las competencias de modelado de los estudiantes incorporando la creatividad.

La metodología del estudio adopta aspectos de la investigación tanto cualitativa como cuantitativa en la evaluación de las competencias de modelado y de los aspectos de la creatividad (utilidad, fluidez y originalidad), las cuales son consideradas de vital importancia en todas las fases del proceso de modelado. Los participantes del estudio fueron 107 estudiantes chinos (23 niñas y 84 niños) con edades entre 16 y 18 años quienes eran estudiantes de 23 escuelas de secundaria superiores en 19 ciudades de China. Estos estudiantes asistieron a un campamento de verano centrado en el modelado. Los

---

<sup>11</sup> "Lu, X., & Kaiser, G. (2021). *Creativity in students' modelling competencies: conceptualisation and measurement. Educational Studies in Mathematics, 1-25.*"

participantes habían realizado de uno a dos años de estudios en la secundaria superior, se esperaba que hubieran adquirido los conocimientos matemáticos prescritos por los estándares curriculares centralizados, y además tuvieran experiencia en actividades de modelaje matemático en secundaria lo cual era un requisito para poder participar en el estudio.

Las tareas de modelado realizadas por los estudiantes fueron seleccionadas para el estudio de la creatividad debido a sus propiedades; por otro lado, las actividades tenían el potencial de promover varios enfoques de modelado y múltiples soluciones. Debido a las características de las tareas, necesitaban competencias de modelado integrales y actitudes de solución creativa.

Con respecto a los resultados obtenidos, se tiene que en general los estudiantes no se desempeñaron bien en los tres aspectos de la creatividad. Alcanzaron el nivel más alto de utilidad en la tarea 3 y el nivel más bajo en la tarea 2, pero más de la mitad de los estudiantes solo alcanzó el nivel medio de utilidad, lo que implica que solo fueron capaces de resolver la tarea en sí misma en lugar de poder ir más allá de los confines de ella.

En general, los hallazgos enfatizan que es posible conceptualizar las competencias de modelado incorporando la creatividad y medir estas competencias al incluir aspectos de la creatividad.

Este artículo se considera importante para la investigación porque aporta ideas sobre una de las dimensiones (la creatividad) a evaluar en los proyectos presentados por los estudiantes en las olimpiadas, y se muestran algunos aspectos importantes de la creatividad como lo es la originalidad, fluidez y utilidad, además, del desarrollo conceptual del proceso de modelado.

### **1.3 Investigaciones sobre el desarrollo del pensamiento matemático**

#### **1.3.1 Modelo de John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey<sup>12</sup>**

El modelo de J. Mason, L. Burton y K. Stacey “Thinking Mathematically (Pensar Matemáticamente)” utilizado en todos los niveles escolares por estudiantes y docentes de muchos países para desarrollar la capacidad de razonamiento matemático, se considera de vital importancia en este trabajo para el desarrollo del pensamiento matemático teniendo en cuenta que presenta una ruta clara de cómo se puede mejorar el razonamiento a partir de la resolución de problemas y la modelación matemática siguiendo los siguientes pasos o fases.

1. Atacando los problemas concienzudamente;
2. Reflexionando sobre la experiencia acumulada;
3. Conectando las impresiones recibidas con la acción;
4. Estudiando cuidadosamente el proceso de la resolución de los problemas; y
5. Observando cómo encaja lo que vas aprendiendo con tu propia experiencia.

---

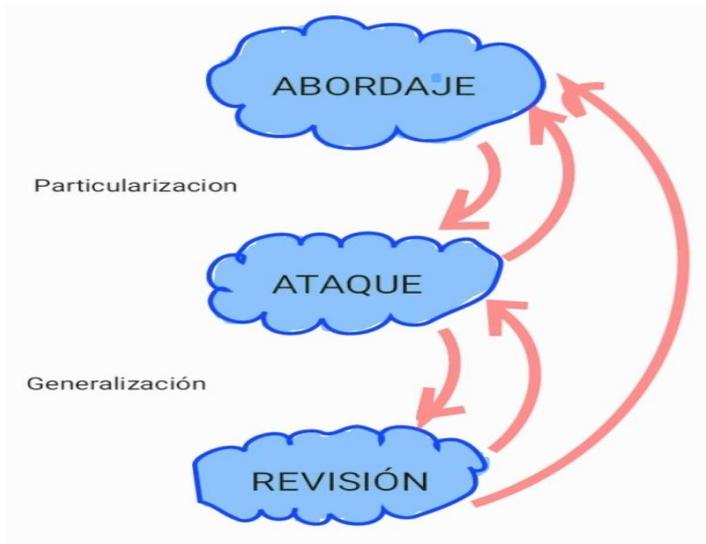
<sup>12</sup> “García Velasco, F. A. *Desarrollo del pensamiento espacial en estudiantes de grado 6° a 9° a través de resolución de problemas haciendo uso del ajedrez como fuente motivacional de aprendizaje (Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Colombia).*”

El modelo sustenta esencialmente cinco ideas básicas, que son las siguientes:

1. Tú mismo puedes pensar matemáticamente.
2. El razonamiento matemático puede mejorarse con la práctica unida a la reflexión.
3. El razonamiento matemático viene motivado por una situación en la que se mezclan contradicciones, tensiones y sorpresas.
4. El razonamiento matemático se mueve en una atmósfera cuyos integrantes principales son preguntas, reto y reflexión.
5. El razonamiento de tipo matemático te ayudará a entender mejor a ti mismo y al mundo que te rodea.

En el modelo que propone tres fases, abordaje, ataque y revisión. Sostiene que el paso de una fase a otra corresponde a un cambio de parecer, del que resuelve, con respecto al problema, y refleja el progreso que se está o no consiguiendo la solución del problema.

Fases para la resolución de problemas.



**Ilustración 2:** Modelo de Mason, J. Burton, L. y Stacey, K. (1992). [Figura]. *Pensar Matemáticamente* (p. 39).

Las tres fases se desarrollan de manera natural a partir de los procesos matemáticos fundamentales: particularización y generalización. Se comienza por interpretar un problema por medio de ejemplos que sean muy concretos y que inspiren confianza, sin intentar, por el momento, resolver el problema mismo. Entonces, y solo entonces, nuevas particularizaciones muy bien seleccionadas podrán ayudar a hacerse la idea de lo que va pasando. Y de ahí es de donde precisamente puede salir la solución. Intentar dar un sentido a un modelo subyacente se llama generalizar. Significa observar que hay ciertos aspectos comunes a distintos casos particulares, e ignorar, en cambio, otros aspectos (J. Mason, L. Burton y K. Stacey., 1992, p. 35)

Este proceso completo constituye la esencia del pensamiento matemático.

**PARTICULARIZAR** significa escoger ejemplos

1. Aleatoriamente, para hacerse una idea del significado del problema;

2. Sistemáticamente, para preparar el terreno a la generalización;
3. Hábilmente, es decir, con astucia, para comprobar la generalización.

En el caso de que no se vislumbre ninguna ley general, particularizar significa simplificar el problema, haciéndolo más concreto o específico, hasta que sea posible hacer algún progreso.

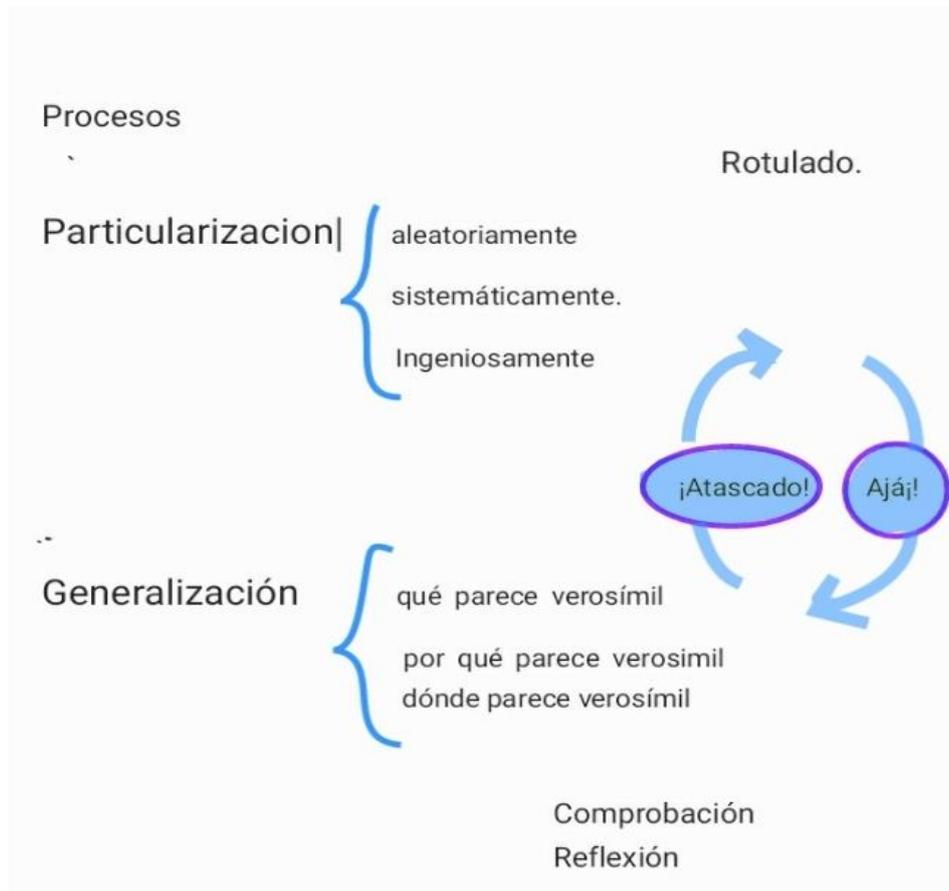
**GENERALIZAR** significa descubrir alguna ley general que indique

4. QUÉ parece ser cierto (una conjetura).
5. POR QUÉ parece que es cierto (una justificación)
6. DÓNDE parece que es cierto, esto es, un planteamiento más general del problema (¡otro problema!).

Se ilustra de la siguiente manera este proceso:

### **Figura**

Proceso de Particularización y Generalización.



**Ilustración 3:** Modelo de Mason, J. Burton, L. y Stacey, K. (1992). [Figura]. *Pensar Matemáticamente* (p. 36).

### Fase de abordaje

Esta fase es de mucha importancia y, por lo tanto, una fase de abordaje puede y debe existir siempre. El trabajo, en esta fase prepara el terreno para un posterior ataque eficaz, y es, por tanto, esencial que se le dedique el tiempo que sea necesario.

La fase de abordaje puede resumirse en ¡léelo atentamente!, y comienza cuando se enfrenta con el problema. Entonces el trabajo en la fase de abordaje consiste en formular el problema de forma precisa, y en decir exactamente qué es lo que se quiere hacer. Esto se puede abordar de dos maneras distintas. Una manera es conocer la información que se da y determinar qué es lo que se pregunta realmente. La otra manera es hacer unos preparativos técnicos para

el ataque central (segunda fase), que puede consistir en decidir una notación a utilizar o una forma de anotar los resultados de las particularizaciones.

J. Mason, L. Burton y K. Stacey, Estructuran el trabajo en la fase de abordaje respondiendo a las tres preguntas siguientes, sin importar el orden que se haga:

1. ¿Qué es lo que SÉ?
2. ¿Qué es lo que QUIERO?
3. ¿Qué puedo USAR?

Esta fase puede darse por concluida cuando somos capaces de representar y organizar la información mediante símbolos, imagen, tablas o gráficos (Morelos, Salvador, 2012, p. 16)

### **Fase de ataque**

En esta fase las actividades matemáticas son variadas y complejas, en ella es importante la toma de decisiones acerca de la forma de desarrollar la estrategia elegida en la fase anterior. En esta fase aparecerán los estados de ¡Ajá! cuándo se encuentre algún camino posible o de ¡Atasco! cuándo el camino se escabulla de la vista (Piñeiro, Pinto, Díaz, 2017).

Se fundamenta en las siguientes razones.

El tránsito entre las fases de trabajo con el problema no se realiza de forma lineal.

La resolución de problemas se concibe como un proceso dialéctico, donde las tareas pueden sufrir altibajos, es decir, se puede avanzar, también retroceder.

Esta característica le otorga singularidad al modelo.

La persona que resuelve el problema tiene un papel fundamental, ya que sus características psicológicas son un recurso más a utilizar en el logro de su objetivo. Además, la concepción del problema es de gran importancia didáctica, lo que se debe a:

1. Se le da un enfoque positivo al hecho de no poder avanzar en la resolución del problema.
2. Se le asigna una gran importancia a la fase de revisión, con frecuencia no abordada con suficiente profundidad.
3. El modelo no se presenta como un planteamiento estructurado sobre la resolución de problemas, sino que trasciende y analiza lo que constituye el pensamiento y la experiencia aportada por la matemática, ilustrando una manera de enfocar la vida al mismo tiempo que posibilita conocerse uno mismo.

### **Fase de Revisión**

Al lograr conseguir una solución al problema, se hace necesario revisarla y en lo posible generalizarla en un contexto más amplio donde se puedan comprobar los cálculos y los diferentes razonamientos realizados, en todo caso, siempre reflexionando si es la mejor manera de solucionar el problema.

### **1.3.2 Teaching for Robust Understanding with Lesson Study<sup>13</sup>**

En este artículo Schoenfeld (2017) describe dos importantes enfoques para el desarrollo profesional, el cual se identifica como TRU - Lesson Study, en

---

<sup>13</sup> "Schoenfeld, A., Dosalmas, A., Fink, H., Sayavedra, A., Tran, K., Weltman, A., ... & Zuniga-Ruiz, S. (2019). *Teaching for robust understanding with lesson study*. In *Theory and practice of lesson study in mathematics* (pp. 135-159). Springer, Cham."

donde, el primer enfoque es el marco de trabajo de enseñanza para una comprensión robusta (TRU) y el segundo el estudio de lección (LS).

En el marco TRU Schoenfeld describe los rasgos principales para un aprendizaje equitativo y sólido en las aulas de matemáticas. El marco TRU se centra en cinco dimensiones claves de los entornos de aprendizaje.

### **1.El contenido.**

La medida en que las estructuras de actividades del aula brindan oportunidades para que los estudiantes se conviertan en pensadores matemáticos conocedores, flexibles e ingeniosos es tomada en cuenta. Las discusiones son enfocadas y coherentes, y brindan oportunidades para aprender ideas, técnicas y perspectivas matemáticas, hacer conexiones y desarrollar hábitos mentales matemáticos productivos.

### **2. Demanda cognitiva.**

La medida en que los estudiantes tienen oportunidades para lidiar y dar sentido a ideas matemáticas importantes y su uso es tomada en cuenta aquí. Los estudiantes aprenden mejor cuando se les desafía de manera que proporcionen espacio y apoyo para el crecimiento, con una dificultad de tarea que va de moderada a exigente. El nivel de desafío debe ser propicio para lo que se ha llamado lucha productiva.

### **3.Acceso equitativo.**

La medida en que las estructuras de actividades del aula invitan y apoyan la participación de todos los estudiantes en el aula con el contenido matemático básico que aborda la clase es tomada en cuenta en este punto. Las aulas en las que un pequeño número de estudiantes obtienen la mayor parte del "tiempo de

emisión" no son equitativas. Sin importar cuán rico sea el contenido, todos los estudiantes deben participar de manera significativa.

#### **4. Agencia, propiedad e identidad.**

Se refiere aquí a la medida en que los estudiantes tienen oportunidades para “andar el camino y hablar lo que se habla” para contribuir a las conversaciones sobre ideas matemáticas, construir sobre las ideas de otros y hacer que otros construyan sobre las suyas - de maneras que contribuyan a su desarrollo personal (la voluntad de participar), ¿apropiarse del contenido? y desarrollar identidades positivas como pensadores y aprendices

#### **5. Evaluación formativa.**

Aquí se hace referencia a la medida en que las actividades del aula provocan el pensamiento de los estudiantes y las interacciones posteriores responden a esas ideas, construyendo sobre comienzos productivos y abordando malentendidos emergentes; la instrucción que empodera "encuentra a los estudiantes donde están" y les brinda oportunidades para profundizar sus conocimientos.

Las dimensiones (2-3-4-5) se enfocan en las experiencias de los estudiantes con las matemáticas y los impactos de esas experiencias en su desarrollo y comprensión matemática.

Este trabajo es tenido en cuenta para la presente investigación porque se considera pertinente por las características propias de TRU y lo que se espera con el desarrollo de las olimpiadas, que los estudiantes participantes mediante la experiencia en las olimpiadas adquieren habilidades matemáticas como hacer conexiones y desarrollar hábitos mentales matemáticos productivos,

además de poder participar de manera significativa, analizando, siendo críticos en busca de posibles soluciones a distintos problemas en actividades grupales, y así mismo asumir los distintos desafíos con una actitud empoderada de crecimiento personal en lo académico y social.

#### **1.4 Conclusiones del Capítulo 1**

Hasta el momento con lo desarrollado en el presente informe y lo analizado en los diferentes trabajos de investigación consultados se puede precisar que: algunos investigadores como Morales & García, Joseph S Krajcik, entre otros, ven en el aprendizaje basado en proyectos -ABP- una metodología importante que brinda un efecto positivo en cuanto al conocimiento y dominio de ciertos contenidos. Además, promueve el desarrollo de habilidades como son: la colaboración, el pensamiento crítico, la resolución de problemas, y, al tratar problemas realmente importantes para los estudiantes, se genera una mayor motivación y compromiso de estos en llevar a final término el proyecto

Por otro lado en cuanto a la modelación matemática se destaca el artículo de Kaiser et al. (2006) en el cual se muestran avances teóricos en la enseñanza y aprendizaje de los modelos matemáticos, así como también se destaca el trabajo realizado por Blum (2015) en el cual se muestran los aspectos más importantes relacionados con la enseñanza de aplicaciones de modelado a nivel de la escuela secundaria.

## **2 MARCO TEÓRICO**

A continuación, se presentan los elementos teóricos que fundamentan la caracterización del pensamiento matemático y del tipo de trabajo que se involucra en el desarrollo de olimpiadas medioambientales realizadas a través del diseño (con su respectivo componente de modelación matemática), implementación, análisis de resultados y valoración de proyectos ambientales.

En ese sentido, el tema del cuidado del medio ambiente se ha convertido en las últimas décadas en un asunto de vital importancia para la humanidad. En Colombia, los Ministerios de Educación Nacional y de Ambiente, Vivienda y Desarrollo Territorial adelantan estrategias para la inclusión de la dimensión ambiental en la educación formal a partir de las políticas nacionales educativa y ambiental, y la formación de una cultura ética en el manejo del ambiente, mediante la definición y puesta en marcha de los Proyectos Ambientales Escolares (PRAE). (MEN 2005). Además, las olimpiadas científicas para estudiantes impactan a los participantes dado que estos adquieren habilidades, destrezas y competencias que no sólo les sirven en su vida cotidiana sino también les abren nuevos horizontes académicas y profesionales. Por medio de estas olimpiadas se intensifican las competencias del pensamiento científico, lo cual es de vital importancia dado la actual preocupación que existe por el cuidado del medio ambiente, además de poder generar en las personas ese sentir de cuidar la naturaleza.

La interdisciplinariedad de las matemáticas permite relacionarla con diferentes áreas del conocimiento por lo cual en este proyecto empleamos la matemática y su poder de modelar distintas situaciones para que los estudiantes generen proyectos de impacto ambiental positivo y a la vez desarrollen el pensamiento

matemático. Las olimpiadas estudiantiles en diferentes áreas de la educación se caracterizan por generar motivación y promover una actitud investigativa, la cual a su vez genera nuevos conocimientos y competencias.

## **2.1 Las Olimpiadas Ambientales**

En las olimpiadas ambientales concebidas por la Universidad Antonio Nariño se diseñan y realizan proyectos ambientales fundamentados científicamente, de modo que sus diseños requieren de análisis matemáticos que serán evaluados frente a los resultados que arroja la puesta en marcha y ejecución del proyecto. Para garantizar la comparabilidad de los proyectos, se exige que todos versen sobre el mismo tema. Para la realización de la presente investigación, la temática seleccionada es el agua.

Por otra parte, según Martínez Castillo, 2010, hace décadas, el modelo de desarrollo actual manifiesta síntomas de degradación y ello ha alcanzado tal magnitud que escapa del control humano; así, por primera vez en la historia de la humanidad, se pone en peligro la vida en el planeta, situación en la que se pueden destacar los siguientes aspectos.

1. El estilo de vida humano es muy destructivo de las relaciones sociedad-biosfera.
2. La idea aristotélica de lo humano y sus actividades separadas de lo natural, es decir, el concepto antropocéntrico predominante en la relación especie humana-naturaleza.
3. El enfoque mercado-céntrico, su forma de dar valor a las cosas y su énfasis en la ganancia monetaria.

4. Estilo de vida irracional (superproducción, sobreconsumo y derroche) para pocas(os) y relaciones sociales injustas para las mayorías (limitación productiva, carencias en el consumo, abstención).
5. Inconsciencia de la unidad del ecosistema planetario que niega la interdependencia ecológica y económica en el mundo.

Lo anterior pone de manifiesto la necesidad de generar proyectos que dinamicen estados de conciencia ambiental de manera productiva generando (pequeños) proyectos para salvaguardar la vida del planeta y garantizar la continuidad de la humanidad en el territorio.

## **2.2 Educación matemática crítica**

Otro elemento conceptual importante en este proyecto de investigación es la Educación Matemática Crítica. Para Henry Giroux, la educación matemática crítica plantea que las escuelas deben convertirse en lugares que brinden la opción de una alfabetización, es decir, que brinden opciones para que los estudiantes compartan sus vivencias, trabajen en un ambiente de relaciones sociales que enfatizan el cuidado y la preocupación por los demás, y se familiaricen con las formas de conocimiento que les den la convicción y la oportunidad para luchar por una calidad de vida de la que todos los seres humanos se beneficien (Skovsmose, 1999).

La educación matemática crítica (EMC) ha sido desarrollada desde comienzos de la década de los 1980s, tiene sus raíces en el giro que se realizó durante este período hacia los aspectos sociales en educación matemática, y lleva a los estudiantes a convertirse en actores que comprenden, cuestionan y transforman realidades estructuradas por las matemáticas con miras a la

formación de ciudadanos comprometidos con sus deberes civiles y a la creación de condiciones más democráticas en la sociedad (Valero, 2015).

Ahora bien, en el marco del aprendizaje de la educación matemática crítica se encuentra el punto siguiente señalado por Valero (2002):

*En relación con el problema de la enseñanza de las matemáticas para la formación ciudadana, el supuesto de la resonancia intrínseca de las matemáticas y la educación matemática con la democracia se mantiene dentro de la imagen del estudiante como sujeto cognitivo. El desarrollo de pensamiento matemático de alto nivel es en sí el centro de cualquier posible contribución de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a la formación de ciudadanos capaces de pensar, procesar información, tomar decisiones y resolver problemas. Sujetos cognitivos altamente racionales, con gran capacidad y competencia matemática son indispensables para la democracia (p.55).*

### **2.3 El Aprendizaje Basado en Proyectos.**

(Krajcik, Joseph S. and Blumenfeld, 2005)<sup>14</sup> plantean que el aprendizaje basado en proyectos tiene su origen hace alrededor de cien años en el trabajo del educador y filósofo John Dewey (1959). Dewey argumentó que los estudiantes desarrollarán una inversión personal en el material a aprender si se involucran en tareas y problemas reales y significativos que emulan lo que hacen los expertos en situaciones del mundo real. En las últimas dos décadas

---

<sup>14</sup> "Schneider, RM, Krajcik, J. y Blumenfeld, P. (2005). Implementación de materiales científicos basados en reformas: la gama de representaciones docentes en las aulas reformadas. Revista de Investigación en Enseñanza de las Ciencias: Diario Oficial de la Asociación Nacional de Investigación en Enseñanza de las Ciencias , 42 (3), 283-312."

varios investigadores refinaron las ideas de Dewey relacionadas con el convencimiento que la investigación activa produce una mejor comprensión.

A continuación, se presentan algunas concepciones que tiene algunos investigadores sobre el aprendizaje basado en proyectos:

Para (Bell, 2010), “El aprendizaje basado en proyectos (ABP) es un enfoque innovador del aprendizaje que enseña una multitud de estrategias críticas para el éxito en el siglo XXI. En este, los estudiantes impulsan su propio aprendizaje a través de la indagación, así como también trabajan en colaboración para investigar y crear proyectos que reflejen su conocimiento”.

El ABP es un enfoque de aprendizaje dirigido por el estudiante y guiado por el docente; en este los estudiantes buscan el conocimiento planteándose preguntas que les han llamado su atención. El origen de un proyecto se basa en la indagación. Los estudiantes generan preguntas y son guiados por medio de la investigación bajo la supervisión de un docente. Los descubrimientos se emplean en la construcción de un proyecto el cual se comparte con algún grupo determinado. La elección de los estudiantes a participar en el desarrollo del proceso es de gran importancia. Por otro lado, los docentes supervisan cada paso del proceso y aprueban cada decisión de los estudiantes antes que estos tomen una dirección.

La mayoría de los proyectos involucran lectura, indagación, escritura y matemáticas, y muchos de los proyectos se realizan con problemas sociales o culturales. El APB tiene como resultado una mayor comprensión o dominio de un tema, un aprendizaje más a fondo y una mayor motivación para aprender.

(Bell, 2010) afirma que los estudiantes que participan en ABP tienen mejores resultados académicos en pruebas estandarizadas que los pares educados tradicionalmente, y sustenta su afirmación con ejemplos.

En esencia, el aprendizaje basado en proyectos gira en torno a la investigación impulsada de un problema o una situación compleja, en donde el proyecto puede ser a largo plazo y se caracteriza por ser realizado en grupos de trabajo y finaliza con un producto final importante.

Para Popescu (2012), el ABP está estrechamente relacionado con el aprendizaje basado en problemas, ya que ambos están liderados por los siguientes principios constructivistas.

1. La comprensión es una construcción individual y proviene de las interacciones y construcciones relacionadas con el medio en que se mueve el individuo.
2. El aprendizaje es causado por un conflicto cognitivo
3. El conocimiento evoluciona a través de la negociación social.

Pero se diferencian en que el ABP pone su énfasis en el producto final y en las competencias adquiridas durante el proceso, mientras que el objetivo principal del aprendizaje basado en problemas es desarrollar el pensamiento matemático del estudiante.

Según Krajcik, Joseph S. & Blumenfeld, Phyllis C. (2005), el aprendizaje basado en proyectos es una forma de aprendizaje situado, el cual se soporta en el descubrimiento constructivista; en este los estudiantes obtienen una mayor comprensión del tema trabajando y usando sus ideas. En el aprendizaje

basado en proyectos, los estudiantes se involucran en problemas reales y significativos los cuales son importantes para ellos. Un salón de clases comprometido con el aprendizaje basado en proyectos permite a los estudiantes investigar, preguntar, proponer hipótesis y explicaciones, discutir sus ideas, desafiar las ideas de otros, y probar nuevas ideas.

Para Krajcik, Joseph S. & Blumenfeld, P. C. (2005), "El aprendizaje basado en proyectos es un enfoque general para el diseño de entornos de aprendizaje. Los entornos de aprendizaje basados en proyectos tienen cinco características clave: 1) inician con una pregunta motivadora, 2) los estudiantes exploran la pregunta impulsora, participando en procesos de indagación, 3) los estudiantes, maestros y miembros de la comunidad educativa participan en actividades colaborativas para encontrar solución a la pregunta principal, 4) mientras participan en el procesos de indagación, los estudiantes cuentan con tecnología de aprendizaje que los ayuda a participar en actividades que están más allá de su capacidad, 5) los estudiantes crean un conjunto de productos tangibles que abordan la pregunta principal."

Por otra parte, el Aprendizaje Basado por Proyectos (ABP) involucra a los educandos en una experiencia en la cual desarrollan habilidades, capacidades, valores y actitudes, todas estas de una forma integral, llevando a que el proyecto sea significativo para ellos. El ABP se caracteriza por estimular a los educandos, motivándolos a aprender por medio de una realidad concreta en un contexto académico, y así desarrollen competencias para resolver problemas en situaciones reales. Con esto se animan a proponer y comprobar hipótesis, a desarrollar su proceso discursivo, y a tomar gusto por la investigación. En este proceso, los estudiantes fortalecen valores y su relación asertiva con el

entorno, aplicando sus conocimientos en actividades que buscan en el fondo satisfacer necesidades sociales. Estas características garantizan que el ABP es ideal para desarrollar proyectos orientados a resolver problemas medioambientales, ya que los proyectantes podrán aplicar con efectividad y utilidad sus conocimientos matemáticos aprendidos en el aula de clase (Maldonado, 2008).

Además, en el ABP los docentes necesitan crear un ambiente de aprendizaje modificando los espacios, dando acceso a la información, modelando y guiando el proceso. Por otro lado, entre las tareas que deben desarrollar los docentes, se encuentran estimular la utilización de los procesos metacognitivos, animar el trabajo cooperativo y colaborativo, diagnosticar problemas, construir posibles soluciones, retroalimentar y valorar el trabajo realizado, todas ellas labores que son indispensables para que se logren los objetivos esperados con este tipo de propuestas (Rodríguez-Sandoval, Vargas-Solano, & Luna Cortés, 2010).

Por su parte, la presente investigación relaciona temas actuales en la educación matemática a través de los Grupos Temáticos de Estudio (TSG) del ICME – 14 (Congreso Internacional de Educación Matemática-14). El TSG 54 desde las dimensiones sociales y políticas de las matemáticas, trata la articulación de la educación matemática y el actual “cambio climático”. El TSG 17 estudia las actividades de planteamiento y resolución de problemas. El TSG 46 aborda temas relacionados con competencias de resolución de problemas de matemáticas y otras actividades desafiantes, dentro o más allá de un aula de matemáticas.

En fin, el aprendizaje basado en proyectos es una metodología de aprendizaje en la que el estudiante participa activamente en la construcción de su conocimiento. Esta metodología da al estudiante la libertad de dirigir el proceso y la toma de decisiones que le permiten avanzar en el desarrollo de la tarea o proyecto. La metodología de trabajo se realiza en forma, grupal lo cual permite mayores espacios de comunicación entre los estudiantes y de debate de ideas y defensa y crítica de las mismas. Por otro lado, el docente debe escoger bien cuáles son las posibles tareas o proyectos para realizar, debe manejar muy bien esta metodología dado que su rol es crear las condiciones que propicien un buen ambiente de aprendizaje, garantizando el acceso a la información, guiando el proceso y orientando cuando los estudiantes se están alejando del propósito del trabajo. Entre otras de las acciones del maestro es animar, reforzar los esfuerzos grupales e individuales, advertir posibles problemas o dificultades, brindar ideas, dar retroalimentación y evaluar los resultados.

#### **2.4 Modelación matemática.**

A continuación, se muestran distintas percepciones del concepto de modelación matemática. Para (Greefrath & Vorhölter, 2016)<sup>15</sup> el modelado matemático siempre se origina a partir de un problema de la vida real que luego se describe mediante un modelo matemático y se resuelve utilizando este modelo. Todo el proceso se denomina modelación. En (GAIMME \_en\_ español2020(0).pdf,n.d.) se considera la modelación matemática “como el proceso que usa las matemáticas para representar, analizar, hacer predicciones, o bien, brindar una percepción de fenómenos pertenecientes al

---

<sup>15</sup> “Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). *Teaching and learning mathematical modelling: Approaches and developments from German speaking countries*. Springer Nature.”

mundo real". Por otro lado, Rodríguez, M. & Barreiro, P. (2018)<sup>16</sup> consideran que la modelación matemática comienza al considerar situaciones extramatemáticas, es decir, situaciones reales que provienen de entornos donde la matemática no tiene una presencia explícita, pero se acude a ella como medio para comprender dicha situación, estudiarla vía formulación matemática (el modelo matemático), interpretar resultados obtenidos a partir del modelo en el sistema inicial y, eventualmente, plantear nuevos problemas independientes de la situación inicial.

La modelación matemática hace parte de los estándares curriculares en muchos países y es considerada como una de las competencias matemáticas generales que debe ser enseñada y aprendida. La competencia de modelado en un determinado contexto hace referencia a ser capaz de llevar a cabo de forma autónoma y perspicaz todos los procesos en el ciclo de modelado matemático.

El realizar una buena tarea de modelado debe satisfacer los siguientes criterios: ser comprensible y razonable, presentar un desafío apropiado para un trabajo independiente, ser auténtica e incluir datos auténticos, estar abierta a resultados de modelado interesantes, estar abierta a las críticas al modelo, conducir a actividades del modelado representativas, y desafiar a los estudiantes apropiadamente a trabajar con conceptos y métodos que son de importancia para su aprendizaje matemático (Bock et al., 2016).

Cohors-Fresenborg, Sjuts y Sommer (2004) desarrollaron un modelo para determinar el nivel de dificultad de las pruebas PISA; dicho modelo se enfoca

---

<sup>16</sup> Rodríguez, M., & Barreiro, P. (2018). *Modelación y resolución de problemas. La Modelación en Matemática: marco de referencia y aplicaciones*, 17-26.

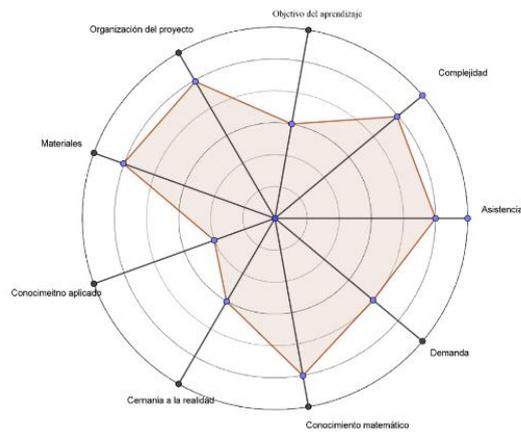
en los procesos cognitivos necesarios para poder resolver las tareas. Los siguientes cuatro criterios: complejidad lingüística, complejidad cognitiva, formalización del conocimiento y manejo de fórmulas se consideraron como los criterios que inciden en la dificultad de las tareas. Cada uno de los criterios se dividió en tres niveles de dificultad (0, 1 y 2) y la dificultad de una tarea fue definida como la suma de los niveles alcanzados en los cuatro criterios.

Eyerer y Krause desarrollaron el método de la telaraña con la finalidad de ilustrar la dificultad que se presenta en las tareas que se encuentran en el modelado Theoprax. El método Theoprax emplea un diagrama de telaraña para calificar un proyecto. Este modelo fue adaptado por Bock, Bracke, Götz y Siller (2014)<sup>17</sup> para medir cómo los profesores califican la dificultad de ciertas tareas de modelado. Para ello se tomaron ocho dimensiones con sus respectivos niveles de complejidad. Con este sistema, los maestros y supervisores evaluaron varios problemas de modelado y sus calificaciones fueron ilustradas mediante diagramas de telaraña.

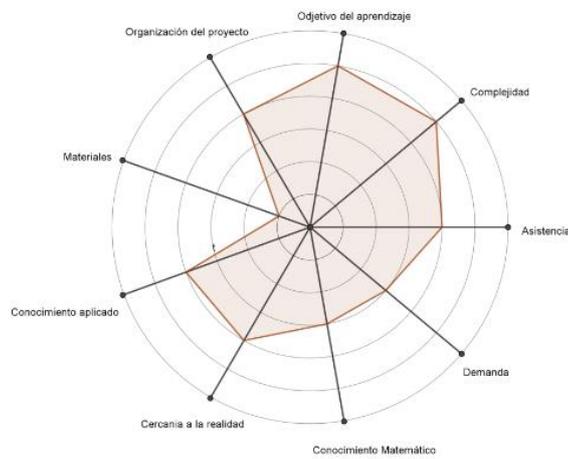
Las siguientes imágenes corresponden a un diagrama de telaraña aumentado en una dimensión el cual es relevante cuando se trata de tareas de modelado auténticas, entendiéndose éstas como un problema planteado por un individuo quien quiere obtener una solución que satisfaga las necesidades del individuo. El problema no se filtra ni se reduce y tiene toda la generalidad sin manipulaciones, es decir, se plantea como se ve.

---

<sup>17</sup> "Bock, W., Bracke, M. y Kreckler, J. (febrero de 2015). *Taxonomía de tareas de modelado*. En CERME 9-Noveno Congreso de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática (págs. 821-826)."



*Ilustración 4: Ejemplo modelo de la telaraña*



*Ilustración 5: Ejemplo modelo de la telaraña*

La finalidad del modo de medición es delinear y comparar la dificultad de modelar tareas desde la perspectiva de un maestro o supervisor. Cabe resaltar que la medida de dificultad para los diferentes maestros que emplean el método puede variar debido a las distintas formaciones y experiencias que tienen los profesores.

Es claro que, en juzgar los modelos matemáticos en los proyectos producidos en una olimpiada medioambiental, hay que adoptar un sistema que refleja las

diferencias entre proyectos y la calidad de estos. Por ello, se incluye aquí la siguiente propuesta.

Si una tarea de modelación presenta una variedad de dimensiones, estas dimensiones podrían adaptarse, ampliarse o reducirse según los aspectos en los que se centrará la puntuación. Al emplear el modelo es de gran importancia que la persona que lo emplee tenga experiencia con tareas del modelado matemático, lo cual es necesario para poder estimar las diferentes escalas que se presentan en cada dimensión y además para tener una intuición de su interacción.

Para generar el modelo, Bock, Bracke, Götz y Siller (2004) identificaron ocho dimensiones que afectan la complejidad de las tareas de modelado.

1. Organización del proyecto
2. Objetivo de aprendizaje
3. Complejidad
4. Asistencia
5. Demanda
6. Conocimiento matemático
7. Cercanía a la realidad
8. Conocimiento aplicado

Cada una de las ocho dimensiones está dividida en seis niveles de complejidad, siendo 1 el nivel más fácil y 6 el más difícil. Para cada dimensión se categorizan las posibles respuestas.

1. El enfoque de solución es claro
2. Métodos unilaterales (p. ej., solo programación, geometría, ...)
3. Posibles enfoques de solución alternativos
4. El conjunto de datos es demasiado grande o insuficiente
5. La solución requiere variedad de métodos
6. Enfoques de solución alternativos en combinación con muchos métodos necesarios

Las ocho dimensiones y sus distintos niveles se ilustran en un diagrama de forma de estrella, cada dimensión se representa como un rayo que sale del centro de la estrella, además se añadió una novena dimensión con el nombre de materiales.

Cada dimensión se evalúa de forma individual y se ubica un punto en el respectivo nivel alcanzado, luego se realiza un polígono que pasa por cada uno de los puntos vecinos ubicados en las diferentes dimensiones para al final trazar un área encerrada, con la ayuda de una herramienta (software) se mide el tamaño de dicha área cerrada la cual simboliza la dificultad de la tarea y, por lo tanto, ofrece la posibilidad de comparar la dificultad de las tareas de modelado. En cuanto mayor sea el área, más difícil será la tarea.

Con la ayuda de la herramienta implementada se calcula el área máxima que se podría obtener, la cual se forma al obtener como puntuación el nivel seis en cada una de las dimensiones. A dicha área se le da el valor de 1 que se denota por  $M$ , y esta corresponde a una tarea de máxima dificultad. Por otro lado, al área que se forma al calificar una tarea de modelado en el diagrama de

telaraña al evaluar cada una de las dimensiones tendrá un valor entre cero y uno el cual indica la dificultad de la tarea de investigación, y se denotará por  $I$ , con lo que se definirá la medida de dificultad de una tarea de modelado  $MOD = I/M$ , la cual toma valores entre  $(0,1]$ .

De acuerdo con el planteamiento que se está adoptando basado en el artículo citado, se dice que dos tareas de modelado  $T_1$  y  $T_2$  son de igual complejidad de finura  $e$ , si  $|MOD(T_1)-MOD(T_2)| < e$ .

Una posible dificultad al calcular MOD es el hecho de que el área difiera para la misma calificación con distintos arreglos en la secuencia de las dimensiones. Este problema se resuelve calculando no solo el área sino el valor medio de las áreas sobre todas las permutaciones de arreglos.

Se pueden realizar extensiones al proceso de evaluación de las tareas de modelado como el caso de hacer más énfasis en ciertas dimensiones en el cual el modelo puede extenderse a un modelo ponderado. Esto puede depender de los antecedentes y de la formulación de una tarea individual.

Dependiendo de la situación, algunas dimensiones pueden tener mayor importancia que otras, por lo tanto, influyen más en la complejidad de una tarea de modelado. También es posible modificar los niveles contemplados para alguna determinada dimensión en caso de considerarse de menos importancia.

Otra posible modificación puede ser la eliminación o adición de cierta dimensión lo cual debe hacerse con cuidado ya que usar muy pocas dimensiones puede no reflejar la dificultad de la tarea de modelado y muchas dimensiones pueden hacer que la herramienta sea incómoda y poco clara.

¿Qué es la modelación matemática?

A continuación, se presentan algunas definiciones de modelado matemático:

“La modelación matemática es el proceso que emplea la matemática para representar, analizar, predecir, o bien, brindar una percepción de situaciones (fenómenos) que pertenecen al mundo real.” .(*GAIMME\_en\_español 2020(0).Pdf*, n.d.)

“La modelación matemática consiste en el arte de transformar problemas de la realidad en problemas matemáticos y resolverlos interpretando sus soluciones en un lenguaje del mundo real”(Pochulu, 2018,p.21)

El modelado matemático es “el proceso de elegir y utilizar las matemáticas y las estadísticas adecuadas para analizar situaciones empíricas , comprenderlas mejor y tomar mejores decisiones”(Aguirre et al., 2019).

En casi todos los enfoques, el proceso idealizado de modelado matemático se describe como un proceso cíclico para resolver problemas reales mediante el uso de las matemáticas, ilustrado como un ciclo que comprende diferentes pasos o fases.

Werner Blum presenta el proceso de modelación matemática como sigue.<sup>18</sup>

---

<sup>18</sup> Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education* (pp. 73-96). Springer, Cham.

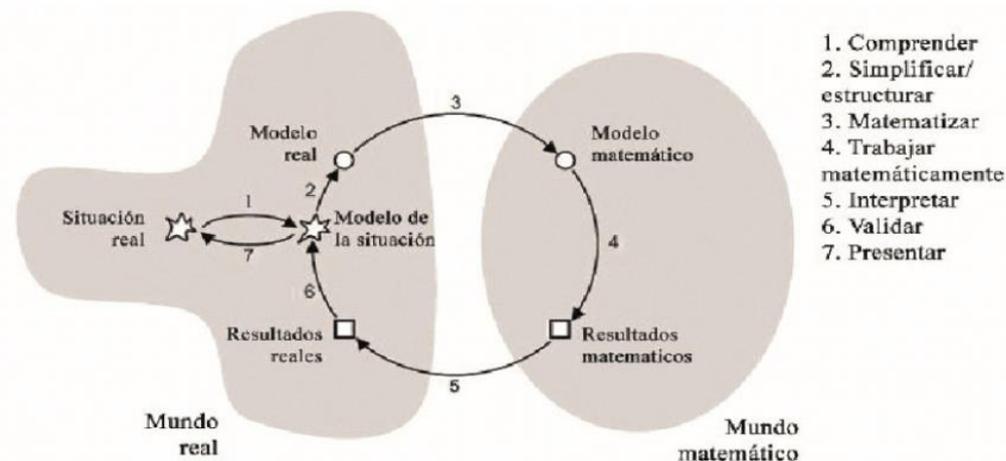


Ilustración 6: Ilustración proceso de modelado matemático

**Ilustración 6:** Ciclo de modelación Matemática Blum, Leib (2007)

Al realizar el proceso de modelación primero se parte de un problema identificado del mundo real en el cual las personas que intenten resolver el problema no cuentan con toda la información del mismo por lo cual este debe investigar sobre la situación y en ocasiones hacer suposiciones sobre aspectos del problema. La etapa de **simplificar** se centra en el problema, se simplifica o recorta el problema, es decir delimitando los aspectos que se consideran determinantes del problema, luego es el momento de **matematizar** que es el momento de identificar las posibles variables que se presentan. En este momento, el estudiante debe tomar decisiones sobre que variables se emplearán. Luego en el proceso de matematización se debe tratar de identificar las relaciones entra las variables, allí es necesario emplear los conocimientos matemáticos para así poder plantear un modelo matemático que permita estudiar la situación, aunque esta haya sido condicionada por una toma de decisiones. En este momento se **trabaja matemáticamente** planteando un modelo que permita entender la situación inicial y eventualmente dar una explicación del fenómeno, esto es, comprenderlo mejor y predecir su

comportamiento. Luego se procede a interpretar los resultados verificando y validando que la respuesta que ofrece el modelo dé solución al fenómeno o problema. Al comprobar que el modelo funciona entonces es momento de presentarlo.

## **2.5 Pensamiento Matemático.**

Una de las tareas fundamentales de la educación matemática en los diferentes niveles de formación del sistema educativo en cualquier país, es la de promover el desarrollo del pensamiento matemático. En ese sentido vale la pena centrar la atención en el siguiente interrogante: ¿Qué es pensar matemáticamente? Pensando en una posible respuesta a la pregunta Tall (2002) en su teoría cognitiva sobre el desarrollo y crecimiento del pensamiento matemático, plantea que se hace necesario entender que existen diferentes tipos de mentes matemáticas, unas preocupadas por la lógica y otras por la intuición (Poincaré, 1913, p. 210). Además, el autor deja claro que no hay solo dos tipos de mente matemática, sino que hay muchos, y destaca y diferencia a aquellos que prefieren tratar sus problemas desde el análisis y a aquellos que acuden a la geometría, pero también presenta a aquellos para los que las matemáticas consisten en deducciones utilizando las leyes de la lógica, como es el caso de Bertrand Russell, o para los que las matemáticas son producto de la creación de la mente humana (Kronecker) o para aquellos como Hilbert para quienes la matemática es la manipulación significativa de marcas sin sentido escritas en papel. Otra tendencia que ha cambiado la mirada sobre las matemáticas es el uso de las tecnologías que brindan una alternativa al momento de considerar la demostración matemática y la posibilidad de conjeturar a partir de la modelación computacional. Para Tall (2002), el cerebro

humano no es una entidad puramente lógica, sino que la manera compleja en que funciona es a menudo en desacuerdo con la lógica de las matemáticas.

Por otra parte, según (Isoda & Katagiri, 2012), hay dos referencias clásicas en la investigación en educación matemática para explicar el pensamiento matemático: una se centra en el proceso matemático y la otra se centra en el crecimiento conceptual. Los artículos de Polya [1945, 1957, 1962, 1965] son ejemplos bien conocidos de la primera categoría. Reflexionó sobre su propia experiencia profesional como matemático. Su libro fue preparado para personas que se enfrentaban a una tarea difícil. Los maestros deben adaptar los ejemplos para que sean claros y desafiantes para sus alumnos con el fin de implementar sus conceptos en el aula. Mason (2010) reenfoca el proceso desde el punto de vista de la educación. Según Stacey [2007], la relevancia del pensamiento matemático radica en los actos de "especializar y generalizar" y "conjeturar y persuadir" por lo que la escuela debe enfatizar el razonamiento matemático. Por lo tanto, uno de los propósitos más básicos de la enseñanza de las matemáticas es permitir que los estudiantes resuelvan problemas utilizando el razonamiento matemático, pero también es uno de los más difíciles. En ese sentido, el objetivo final de la educación es que los estudiantes sean capaces de realizar investigaciones matemáticas por sí mismos y reconozcan cómo las matemáticas que han aprendido pueden usarse en circunstancias del mundo real. La resolución de problemas es "el núcleo de las matemáticas", según el matemático Paul Halmos (1980). El segundo énfasis está en el crecimiento conceptual matemático. Para el proceso de objetivación de la actividad matemática, Freudenthal (1973) acuñó el término "matematización" y afirma que Polya no explicó la actividad matemática.

Entendiendo pensamiento como, "... *la actividad intelectual (interna) mediante la cual el hombre entiende, comprende, y dota de significado a lo que le rodea; la cual consiste, entre otras acciones, en formar, identificar, examinar, reflexionar y relacionar ideas o conceptos, tomar decisiones y emitir juicios de eficacia; permitiendo encontrar respuestas ante situaciones de resolución de problemas o hallar los medios para alcanzar una meta*", Molina (2006) da a entender que el pensamiento es una actividad mental asociada a la capacidad de un ser humano para resolver problemas, concepción que se acerca a los propósitos del presente trabajo. Por otro lado, teniendo en cuenta todo lo anterior, el pensamiento matemático será entendido como el pensamiento que se pone en juego cuando se resuelven problemas, es equiparable al proceso de razonamiento que conlleva dicha resolución, por lo que, el planteamiento y resolución de problemas matemáticos se convierte en la actividad central en el aula de clases para promover el desarrollo del pensamiento.

## **2.6 Conclusiones del Capítulo 2**

El análisis de los aspectos conceptuales tratados en este capítulo permite que la investigación avance de manera significativa hacia el logro de los objetivos. La educación matemática crítica busca que las escuelas brinden opciones para que los estudiantes trabajen en un ambiente de relaciones sociales que promuevan el cuidado y la preocupación por los demás y además a centrar sus esfuerzos en emplear el conocimiento con un fin social, para que las personas tengan una mejor calidad de vida. Por lo tanto, se integra el ABP a este trabajo de investigación lo cual es muy pertinente por las características del mismo, dado que los estudiantes pueden trabajar en colaboración empleando los conocimientos matemáticos en actividades que involucran problemas reales

que sean considerados de gran importancia para ellos, y que los descubrimientos realizados se emplean en la construcción de un proyecto que será compartido con la comunidad. Por otro lado, en el ABP los docentes crean ambientes de aprendizaje modificando los espacios, dando acceso a la información, modelando y guiando el proceso. Además cabe resaltar que la modelación matemática ayuda a entender la realidad y a entender comportamientos provenientes de las ciencias experimentales, en busca de modelos matemáticos que permiten la comprensión de la realidad (Pochulu, 2018).

Con respecto a la modelación matemática se considere de gran importancia el trabajo de investigación realizado por (Bock et al., 2016) en el cual examinan las distintas dimensiones que se presentan en un proceso de modelado el cual se considera importante para este trabajo debido a que es posible implementar dicho modelo en el desarrollo de las olimpiadas medioambientales que se van a realizar.

Se puede concluir que la integración de la educación matemática crítica, el ABP y la modelación matemática son de gran importancia para el desarrollo de este trabajo de investigación.

### **3 METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN**

En este capítulo se presenta la metodología de la investigación que se va a asumir, se hace una descripción de la población donde se desarrollará el trabajo, y además se presentan los alcances de la investigación desde la perspectiva de la investigación cualitativa, en la cual el conocimiento es construido socialmente por las personas que participan en la investigación. La

tarea fundamental del investigador es entender el mundo complejo de la experiencia vivencial desde el punto de vista de quienes la experimentan, así como comprender sus diversas construcciones sociales sobre el significado de los hechos y el conocimiento (Hernández-Sampieri, 2014). Se trata de hacer análisis del objeto de investigación profundizando en su naturaleza y sin pretender generalizar a otras entidades pues se considera que cada una es única y distinta a cualquier otra.

### **3.1 Tipo o enfoque de investigación**

Esta investigación es de tipo mixta empleando un estudio de caso el cual consiste en administrar un estímulo o tratamiento a un grupo y después aplicar una medición de una o más variables para observar cuál es el nivel del grupo en éstas.

Igualmente, la investigación es de tipo cualitativo ya que se pretende la comprensión, sinterización, teorización y recontextualización del objeto de estudio (Hernández Sampieri, 2014), haciendo énfasis en un estudio descriptivo cualitativo sobre las características del pensamiento matemático y el tipo de proyectos que se generan en el desarrollo de olimpiadas medioambientales con estudiantes de educación media del Departamento del Magdalena.

El trabajo se desarrollará en las siguientes fases.

#### **Primera fase: Exploración.**

En esta fase se analizan los elementos teóricos fundamentales de la educación matemática crítica, los aspectos de la modelación, el aprendizaje basado en proyectos y el tipo de producción estudiantil que se busca generar para la

estructuración de las olimpiadas medioambientales basadas en el diseño y la puesta en marcha de proyectos medioambientales por parte de estudiantes de educación media del Departamento del Magdalena.

Aquí también se procede a la elaboración del constructo “Relación entre la educación matemática y la educación ambiental” con base en resultados de investigaciones previas en los desarrollos teóricos que la comunidad académica ha aportado en esta materia.

### **Segunda fase: Diseño e implementación de un curso formativo.**

En el marco del desarrollo de las olimpiadas es indispensable brindarles a los estudiantes y docentes acompañantes un curso formativo de modelación matemática y aprendizaje basado en proyectos que tiene como objetivo que los estudiantes tengan un mayor conocimiento sobre la modelación matemática y la metodología del aprendizaje basado en proyectos, además de identificar cuáles son los pasos necesarios que se deben llevar a cabo en un proceso de modelación matemática y qué aspectos se deben tener en cuenta en el proceso de modelado.

Cabe resaltar que este curso centra su atención en actividades de modelado matemático; inicialmente se trabajan unos problemas básicos de introducción y luego problemas en situaciones medioambientales que se trabajarán por la metodología del ABP. El curso formativo tendrá una intensidad de 20 horas presenciales. Las actividades se realizarán en la Universidad Antonio Nariño sede Santa Marta. Los recursos empleados en el desarrollo del curso son: espacios físicos de la Universidad Antonio Nariño, video beam, copias, videos, software GeoGebra, entre otros.

El curso consta de consta de cinco actividades orientadas al desarrollo de la modelación matemática y la formulación de proyectos medioambientales relacionados con el cuidado del agua.

Con la Actividad 1 se pretende que los estudiantes reconozcan la importancia del cuidado del agua y la formulación de proyectos para el cuidado del agua en la ciudad de Santa Marta. Para ello se plantean interrogantes como: ¿Cuál es el principal problema que enfrenta tu comunidad respecto al agua potable? Esta pregunta se plantea con el fin de identificar una pregunta del mundo real que se quiere entender y resolver a través de la formulación de un proyecto.

Con la Actividad 2 se busca que los estudiantes comprendan los procesos de modelación matemática a partir de la solución de problemas idealizados o reales. Para ello se plantea una actividad de modelación matemática que será orientada por el docente, con el propósito de ilustrar el proceso de modelación matemática.

La Actividad 3 está dirigida a que los estudiantes resuelvan problemas que involucren modelación matemática y cuidado del agua; para ello se plantean dos problemas relacionados con el cuidado del agua que involucren modelación matemática para ser resueltos por los estudiantes con el acompañamiento del docente.

La Actividad 4 pretende que los estudiantes logren formular problemas que involucren modelación matemática y cuidado del agua. En este sentido, se pide a los estudiantes que formulen un problema relacionado con el cuidado del agua que involucre modelación matemática para ser resuelto parcial o

totalmente durante el curso y que sirva de orientación para el problema a tratar en el proyecto que se va a presentar.

Finalmente, con la Actividad 5 se busca que el estudiante se prepare para la formulación de proyectos y la modelación matemática y aprenda los pasos fundamentales en la formulación de proyectos relacionados con el cuidado del agua. Para ello se plantean los elementos de la formulación de proyectos; durante la clase, se incluyen ejemplos prácticos, estudios de casos y discusiones grupales para fomentar la participación de los estudiantes.

### **Tercera fase: Olimpiadas medioambientales**

Una vez analizados los elementos teóricos necesarios se procede a diseñar las olimpiadas medioambientales basadas en proyectos con temas de relevancia para el Distrito de Santa Marta. Eventualmente estos serían usos y conservación del agua y tratamiento del agua contaminada. Para este fin los estudiantes deberán reunirse en equipos con el acompañamiento de un docente y diseñar, presentar, desarrollar y evaluar proyectos relacionados con estos temas.

Con el desarrollo de las olimpiadas medioambientales se busca fomentar el interés y la participación de los estudiantes en proyectos relacionados con el cuidado del agua, motivar a los estudiantes a involucrarse activamente en la problemática del agua y promover la cultura del cuidado del agua, valor su importancia y ser gestores de posibles soluciones.

Para ello en el diseño del curso formativo se involucró la modelación matemática, la resolución de problemas y el aprendizaje basado en proyectos donde se busca animar y preparar a los estudiantes para que investiguen sobre

las problemáticas relacionadas con el cuidado del agua en su comunidad y propongan proyectos que aborden el problema desde diferentes perspectivas. Los proyectos pueden abordar temas como la conservación, la reutilización o la educación pública sobre el uso responsable del agua, entre otros.

Además, el desarrollo de las olimpiadas a través de la formulación de proyectos medioambientales permite estimular el pensamiento crítico, la creatividad y la resolución de problemas en el contexto del cuidado del agua. Con ello se fomentan habilidades cognitivas y se promueven enfoques innovadores para abordar los desafíos relacionados con el cuidado del agua.

Las olimpiadas representarán para los grupos de estudiantes de las instituciones participantes un desafío ya que deberán presentar soluciones creativas para resolver problemas relacionados con del agua en su comunidad, utilizando métodos sostenibles y considerando aspectos socioeconómicos y ambientales.

Otro componente fundamental de las olimpiadas es la modelación matemática; con ella se busca promover la aplicación de conceptos matemáticos y científicos en la formulación y resolución de problemas relacionados con el agua. Además, se favorece la integración de la matemática y la ciencia en proyectos prácticos que aborden desafíos del agua, brindando a los estudiantes la oportunidad de aplicar sus conocimientos en un contexto real.

La integración de estos componentes con la educación matemática crítica permite promover el desarrollo del pensamiento crítico en relación con las matemáticas y su papel en la sociedad, en este caso la cultura del cuidado del

agua, y fomenta la comprensión profunda y contextualizada de los conceptos matemáticos

### **Participantes**

Las olimpiadas estarán abiertas a todos los estudiantes matriculados en los grados 10 y 11 de escuelas secundarias públicas y privadas de Santa Marta.

### **Fases de las olimpiadas.**

#### **Inscripción**

Se establece un período de inscripción en el cual los estudiantes de las instituciones educativas que deseen participar se inscriben en equipos de 3 o 4 integrantes con un docente acompañante, para su registro en el curso formativo y en las olimpiadas.

Para ello se establece un plazo de un mes para que los equipos de estudiantes interesados presenten sus solicitudes de participación, indicando el nombre del equipo, los nombres de los miembros y una breve descripción del proyecto propuesto.

#### **Participación en el curso formativo.**

Los equipos seleccionados deben participar en un curso formativo donde se hará una preparación acerca de modelación matemática, resolución de problemas y formulación de proyectos.

Esto se hace con el propósito de que los equipos de estudiantes con su docente acompañante desarrollen un proyecto original relacionado con el cuidado del agua, utilizando la modelación matemática y la resolución de problemas.

Los equipos trabajan durante un mes para diseñar y desarrollar proyectos innovadores que aborden desafíos específicos relacionados con el cuidado del agua en su comunidad para posteriormente ser socializados ante un equipo de expertos evaluadores.

### **Presentación y sustentación de los proyectos.**

Los equipos presentarán sus proyectos ante el equipo de expertos, explicando su formulación, enfoque y solución del problema.

Cada equipo tiene un tiempo asignado de 30 minutos para presentar su proyecto ante un panel de expertos en formulación de proyectos, cuidado del agua y modelación matemática. Durante la presentación, los estudiantes describen el problema que abordan, exponen su enfoque de solución, presentan los resultados obtenidos y explican cómo su proyecto contribuye con la solución de problemáticas específicas relacionadas con cuidado del agua.

### **Evaluación de los proyectos**

El equipo de expertos evaluará los proyectos en función de la pertinencia, originalidad, aplicación de conceptos matemáticos y científicos, claridad en la formulación del problema, solución propuesta y presentación. Para ello harán uso de una aplicación que valora los proyectos teniendo en cuenta cinco criterios cada uno con cinco indicadores.

El jurado califica los proyectos en una escala de 1 a 5 en cada criterio de evaluación lo registra en la aplicación, la que genera una calificación que se basa en la comparación del desempeño obtenido en relación con el desempeño óptimo. Los proyectos más destacados serán aquellos que

demuestren una sólida comprensión del problema, una solución innovadora y una presentación clara y convincente.

### **Criterios de evaluación**

En cada proyecto se valoran cinco componentes: modelación matemática, presentación y sustentación, solución de problemas, creatividad y componente ambiental.

A través de estos componentes se evalúa la relevancia del proyecto en relación con la problemática del cuidado del agua, la originalidad, la creatividad y la innovación en la formulación y solución del problema. Además, se valora la aplicación de conceptos matemáticos y científicos, la formulación del problema en su definición del problema y su alcance, la solución propuesta en cuanto a la efectividad y viabilidad de la solución propuesta para abordar el problema del cuidado del agua, la presentación en cuanto a la claridad, la organización y la capacidad de comunicación del equipo durante la presentación.

### **Premiación**

Se otorgarán reconocimientos y premios a los equipos destacados, como certificados, medallas o incentivos de patrocinadores de las olimpiadas.

### **Cuarta fase: Análisis de los proyectos presentados en las olimpiadas.**

Los proyectos presentados por los estudiantes serán analizados para determinar cuáles son los proyectos para destacar y cuál es el proyecto ganador de las olimpiadas. La valoración busca dar respuesta entre otros a los

siguientes interrogantes ¿Por qué es necesario este proyecto?, ¿Qué se quiere conseguir?, ¿Qué se quiere transmitir, ¿Cómo se va a hacer?, ¿Qué se va a necesitar?, ¿Cuándo se va a poder llevar a cabo el programa?, ¿Cuánto tiempo se necesita para su desarrollo?, ¿Cómo se va a difundir?, ¿Cuánto va a costar?, ¿Se han conseguido las metas? ¿Cómo se puede mejorar?

A continuación, se definen los componentes a valorar en cada proyecto, con sus respectivos indicadores, los cuales serán la guía para que los evaluadores asignen una calificación entre 1 y 5 siendo 1 la mínima y 5 la máxima.

### **Componente de Modelación Matemática**

1. **Precisión:** ¿Qué tan bien representa el modelo la situación real?

Aquí se comparan las predicciones del modelo con los datos reales.

**Afirmación:** Las predicciones del modelo están en correspondencia con los datos reales.

2. **Validez:**

Aquí se valora los aspectos de la situación real que se tuvo en cuenta para el proceso de modelación, variables, relaciones, representaciones etc.

**Afirmación:** Las suposiciones que se hicieron en el proceso de modelación son razonables

3. **Robustez:** ¿Qué tan sensible es el modelo a los cambios en los datos de entrada? Aquí se valoran los cambios en las predicciones del modelo si los datos de entrada cambian ligeramente.

**Afirmación:** El modelo matemático planteado es robusto

4. **Utilidad o funcionalidad:** ¿Se puede usar el modelo para responder las preguntas para las que fue diseñado? ¿Se puede actualizar el modelo a medida que se dispone de nueva información?

Aquí se valora si el modelo es útil para tomar decisiones o comprender la situación real o puede extenderse a otras situaciones similares.

**Afirmación:** El modelo matemático es útil y funcional

5. **Claridad:** ¿Es el modelo fácil de entender? ¿Se explican claramente las suposiciones y ecuaciones?

**Afirmación:** El modelo matemático es fácil de entender y las suposiciones y ecuaciones se explican claramente.

<b>RUBRICA EMPLEADA PARA EVALUAR EL COMPONENTE DE MODELACIÓN MATEMÁTICA</b>					
<b>Indicadores</b>	<b>Calificación</b>				
	<b>(0,1]</b>	<b>(1,2]</b>	<b>(2,3]</b>	<b>(3,4]</b>	<b>(4,5]</b>
<b>Precisión:</b> Las predicciones del modelo están en correspondencia con los datos reales.					
<b>Validez:</b> Las suposiciones que se hicieron en el proceso de modelación son razonables					
<b>Robustez:</b> El modelo matemático planteado es robusto					
<b>Utilidad o funcionalidad:</b> El modelo matemático es útil y funcional					
<b>Claridad:</b> El modelo matemático es fácil de entender y las suposiciones y ecuaciones se explican claramente.					

## **Componente Ambiental.**

### **1. Evaluación de impacto y riesgos.**

El proyecto evalúa el impacto que puede tener en el medio ambiente, cómo afectará el entorno, la biodiversidad, los recursos naturales y los ecosistemas locales.

**Afirmación:** Se presentan las posibles implicaciones ambientales positivas y negativas que puede presentar el proyecto.

### **2. Relevancia.** ¿Por qué es deseable llevar a cabo este proyecto?

**Afirmación:** El proyecto es relevante en relación con la problemática encontrada y las necesidades de la comunidad o sector de influencia del proyecto.

### **3. Beneficio social.**

El proyecto es socialmente responsable, sostenible y beneficioso para la comunidad. Integra el aspecto social en la planificación y evaluación. Contribuye a un desarrollo más equitativo, inclusivo y beneficioso para la sociedad. Involucra a la comunidad local y a las partes interesadas en el proceso de toma de decisiones y considera sus preocupaciones.

**Afirmación:** Se detalla claramente cuál es la comunidad beneficiada por el desarrollo del proyecto.

### **4. Sostenibilidad**

El proyecto es compatible con la conservación a largo plazo de los recursos y sí contribuye a la sostenibilidad ambiental; promoviendo la armonía entre las necesidades humanas, la protección del medio ambiente y la conservación de recursos para las futuras generaciones. Lleva a cabo un desarrollo responsable y equitativo en el mundo actual.

**Afirmación:** Se evidencia alguna mejora ambiental relacionado con el cuidado del agua que puede mantenerse a largo plazo.

5. **Económicamente viable.**

El proyecto es realista, eficiente y capaz de cumplir sus objetivos. Presenta una base financiera coherente, siendo un pilar fundamental para el éxito y la sostenibilidad a largo plazo del proyecto.

**Afirmación:** El proyecto presentado es racional económicamente y tiene la capacidad de generar beneficios económicos sostenibles y al mismo tiempo mantener o mejorar la calidad del medio ambiente.

<b>RUBRICA EMPLEADA PARA EVALUAR EL COMPONENTE MEDIO AMBIENTAL</b>					
<b>Indicadores</b>	<b>Calificación</b>				
	<b>(0,1]</b>	<b>(1,2]</b>	<b>(2,3]</b>	<b>(3,4]</b>	<b>(4,5]</b>
<b>Evaluación de impacto y riesgos:</b> Se presentan las posibles implicaciones ambientales positivas y negativas que puede presentar el proyecto.					
<b>Relevancia:</b> El proyecto es relevante en relación con la problemática encontrada y las necesidades de la comunidad o sector de influencia del proyecto.					
<b>Beneficio social:</b> Se detalla claramente cuál es la comunidad beneficiada por el desarrollo del proyecto.					
<b>Sostenibilidad:</b> Se evidencia alguna mejora ambiental relacionado con el cuidado del agua.					
<b>Económicamente viable:</b> El proyecto presentado tiene capacidad para generar beneficios económicos sostenibles y al mismo tiempo mantener o mejorar la calidad del medio ambiente.					

## Componente de creatividad

1. **Originalidad:** ¿Se ha demostrado la capacidad de aplicar conceptos o técnicas innovadoras en el contexto del problema del agua?

**Afirmación:** La solución propuesta es única y no se ha aplicado previamente en esa situación específica

2. **Flexibilidad:**

**Afirmación:** Se consideraron múltiples enfoques o perspectivas para abordar el problema del cuidado del agua

3. **Fluidez de ideas:**

**Afirmación:** Se han generado una cantidad significativa de ideas relacionadas con el problema del agua en un período de tiempo determinado

4. **Conectividad:**

**Afirmación:** Las ideas propuestas muestran la capacidad de establecer conexiones entre conceptos aparentemente no relacionados para abordar el problema.

5. **Viabilidad:**

**Afirmación:** Las ideas presentadas son factibles de implementar en términos de recursos, tecnología y contexto socioeconómico.

RUBRICA EMPLEADA PARA EVALUAR EL COMPONENTE CREATIVIDAD					
Indicadores	Calificación				
	(0,1]	(1,2]	(2,3]	(3,4]	(4,5]
<b>Originalidad:</b> La solución propuesta es única y no se ha aplicado previamente en esa situación específica.					
<b>Flexibilidad:</b> Se consideraron múltiples enfoques o perspectivas para abordar el problema del cuidado del agua.					
<b>Fluidez de ideas:</b> Se han generado una cantidad significativa de ideas relacionadas con el problema del agua en un período de					

tiempo determinado.					
<b>Conectividad:</b> Las ideas propuestas muestran la capacidad de establecer conexiones entre conceptos aparentemente no relacionados para abordar el problema.					
<b>Viabilidad:</b> Las ideas presentadas son factibles de implementar en términos de recursos, tecnología y contexto socioeconómico.					

### Componente de presentación y sustentación

1. **Comunicación:** Se refiere a la capacidad de comunicar el contenido del proyecto, así como su propósito, relevancia, pertinencia y beneficiarios  
**Afirmación:** El lenguaje utilizado es claro y preciso por lo que el objetivo y propósitos del proyecto son comprensibles.
2. **Apropiación:** Hace referencia al grado de apropiación que tienen los miembros del equipo en relación con el proyecto formulado  
**Afirmación:** Los miembros del equipo demuestran dominio y apropiación del proyecto y su posible impacto.
3. **Respuesta a preguntas formuladas:** Hace referencia la capacidad de respuesta, así como la claridad y coherencia de estas con el proyecto formulado  
**Afirmación:** Responden con claridad y precisión las preguntas que le son formuladas en concordancia con el proyecto planteado.
4. **Presentación:** Hace referencia al documento escrito.  
**Afirmación:** El documento debe ser claro y legible sin errores ortográficos. La expresión debe ser adecuada y comprensible para el público objetivo.
5. **Referencias:** Se debe referenciar los trabajos o investigaciones que aportaron a la presentación de la investigación.

**Afirmación:** Tiene en cuenta la normatividad vigente en relación con la problemática tratada.

<b>RUBRICA EMPLEADA PARA EVALUAR EL COMPONENTE PRESENTACIÓN Y SUSTENTACIÓN</b>					
<b>Indicadores</b>	<b>Calificación</b>				
	<b>(0,1]</b>	<b>(1,2]</b>	<b>(2,3]</b>	<b>(3,4]</b>	<b>(4,5]</b>
<b>Comunicación:</b> El lenguaje utilizado es claro y preciso por lo que el objetivo y propósitos del proyecto son comprensibles.					
<b>Apropiación:</b> Los miembros del equipo demuestran dominio y apropiación del proyecto y su posible impacto.					
<b>Respuesta a preguntas formuladas:</b> Responden con claridad y precisión las preguntas que le son formuladas en concordancia con el proyecto planteado.					
<b>Presentación:</b> El documento debe ser claro y legible sin errores ortográficos. La expresión debe ser adecuada y comprensible para el público objetivo.					
<b>Referencias:</b> Las referencias deben ser relevantes y estar correctamente citadas en el texto siguiendo las normas establecidas.					

### **Componente de Solución de problemas**

1. **Formulación:** Se trata de la identificación y definición del problema que se va a tratar el cual debe estar relacionado con el cuidado del agua.

**Afirmación:** Demuestra claridad en el problema que se quiere resolver y lo formula en términos de una pregunta que guarda relación con la situación real.

2. **Creatividad de la solución:** Hace referencia a la capacidad de generar nuevas ideas y soluciones al problema encontrado.

**Afirmación:** Presenta soluciones creativas e innovadoras

3. **Procedimientos válidos:** Hace referencia a los procedimientos y heurísticas utilizadas en la solución del problema.

**Afirmación:** Los procedimientos usados en la solución del problema son válidos y se ajustan a la situación planteada.

4. **Uso del lenguaje matemático:** hace referencia al lenguaje utilizado para formular el problema y comunicar las ideas y posibles soluciones.

**Afirmación:** Se hace uso adecuado del lenguaje matemático, así como diversos registros de representación de la información del problema.

5. **Ajuste de la solución al problema:** Hace referencia a la coherencia que existe entre la solución encontrada y el problema planteado.

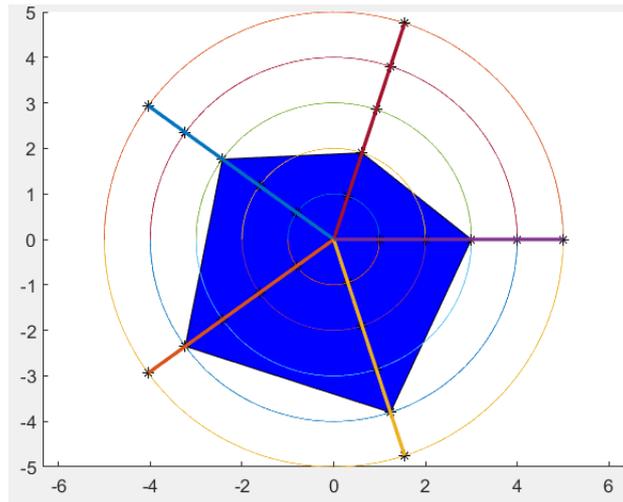
**Afirmación:** La solución encontrada se ajusta al problema.

<b>RUBRICA EMPLEADA PARA EVALUAR EL COMPONENTE DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS</b>					
<b>Indicadores</b>	<b>Calificación</b>				
	<b>(0,1]</b>	<b>(1,2]</b>	<b>(2,3]</b>	<b>(3,4]</b>	<b>(4,5]</b>
<b>Formulación:</b> Demuestra claridad en el problema que se quiere resolver y lo formula en términos de una pregunta que guarda relación con la situación real.					
<b>Creatividad de la solución:</b> Presenta soluciones creativas e innovadoras.					
<b>Procedimientos validos:</b> Los procedimientos usados en la solución del problema son válidos y se ajustan a la situación planteada.					
<b>Uso del lenguaje matemático:</b> Se hace uso adecuado del lenguaje matemático, así como diversos registros de representación de la información del problema.					
<b>Ajuste a la solución del problema:</b> La solución encontrada se ajusta al problema.					

Para la valoración de los proyectos, el evaluador con criterio propio y teniendo en cuenta las afirmaciones de los indicadores en cada uno de los componentes hará uso de una escala de uno a cinco, siendo uno la calificación más baja y cinco la calificación más alta, como se muestra en la siguiente tabla, luego las calificaciones son ingresadas en el programa para obtener la valoración final en cada una de las dimensiones a evaluar.

A continuación, se presenta la rúbrica empleada para evaluar la componente de modelación matemática, en donde totalmente en desacuerdo corresponde al rango de  $(0,1]$ , en desacuerdo corresponde al rango entre  $(1,2]$ , ni de acuerdo ni desacuerdo corresponde al rango entre  $(2,3]$ , de acuerdo corresponde al rango entre  $(3,4]$  y finalmente totalmente de acuerdo corresponde al rango entre  $(4,5]$ .

La valoración de los proyectos propuesta por los evaluadores se registra en un modelo de evaluación el cual es una extensión del método de la telaraña que ya se ha descrito y que consiste en una comparación mediante el cociente del área de un polígono determinada por la calificación de los evaluadores y el área total definida por una calificación óptima en cada dimensión. El polígono construido por la calificación es un polígono de  $k$  lados, en donde el número de lados indica los criterios o dimensiones a evaluar en una tarea o trabajo específico, cada dimensión tendrá distintos niveles de dificultad y al representar el nivel evaluado en cada dimensión mediante un punto en el plano cartesiano, formando así un polígono uniendo los puntos como se ilustra a continuación.



*Ilustración 7: Ejemplo funcionamiento del modelo evaluativo*

Como se describió anteriormente el área del polígono generado se compara con el polígono de mayor área posible, el cual corresponde a un desarrollo óptimo en cada una de las dimensiones a evaluar. Este modelo permite comparar el desempeño en cada dimensión y visualizar de una manera gráfica los resultados obtenidos en el trabajo realizado. El desarrollo del modelo se presenta mediante un algoritmo multidimensional el cual fue desarrollado en la plataforma Matlab.

A continuación, se muestra un ejemplo en donde se pretende evaluar 5 dimensiones, es decir  $k = 5$ , en una tarea o proyecto.

- Se construyen cinco circunferencias concéntricas con centro en el origen del plano como se muestra en la siguiente grafica.
- Se forman  $k$  rayos con punto inicial el origen del plano y separados por un ángulo  $\theta = \frac{2(180^\circ)}{k} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ , como se ilustra en la siguiente

figura

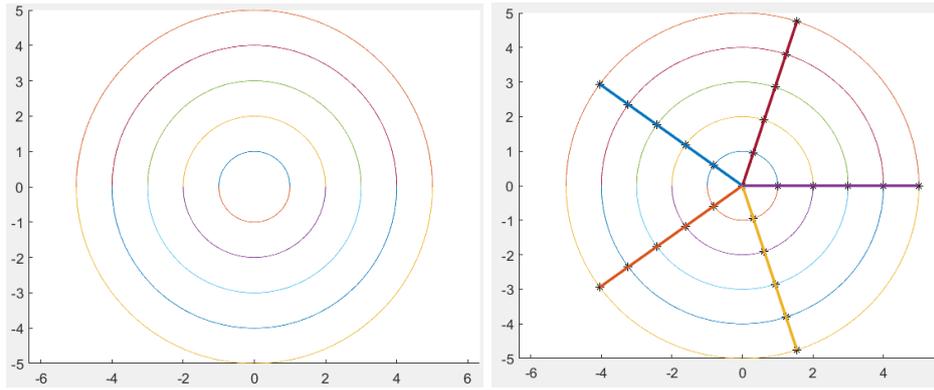


Ilustración 8: Pasos 1 y 2 del modelo evaluativo

Los puntos de corte entre los rayos y las circunferencias concéntricas corresponden a las coordenadas en el plano cartesiano con componente  $(r \cdot \cos(h \cdot \theta), r \cdot \sin(h \cdot \theta))$  con  $r = 1, 2, 3, 4, 5$  y  $h = 0, 1, 2, \dots, k-1$ , y estos representan las posibles valoraciones obtenidas en una escala de uno a cinco, los cuales representan los niveles de dificultad en cada una de las dimensiones. Por ejemplo, si las notas obtenidas al evaluar las cinco categorías son  $c_{\{1\}} = 4$ ,  $c_{\{2\}} = 3$ ,  $c_{\{3\}} = 3$ ,  $c_{\{4\}} = 4$  y  $c_{\{5\}} = 2$  estos se representan en la gráfica de la siguiente forma:

$$c_1 = \left( 4 \times \cos\left(0 \times \frac{2\pi}{5}\right), 4 \times \sin\left(0 \times \frac{2\pi}{5}\right) \right)$$

$$c_2 = \left( 3 \times \cos\left(1 \times \frac{2\pi}{5}\right), 3 \times \sin\left(1 \times \frac{2\pi}{5}\right) \right)$$

$$c_3 = \left( 3 \times \cos\left(2 \times \frac{2\pi}{5}\right), 3 \times \sin\left(2 \times \frac{2\pi}{5}\right) \right)$$

$$c_4 = \left( 4 \times \cos\left(3 \times \frac{2\pi}{5}\right), 4 \times \sin\left(3 \times \frac{2\pi}{5}\right) \right)$$

$$c_5 = \left( 2 \times \cos\left(4 \times \frac{2\pi}{5}\right), 2 \times \sin\left(4 \times \frac{2\pi}{5}\right) \right)$$

Al ubicar los puntos en el plano y unirlos mediante un segmento se forma un polígono como se ilustra en la siguiente figura.

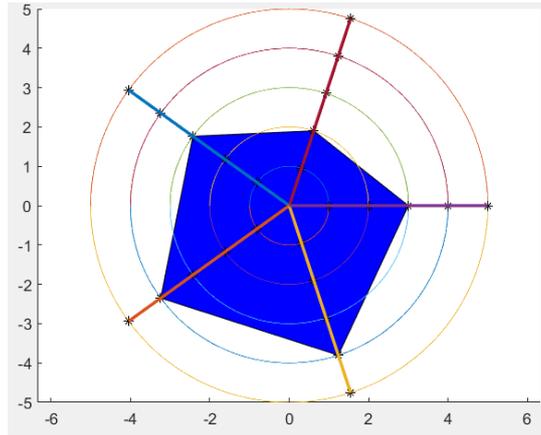


Ilustración 9: Área generada por las notas en cada dimensión

La calificación máxima posible en cada una de las dimensiones está dada por  $c_{\{1\}} = c_{\{2\}} = c_{\{3\}} = c_{\{4\}} = c_{\{5\}} = 5$ , los puntos en el plano estarán representados por:

$$c_1 = (5 \times \cos(0 \times \frac{2\pi}{5}), 5 \times \sin(0 \times \frac{2\pi}{5}))$$

$$c_2 = (5 \times \cos(1 \times \frac{2\pi}{5}), 5 \times \sin(1 \times \frac{2\pi}{5}))$$

$$c_3 = (5 \times \cos(2 \times \frac{2\pi}{5}), 5 \times \sin(2 \times \frac{2\pi}{5}))$$

$$c_4 = (5 \times \cos(3 \times \frac{2\pi}{5}), 5 \times \sin(3 \times \frac{2\pi}{5}))$$

$$c_5 = (5 \times \cos(4 \times \frac{2\pi}{5}), 5 \times \sin(4 \times \frac{2\pi}{5}))$$

El polígono que se obtiene se ilustra en la siguiente figura

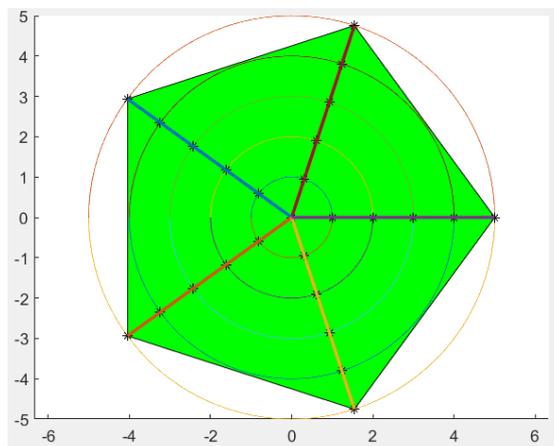


Ilustración 10: Área máxima posible.

Luego se realiza la comparación entre el área obtenida en el paso, es decir, el área  $N_{max}$  y el área del polígono máximo  $A_{max}$ . Esta comparación la representaremos por  $IEA = \frac{N_{max}}{A_{max}}$

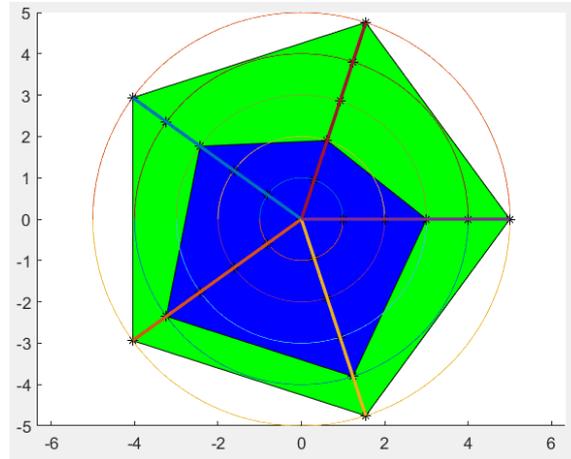


Ilustración 11: Comparación de las áreas

Hay que tener en cuenta que el orden en que se dispongan las categorías incide en el área del polígono; es decir, se introducirá un vector en el espacio  $R^k$  con  $k \in N$ , donde cada componente corresponde a la evaluación de una dimensión con sus respectivos indicadores de desempeño.  $u = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ . Como hay  $k$  dimensiones, se presentan  $k!$  permutaciones de las posiciones  $c_i$  con  $i = 1, 2, \dots, k$  del vector, con las cuales se podrían generar  $(k - 1)!$  polígonos, en donde cada uno de los polígonos se podría rotar  $k$  veces. Para evitar que el algoritmo pierda eficiencia sacando cuentas repetidas dado que el área de una calificación se repetirá  $k$ -veces, esto por las posibles rotaciones, por lo que se le dio la instrucción al algoritmo de solo tener en cuenta las  $(k - 1)!$  permutaciones, es decir, dejando una posición fija en el vector de calificaciones.

De los  $(k - 1)!$  polígonos el algoritmo tomará aquella que represente la mayor área posible; en caso de tener más de una opción se tomará la primera que



A manera de ejemplo, se ilustra la forma como se evaluará cada uno de los componentes y como se presentará el respectivo análisis de la valoración hecha por los evaluadores expertos en cada proyecto, para ello se simulan los resultados de la evaluación en uno de los componentes.

RUBRICA EMPLEADA PARA EVALUAR EL COMPONENTE DE MODELACIÓN MATEMÁTICA					
Indicadores	Calificación				
	(0,1]	(1,2]	(2,3]	(3,4]	(4,5]
<b>Precisión:</b> Las predicciones del modelo están en correspondencia con los datos reales.				3.5	
<b>Validez:</b> Las suposiciones que se hicieron en el proceso de modelación son razonables				4	
<b>Robustez:</b> El modelo matemático planteado es robusto			3		
<b>Utilidad o funcionalidad:</b> El modelo matemático es útil y funcional					5
<b>Claridad:</b> El modelo matemático es fácil de entender y las suposiciones y ecuaciones se explican claramente.					5

$$N_1 = \frac{N_{max}}{A_{max}} = \frac{40.42}{59.4410} * 5 = 3.4$$

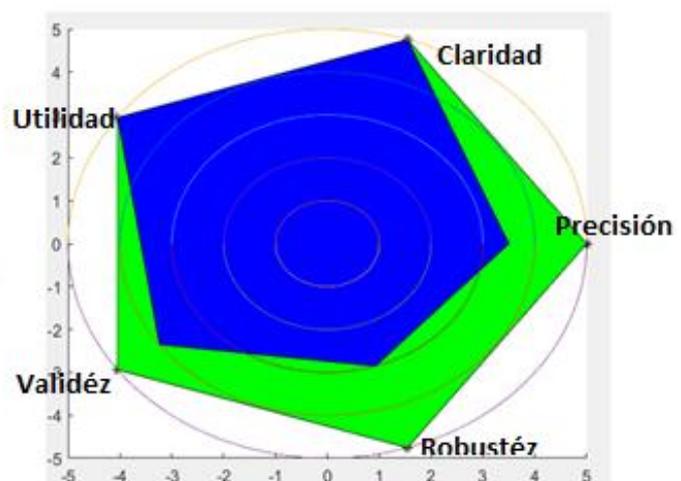


Ilustración 13: Gráfica componente de modelación matemática

En esta simulación, el área sombreada muestra la calificación obtenida por el proyecto en el componente de modelación matemática, donde se pueden observar fortalezas en los indicadores de **Utilidad o funcionalidad, Claridad y Validez**, lo que indica que los evaluadores se manifiestan totalmente de acuerdo en que el modelo matemático es útil y funcional, es fácil de entender, las ecuaciones se explican claramente y las suposiciones que se hicieron en el proceso de modelación son razonables. Por otro lado, se observan debilidades en los indicadores de precisión y robustez, indicando así que los jurados están parcialmente de acuerdo en que las predicciones del modelo están en correspondencia con los datos reales y que el modelo es robusto. Esta valoración pone en alerta a los integrantes del equipo en los aspectos que se deben mejorar.

### **Fase final: Valoración**

En esta fase se analizan la percepción de los estudiantes y docentes, los aspectos del pensamiento matemático manifestado por los estudiantes durante el desarrollo del curso formativo, y los proyectos presentados en las olimpiadas.

Para ello se aplicaron dos encuestas de percepción, una dirigida a estudiantes y otra dirigida a docentes para analizar la percepción final de los participantes en el desarrollo del curso formativo y de esa manera valorar el impacto de la estrategia.

Finalmente, se valoran los efectos de la integración de la educación matemática crítica, la modelación matemática y el aprendizaje basado en

proyectos en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, para ello se aplicará la rúbrica analítica que se describe a continuación.

Fases	Niveles de desarrollo		
	Bajo	Medio	Superior
Abordaje	Presenta dificultades para modelar matemáticamente situaciones sencillas del mundo real relacionadas con el cuidado del agua y muestra poca claridad en su enfoque de resolución de problemas.	Modela matemáticamente situaciones sencillas del mundo real y muestra avances en su enfoque de resolución de problemas	Modela matemáticamente situaciones del mundo real, explorando diversas opciones para definir un modelo sólido de la situación.
Ataque	Demuestra poca comprensión de los elementos matemáticos necesarios para atacar la solución de problemas involucrados en situaciones medioambientales y comete errores frecuentes en el proceso	Muestra comprensión de algunos elementos matemáticos necesarios para atacar la solución de problemas involucrados en situaciones medioambientales pero su enfoque en ocasiones es inadecuado o incompleto	Muestra comprensión profunda de los elementos matemáticos necesarios para atacar de manera efectiva la solución a problemas matemáticos involucrados en situaciones medioambientales, aplicando conceptos de manera apropiada y precisa, utilizando estrategias variadas y adecuadas
Revisión	Muestra poca evidencia de pensamiento crítico al revisar y mejorar las soluciones matemáticas propuestas a las situaciones tratadas	Demuestra rasgos incipientes del pensamiento matemático crítico al revisar y mejorar con poca profundidad las soluciones matemáticas, propuestas a las situaciones tratadas	Demuestra un alto nivel de pensamiento matemático crítico al revisar y mejorar a profundidad las soluciones propuestas a las situaciones tratadas, mostrando creatividad y originalidad en sus enfoques e integrando de manera crítica y creativa los conceptos matemáticos,

			cuestionando y analizando las implicaciones éticas y sociales de sus soluciones.
--	--	--	--

### 3.2 Alcance del estudio

El presente estudio pretende presentar avances en la caracterización del pensamiento matemático y del tipo de cultura de cuidado ambiental que se involucra en el desarrollo de olimpiadas medioambientales realizadas a través del diseño (con su respectivo componente de modelación matemática), implementación, análisis de resultados y valoración de proyectos ambientales en estudiantes de educación media del Departamento del Magdalena.

Tal cómo se ha mencionado en apartes anteriores, el **aporte práctico** de la presente investigación radica en el diseño e implementación de olimpiadas medioambientales basadas en proyectos y la modelación matemática que promuevan el desarrollo del pensamiento matemático y la actuación responsable ante el medio ambiente. Este diseño incluye una capacitación previa a estudiantes y profesores de las escuelas de la ciudad de Santa Marta en los temas de la educación basada en proyectos y la modelación matemática. La olimpiada contempla un conjunto de actividades basadas en proyectos relacionados con la modelación matemática y el cuidado del agua que promueven el pensamiento matemático en estudiantes de educación media.

Como **aporte teórico** se destaca presentar avances en la caracterización de los efectos de la integración de la educación matemática crítica, la modelación matemática y el aprendizaje basado en proyectos medioambientales en el

desarrollo del pensamiento matemático de estudiantes y docentes de educación media del Distrito de Santa Marta. Todo esto teniendo en cuenta que el desarrollo del pensamiento matemático no solo es el fin primordial de aprender matemáticas, sino que es una actividad compleja que pone la resolución de problemas en el corazón de actividad matemática en el aula, lo que permite tomar parte activa en la sociedad particularmente en el análisis crítico y planteamiento de soluciones a problemáticas medioambientales.

### **3.3 Población y muestra**

La población está compuesta por veinte personas formadas en cuatro equipos cada uno de los cuales incluyen cuatro estudiantes y un docente acompañante quienes pertenecen a instituciones educativas del Distrito de Santa Marta. La participación en las olimpiadas fue voluntaria. Las instituciones participantes en las olimpiadas fueron: Colegio 1, colegio 2, colegio 3 y colegio 4.

### **3.4 Conclusiones del Capítulo 3**

En este capítulo se describió cuáles son las distintas fases que se planean desarrollar en busca del cumplimiento de las metas propuestas por la investigación entre las cuales se encuentran el aporte práctico al desarrollar las olimpiadas y las distintas fases que se presentan en la misma. Para esto se hacen necesarios las distintas técnicas e instrumentos con los que se cuenta para obtener información vital para el desarrollo de la investigación. Por otro lado, se considera importante para la investigación los cursos formativos en modelación matemática y aprendizaje basado en proyectos con la intención de brindar unos conocimientos mínimos necesarios para el desarrollo de los

distintos proyectos que deben presentar los estudiantes para que así se pueda analizar los productos presentados por los distintos grupos participantes con la finalidad de llevar a cabo el aporte teórico del trabajo.

## **ANÁLISIS DE RESULTADOS**

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en el proceso de diseño, implementación y valoración de las olimpiadas medioambientales para el desarrollo del pensamiento matemático y la modelación matemática a través del aprendizaje basado en proyectos. En este sentido, el análisis de los resultados de la investigación se organiza dando respuesta a cada uno de los objetivos propuestos y las fases del desarrollo de esta.

### **Aspectos de la educación matemática crítica, la modelación matemática y el aprendizaje basado en proyectos observados durante el desarrollo del curso formativo que favorecen el desarrollo del pensamiento matemático de estudiantes y docentes de educación media, en situaciones medioambientales**

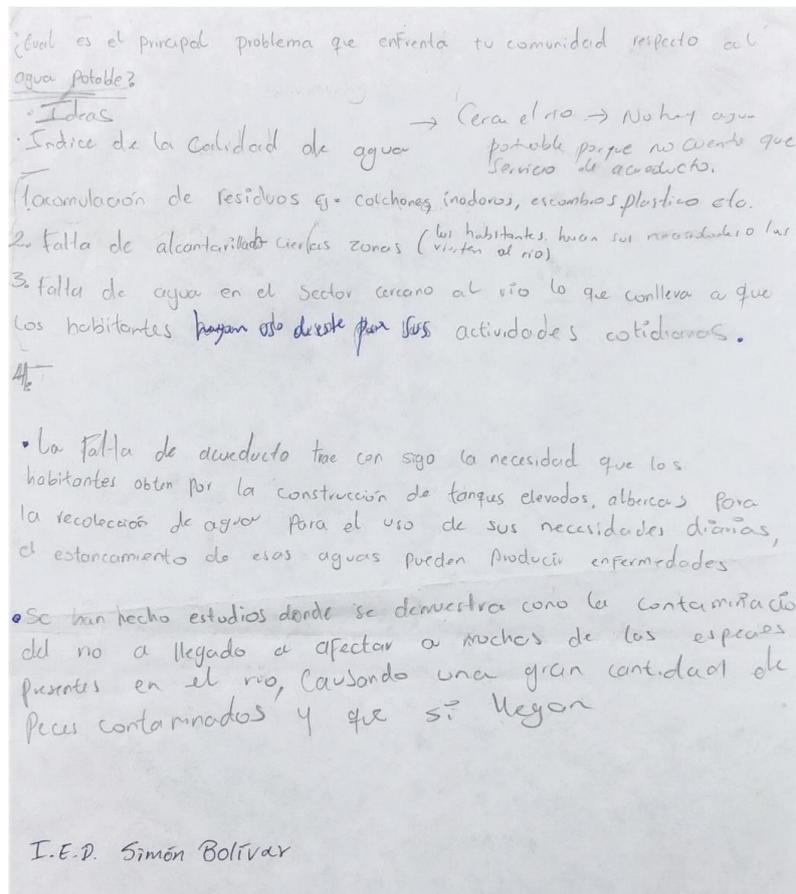
Las formas tradicionales de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas han evolucionado y en la actualidad se reconoce la importancia de incorporar enfoques pedagógicos innovadores que promuevan el pensamiento matemático crítico y su aplicación en contextos relevantes y significativos. En ese sentido, el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) y la Educación Matemática Crítica (EMC) son enfoques pedagógicos que han ganado relevancia en este contexto.

A continuación, se presentan algunos aspectos de la educación matemática crítica, la modelación matemática y el aprendizaje basado en proyectos observados durante el desarrollo del curso formativo que pueden favorecer el desarrollo del pensamiento matemático en situaciones medioambientales en estudiantes de educación media en el Distrito de Santa Marta.

Cuando se planteó a los equipos de las instituciones participantes la pregunta: “¿Cuál es el principal problema que enfrenta tu comunidad respecto al agua potable?”, esta generó en los estudiantes la discusión general y en equipos de modo que les permitió identificar un problema del mundo real que se requiere entender y atender.



*Ilustración 14: Estudiantes haciendo recorrido por la comunidad y el Río Gaira identificando problemáticas a trabajar.*



*Ilustración 15: Problemática identificada por los estudiantes del colegio 2.*

La imagen muestra las respuestas de uno de los equipos donde identifican al menos tres problemas a su parecer críticos para su comunidad, como se puede leer los estudiantes hacen referencia a

1. Índice de calidad del agua “Acumulación de residuos, ej. Colchones, inodoros, ...”
2. Falta de acueducto: “trae consigo la necesidad de que los habitantes opten por la construcción de tanques elevados, albercas para la recolección de agua para sus necesidades ...”
3. Contaminación de los ríos. “se han hecho estudios donde se demuestra cómo la contaminación de los ríos llega a afectar muchas especies ,...”

Lo anterior es una muestra de que los contextos auténticos promueven el desarrollo del pensamiento crítico y aprendizajes efectivos, además promueve la contextualización crítica, la reflexión, la participación, y el trabajo colaborativo en problemas locales, que son elementos claves del ABP y la EMC.

Otro equipo, colegio 3, identifica como problemática de su comunidad el desperdicio de agua en el mal uso de los baños, y sugiere hacer una investigación respondiendo a preguntas como ¿Cuánta agua gasta en promedio un estudiante? ¿Cuánta agua necesita un estudiante cuando usa el baño? Estas preguntas requieren un abordaje matemático de recolección análisis de datos, además de generar cultura en el cuidado del agua.

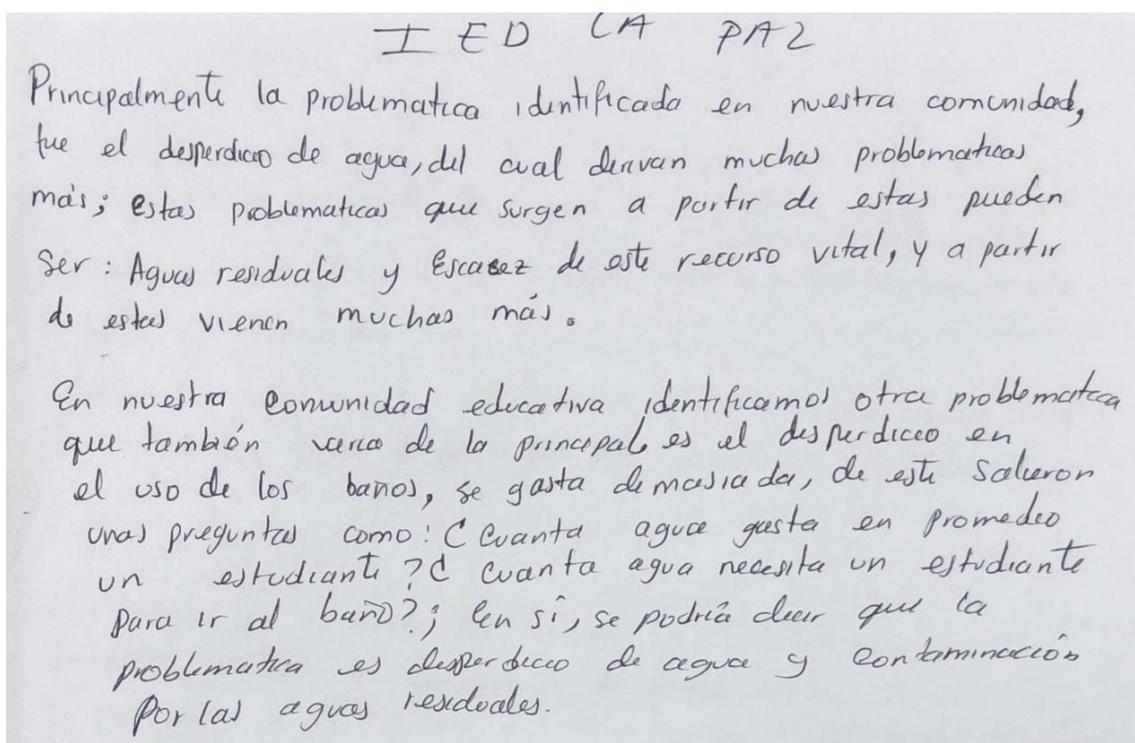


Ilustración 16: Evidencias comentarios de los estudiantes sobre la problemática detectada en las comunidades.

La imagen muestra las iniciativas de los estudiantes a partir de problemáticas detectadas en su comunidad educativa, que podrían requerir de un abordaje a partir de la formulación de proyectos. Aquí se ve una muestra de la ética

ambiental, participación ciudadana, reflexión y contextualización crítica, los cuales se han resaltado como aportes de la integración del ABP y la EMC en el desarrollo del pensamiento matemático en situaciones medioambientales.

## **Conclusiones**

La integración de ABP y EMC puede empoderar a los estudiantes para que se conviertan en ciudadanos críticos y activos que comprenden la importancia de las matemáticas en la toma de decisiones éticas y sostenibles. Sin embargo, su implementación exitosa requiere un compromiso significativo de docentes, instituciones y políticas educativas a nivel nacional y local para que el esfuerzo invertido en la incorporación de estos enfoques en el proceso de enseñanza y aprendizaje puede tener un impacto duradero en la capacidad de los estudiantes para abordar los desafíos medioambientales y el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

### **3.5 Análisis de los presupuestos teóricos que sustentan el desarrollo de oportunidades para generar proyectos que favorezcan el medioambiente en estudiantes de educación media en el Distrito de Santa Marta.**

La integración de los enfoques de ABP y EMC en el contexto medioambiental del distrito de Santa Marta puede ser especialmente efectiva para promover el desarrollo del pensamiento matemático y la conciencia crítica en los estudiantes de educación media. Algunas estrategias para esta integración, según Larmer et al. (2015) incluyen:

**Enfoque en problemas locales:** Los proyectos pueden centrarse en problemas medioambientales específicos que afectan a las comunidades

locales; esto permite a los estudiantes ver la relevancia directa de las matemáticas y la toma de decisiones éticas en su entorno. Esto se observó cuando los estudiantes identificaron los problemas que había en su comunidad y en su institución educativa relacionados con el agua. Por ejemplo el colegio 2 se encuentra ubicada alrededor de 200 metros del río Gaira y, preocupados por la contaminación de este y de la cantidad de desechos cercanos al río, decidieron trabajar su investigación en medir el índice de calidad del agua del río (ICA) y a generar acciones con la comunidad para evitar la contaminación y promover la cultura del cuidado del río. El colegio 1 presentó un proyecto de la construcción de una biobarda con la cual se recogía residuos sólidos en el río Manzanares evitando en cierta medida la contaminación de este y la llegada de los residuos al mar. Los colegios 3 y 4 trabajaron proyectos similares en sus instituciones determinando la cantidad de agua que se emplea en su institución y generando acciones de uso racional del agua.

**Debate y discusión crítica:** Los estudiantes pueden participar en debates y discusiones críticas sobre cuestiones medioambientales, utilizando datos y argumentos basados en matemáticas, lo cual fomenta el pensamiento crítico y la capacidad de comunicar ideas de manera efectiva. Esto se vio evidenciado durante el curso formativo en donde los equipos debatieron sobre las diferentes problemáticas existentes en su entorno y finalmente por equipos escogieron una de esas para trabajar su proyecto. Además, una actividad interesante fue la elección por cada equipo de un logo y nombre de cada equipo, actividad muy motivadora y con un agregado de creatividad por parte de cada equipo. Por otro lado, las sugerencias dadas por parte de expertos fueron escuchadas por los estudiantes y ellos mismos decidieron el camino a seguir.



*Ilustración 17: Diseño logo creado por cada colegio*

**Colaboración con expertos:** Los educadores pueden invitar a expertos en matemáticas y medio ambiente a colaborar en proyectos con los estudiantes; esto brinda a los estudiantes la oportunidad de aprender de profesionales en el campo y aplicar sus conocimientos de manera práctica. Se evidencia en las asesorías empleadas por distintos equipos con expertos de distintas áreas, entre las que se destacan: expertos en el cuidado del agua con quienes compartieron experiencias sobre el uso de Biobarda instaladas en el Rio Manzanares en la ciudad de Santa Marta; expertos en ciencias de los materiales con quienes discutieron sobre el uso de materiales eficientes; expertos en ingeniería ambiental y calidad del agua, para el análisis de los índices de calidad del agua en el Rio Gaira; y un experto en estadística para considerar algunos modelos probabilísticos y tratamiento de la información. El trabajar con expertos académicos fue una experiencia significativa para los estudiantes y docentes acompañantes ya que además de mostrarse

interesados en conocer y aprender de otras temáticas para ellos desconocidas, pudieron aplicarlas en sus proyectos.



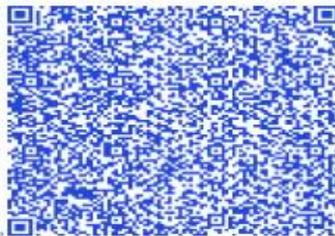
*Ilustración 18: Evidencia colaboración con expertos.*



<b>Cliente:</b>	Elery Chacuto Lopez	<b>Teléfono:</b>	3006782939
<b>Dirección:</b>	Cra 32 # 22-08, Sector San Pedro Alejandrino, Santa Marta	<b>Uso:</b>	N/A
<b>Identificación:</b>	N/A	<b>Punto de muestra:</b>	P1a-P1b-P2a-P2b
<b>Origen de la muestra:</b>	Agua superficial	<b>Tipo de muestra:</b>	Simple
<b>Sitio de muestreo:</b>	Cuenca Rio Manzanares	<b>Lote/Ref:</b>	N/A
<b>Muestreo:</b>	14/09/2023 Por el cliente	<b>Emisión:</b>	25/09/2023
<b>Recepción:</b>	19/07/2023	<b>Trazabilidad:</b>	2380083

Parámetro	Metodología	P 1-a	P 1-b	P 2-a	P 2-b
Alcalinidad mg/l CaCO3	Volumétrico con HCl, SM 2320-B	71,2	80,4	85,7	61,2
Conductividad µS/cm	Potenciométrico, SM 2310-B	84,8	122,1	94,6	95,3
Fosfatos, mg PO <sub>4</sub> <sup>3-</sup> /l	Ácido ascórbico, SM 4500-P-E	0,3381	0,3390	0,3438	0,3381
Nitratos, mg NO <sub>3</sub> <sup>-</sup> /l	Colorimetría, SM 4500-NO <sub>3</sub> -B	0,0581	0,0588	0,0611	0,6021
Nitratos mg NO <sub>2</sub> <sup>-</sup> /l	Colorimetría, SM 4500-NO <sub>2</sub> -E	0,47	0,43	0,45	0,41
pH	Potenciométrico, SM 4500-H-B	7,36	7,37	7,38	7,37
Sólidos suspendidos mg/l	Gravimétrico, SM 2540-D	22,7	23,1	22,4	21,9
Coliformos totales UFC/100ml	Filtración por membrana, SM 9222-C	25,4	18,71	22,78	23,1
F. colif. UFC/100ml	Filtración por membrana, SM 9222-D	795	886	715	766
DNOC <sub>5</sub> mg/L O <sub>2</sub>	Incubación a 5 días SM 5210-B	8,26	9,7	8,61	8,9
DQO mg/L O <sub>2</sub>	Reflujo cerrado / Potencimetría SM 5220-D	35,6	37,9	32,1	33,4
Oxígeno disuelto, mg/l	Electrométrico / SM 4500-O <sub>2</sub>	3,78	3,71	3,82	3,89

ND= no detectado  
\*\*\* = no específica



Carlos España Rangel  
Carlos España Rangel

Compendio de Agua Ambiental al menos, Surco

Este documento no es válido sin el código QR y la firma del coordinador



Ilustración 19: Evidencia resultados laboratorio par el informe del ICA empleado por el colegio 2.

**Mayor motivación y compromiso:** El ABP y la EMC pueden aumentar la motivación de los estudiantes al brindarles la oportunidad de trabajar en proyectos significativos y relevantes para su entorno. Esto se evidenció en el compromiso y actitud mostrada por los estudiantes y docentes acompañantes a lo largo del desarrollo de sus proyectos explicitando el interés por atender problemáticas específicas relacionadas con el cuidado del agua. Por ejemplo, abordaron desafíos como medir el caudal en un río, investigar antecedentes de

herramientas de recolección de residuos, averiguar y buscar asesoría con respecto al índice de calidad de agua de un río.

Por otro lado, mostraron la iniciativa de generar acciones con la comunidad para evitar el uso excesivo de agua en las instituciones educativas y evitar la contaminación del río. Finalmente, las instituciones participantes estuvieron muy interesados en continuar realizando este tipo de actividades que para ellos fue una experiencia muy significativa por lo que solicitaron ser tenidos en cuenta en las olimpiadas del próximo año para seguir fortaleciendo los proyectos.

**Desarrollo de habilidades transferibles:** Los estudiantes adquieren habilidades que son aplicables en una variedad de contextos, incluida la resolución de problemas, la toma de decisiones informadas y la comunicación efectiva. Esto se evidenció con los trabajos realizados por los estudiantes en los cuales aplicaron conocimientos que se brindaron en el curso formativo y lo emplearon en otras posibles situaciones, además del informe final entregado en donde siguieron las recomendaciones brindadas en el curso formativo por la experta en formulación de proyectos Magister Lizeth Niño Camacho. También se evidenció en las sustentaciones realizadas por los estudiantes las cuales fueron muy destacadas.



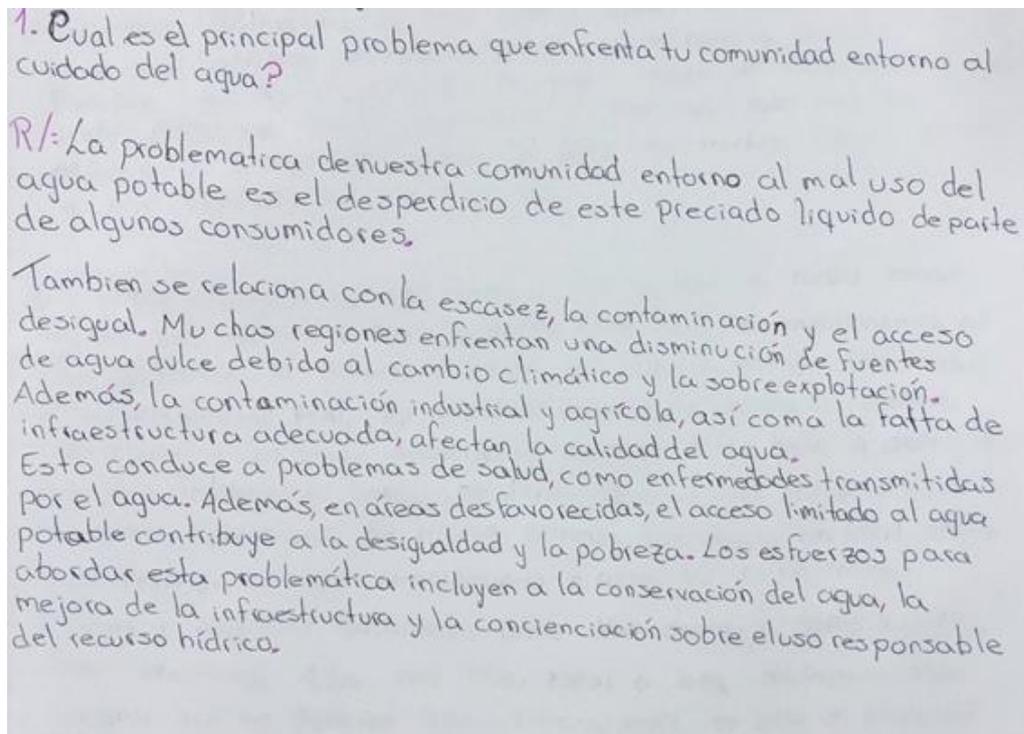
*Ilustración 20: Colegios trabajando en equipo durante el curso formativo.*

A continuación, se muestran algunos de los trabajos de los estudiantes que ponen en evidencia los aspectos antes mencionados.

Por ejemplo, cuando los estudiantes eligen sus proyectos de acuerdo con los intereses colectivos y las necesidades detectadas, dan muestra de la autonomía y el enfoque en problemas locales que se promueve con el ABP y la EMC. En efecto, uno de los equipos decidió trabajar la descontaminación del río a través de un sistema que permita recoger desechos o residuos sólidos que flotan en el agua utilizando una red construida a partir de botellas recicladas.



*Ilustración 21: Estudiantes del colegio 1 probando su prototipo de proyecto de recolección de residuos en el río Manzanares*



*Ilustración 22: Problemática manifestada por el equipo de estudiantes del colegio 1.*

La imagen muestra la problemática escogida por el equipo de estudiantes de, la escasez, contaminación y acceso desigual al agua potable, lo cual según ellos conduce a problemas de salud, como enfermedades transmitidas por el consumo de agua contaminada.

### 3.6 Análisis de los resultados de las actividades del curso formativo

Para el análisis de las actividades durante el desarrollo del curso formativo se han tenido en cuenta tres aspectos fundamentales: el actitudinal, el conocimiento y las habilidades de pensamiento evidenciadas en el desarrollo de las tareas tal como se describe en la siguiente rúbrica.

ASPECTO	Nivel Inferior	Nivel Medio	Nivel Alto
Actitudinal	Muestra una actitud pasiva frente al desarrollo de las actividades.	En ocasiones se muestra proactivo frente al desarrollo de las actividades.	Muestra un alto interés frente al desarrollo de las tareas o problemas propuestos en las actividades.
Conocimiento	Muestra poca comprensión de las tareas propuestas en las actividades.	Muestra una comprensión parcial de los temas involucrados en las actividades.	Recurre a conceptos y procedimientos y el lenguaje adecuado para la solución de los interrogantes o problemas contenidos en las actividades.
Habilidades de pensamiento	Muestra tendencia a las respuestas elementales a los problemas planteados sin reflexión.  Las respuestas a las preguntas y soluciones a los problemas están basadas en el ensayo y error.	Muestra poca profundidad en su razonamiento, evidenciado en respuestas parciales y poco elaboradas a los interrogantes o problemas planteados	Presenta ideas consistentes, basadas en procesos de reflexión, discusión y/o indagación.  Muestra profundidad en sus razonamientos evidenciado en las respuestas elaboradas a los interrogantes o problemas planteados en las actividades, producto de la reflexión.

En cuanto a la **Actividad 1** el aprendizaje esperado es “*Reconoce la importancia del cuidado del agua y la formulación de proyectos para el cuidado del agua en la ciudad de Santa Marta*”.

Aquí se planteó a los grupos participantes la siguiente pregunta. ¿Cuál es el principal problema que enfrenta tu comunidad respecto al agua potable?

*Esta pregunta se plantea con el fin de identificar una pregunta del mundo real que se quiere entender.”*

Esta pregunta despertó el interés de los equipos por identificar un problema local o de su comunidad que a su criterio requiere ser atendido. En este sentido, cada institución pudo identificar y describir la problemática observada demostrando un alto interés frente a la importancia del cuidado del agua y la necesidad de formular proyectos que contribuyan con ello.

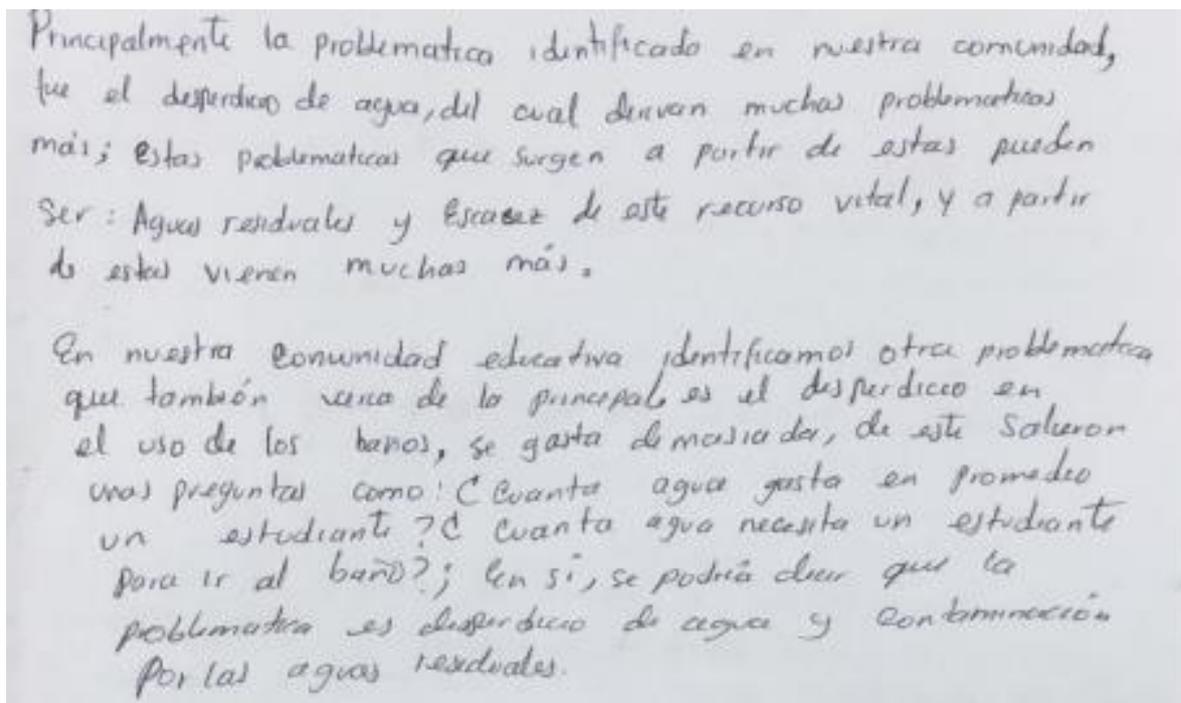


Ilustración 23: Identificación de problemáticas detectadas por los estudiantes

Los estudiantes del colegio 3 identifican como principal el manejo de las aguas residuales, la escasez del agua potable y el mal uso del agua evidenciado en el desperdicio en los baños. Al revisar el planteamiento de los estudiantes en nuestra comunidad educativa se observa otra problemática que también varía de la principal es el desperdicio de agua en los baños, se gasta demasiada, de esta salieron unas preguntas como: ¿Cuánta agua gasta en promedio un estudiante? ¿Cuánta agua necesita un estudiante para usar el baño? ... Mostrando poca profundidad en su razonamiento, evidenciado en las respuestas parciales y poco elaboradas a los interrogantes o problemas

planteados, ubicándose en el nivel medio de conocimiento establecido en la rúbrica de valoración de las actividades.

Por otro lado, los estudiantes del colegio 1 plantean que la problemática que demuestra su comunidad en torno al mal uso del agua potable es el desperdicio de este preciado líquido de parte de algunos consumidores, también se relaciona la escasez, la contaminación y el acceso desigual.

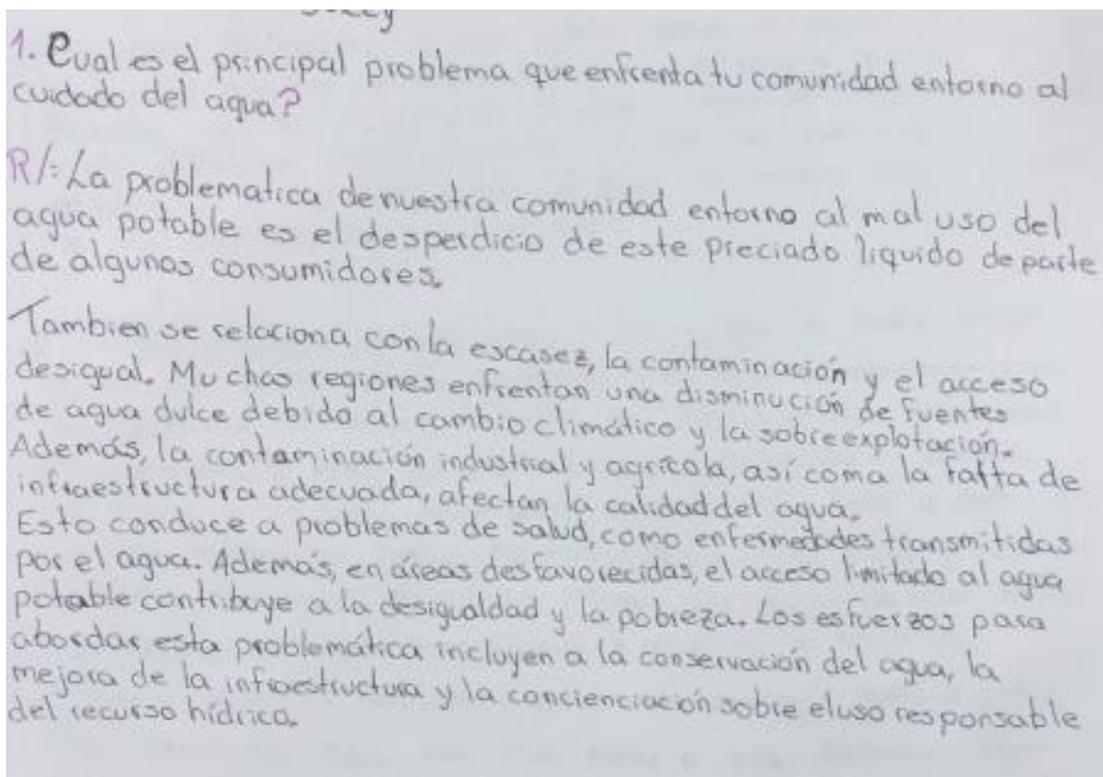


Ilustración 24: Identificación de problemas detectados por estudiantes

Por su parte, los estudiantes del colegio 2 destacan como problema de su comunidad, el índice de calidad del agua, la acumulación de residuos, falta de agua en el sector cerca del Río, la falta de acueducto y los estudios de cómo la contaminación del Río ha llegado a afectar a muchas de las especies presentes.

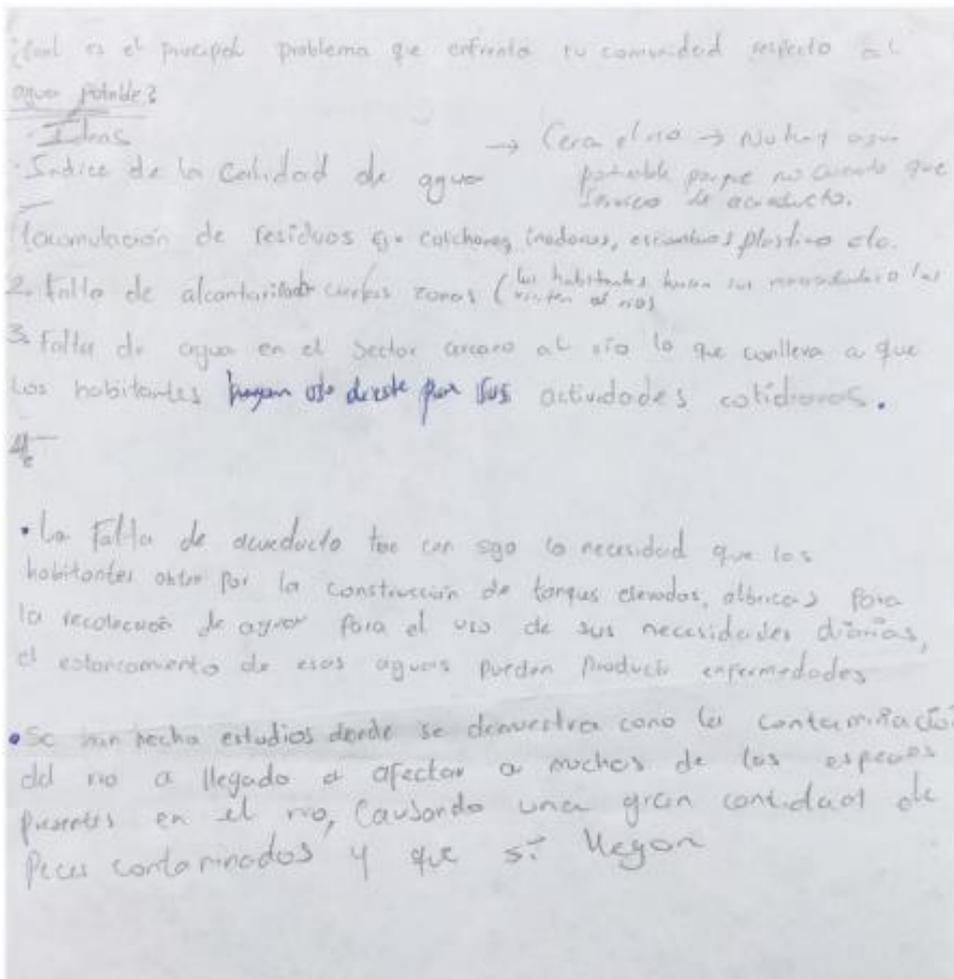


Ilustración 25: Identificación de problemas detectados por los estudiantes.

Aquí se evidencia un análisis más profundo a cerca de la pregunta planteada, presentando ideas consistentes basadas en procesos de reflexión, la discusión o la indagación, ubicándose en el nivel superior de la rúbrica de valoración.

Finalmente, colegio 2, destaca como problema principal de su comunidad, la mala distribución del agua y el poco uso razonable de la misma.

① ¿Cuál es el principal problema que enfrenta la comunidad respecto al agua potable?

Los problemas principales que encontramos en nuestra comunidad son:

① Una mala distribución del agua implica escasez. En nuestra sociedad, se ve muy afectada la disposición de uno de nuestros recursos primarios como es el agua por la mala creación de infraestructuras y la mala disposición capital que ofrece el Gobierno, esto, más la dificultad de transporte implica la falta en muchos lugares, no solo a nivel regional, sino, a nivel local.

② Poco uso razonable del agua: sabemos que el agua es nuestro recurso primario más importante para el planeta, y que como ya mencionamos, no todos lo tienen al alcance, e incluso hay quienes desean tener mucha más accesibilidad, pero, por otro lado tenemos a aquellos que disponen del recurso y no saben aprovecharlo e incluso llegan hasta a desperdiciarlo, una mala información implica no tener un razonamiento lógico y hacer un uso poco responsable del recurso, personas que tienen un fácil acceso y lo desperdician sin remordimiento o creen que es un recurso infinito e inagotable, situaciones como dejar duchas o grifos abiertos, usar demasiada agua para lavar platos o ropa, desperdiciar agua sobrante que no quisieran tomar, y mucho más es falta de educación y pertenencia. Sin embargo existen hogares que no cuentan con un lugar donde almacenar las cantidades de agua que llegan y esto conlleva a que se desperdicien muchos litros o galones de agua que otras personas puedan necesitar.

Ilustración 26: Identificación de problemas detectados por los estudiantes.

Se observa en los planteamientos de los estudiantes acerca de su percepción respecto a la problemática de su comunidad relacionada con el cuidado del agua, algunas ideas consistentes, basadas en procesos de reflexión, la discusión o la indagación. Además, muestran una tendencia a las respuestas elaboradas a los interrogantes o problemas planteados por lo que se ubican en el nivel superior de la rúbrica de valoración en cuanto a sus habilidades de pensamiento.

En general, frente a esta actividad, se observó en los equipos participantes un alto interés frente al desarrollo de las tareas o problemas propuestos en las actividades y algunas ideas consistentes basadas en procesos de reflexión, la discusión o la indagación, y razonamientos parciales frente a las situaciones demostrando haber reconocido la importancia del cuidado del agua y la formulación de proyectos para el cuidado del agua en la ciudad de Santa Marta el cuál es el objetivo de la actividad.

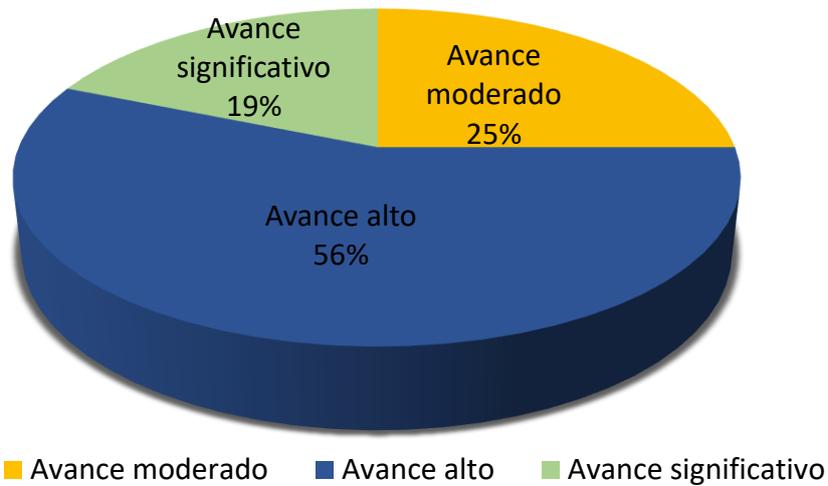
### **3.7 Análisis de la percepción de estudiantes y profesores a cerca del impacto del curso en el proceso formativo de modelación matemática y formulación de proyectos**

Para el análisis del impacto del desarrollo del curso en aspectos como el desarrollo del pensamiento matemático, la modelación matemática, la formulación de proyectos y las actitudes frente a las matemáticas, se aplicaron dos cuestionarios, uno a estudiantes con siete preguntas y otro a docentes con doce preguntas, la mayoría de ellas abiertas donde cada uno describe su percepción acerca del impacto del desarrollo del curso en su proceso formativo.

A continuación,

1. En una escala del 1 al 5, donde 1 es "Ningún avance" y 5 es "Avance significativo", ¿cómo calificaría los avances en sus habilidades matemáticas y de modelación como resultado de este curso?

### Habilidades matemáticas y de modelación matemática



La gráfica muestra que la mayoría de los estudiantes considera que han tenido un avance significativo o alto en sus habilidades matemáticas producto del desarrollo del curso formativo, lo que significa un impacto positivo en la formación de los estudiantes

2. Por favor proporcionar ejemplos concretos de cómo el curso ha influido en su proceso formativo y su crecimiento en resolución de problemas matemáticos.

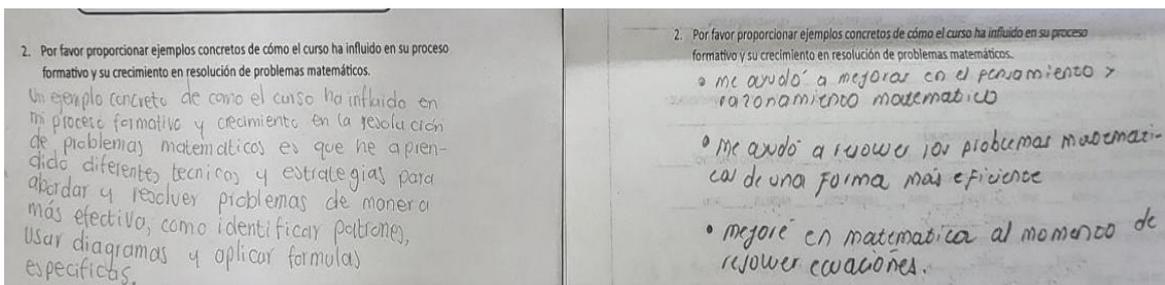


Ilustración 27: Respuestas de cómo el curso formativo ha influido en su proceso formativo de resolución de problemas.

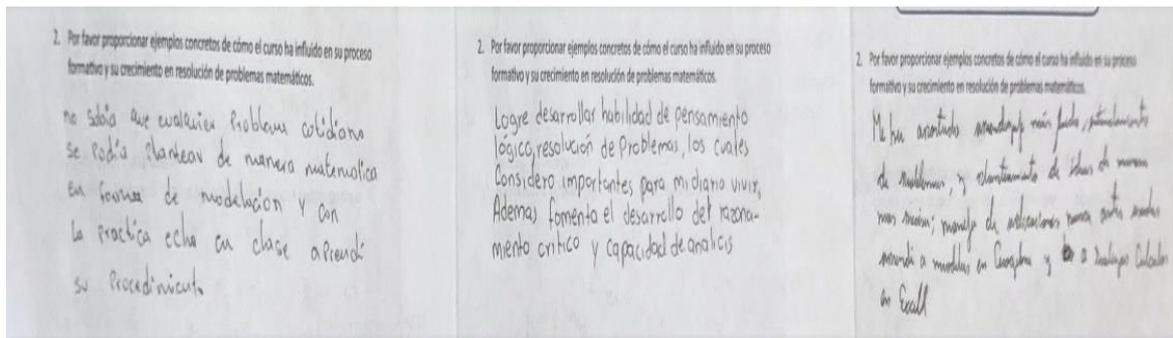


Ilustración 28: Respuestas de cómo el curso formativo ha influido en su proceso formativo de resolución de problemas.

Varios de los estudiantes manifestaron influencias como:

“un ejemplo concreto de cómo el curso ha influido en mi proceso formativo y crecimiento en la resolución de problemas matemáticos es que he aprendido diferentes técnicas y estrategias para abordar y resolver problemas de manera más efectiva, como identificar patrones, usar diagramas y aplicar fórmulas específicas”,

–“no sabía que cualquier problema cotidiano se podía plantear de manera matemática en forma de modelación y con la práctica hecha en clase aprendí su procedimiento”,

–“logre desarrollar habilidades de pensamiento lógico, resolución de problemas, los cuales considero importante para mí diario vivir, además, fomenta el desarrollo del razonamiento crítico y capacidad de análisis”,

–“me ha aportado aprendizaje más fluido, entendimiento de problemas y planteamiento de ideas de manera más precisa, el manejo de aplicaciones nunca antes usadas, aprendí a modelar en GeoGebra y a realizar cálculos en Excel”.

Se evidencia el desarrollo de habilidades de pensamiento lógico y resolución de problemas, además de mejorar en cuanto a la capacidad de análisis. Por otro lado, también se destaca las habilidades del uso de las TICS en particular

del uso de GeoGebra, Camva y Excel. Finalmente comentan la importancia de las matemáticas para resolver problemas de la vida cotidiana.

3. Por favor proporcionar ejemplos concretos de cómo el curso ha influido en su proceso formativo y su crecimiento en la formulación de proyectos.

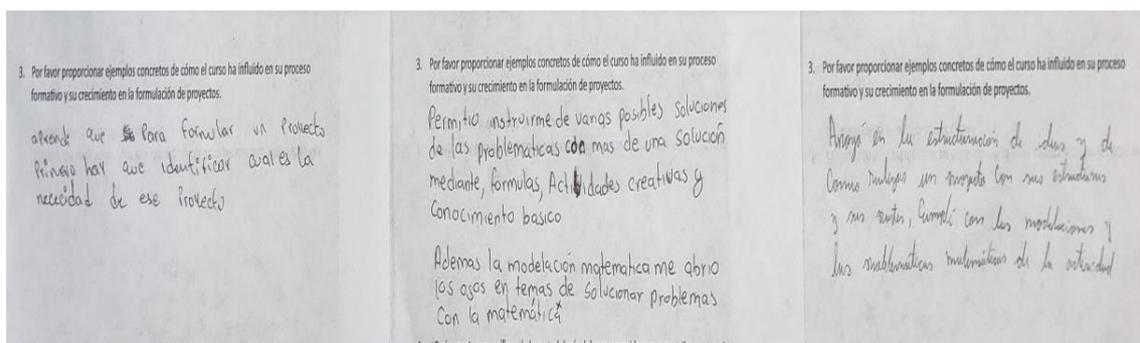


Ilustración 29: Respuesta a cómo el curso formativo ha influido en el proceso formativo de formulación de proyectos.

A continuación, se resaltan algunas de las respuestas de los estudiantes:

-“aprendí que para formular un proyecto primero hay que identificar cuál es la necesidad de ese proyecto”,

-“apoyó en la estructuración de cómo realizar un proyecto”,

-“permitió instruirme de varias posibles soluciones de las problemáticas con más de una solución mediante fórmulas, actividades creativas y conocimiento básico.

Además, varios estudiantes destacan la habilidad de formular proyectos, además, de tener la iniciativa para iniciar un proyecto personal de creación de empresa después de recibir el curso formativo.

4. ¿Qué aspectos específicos de la metodología considera que contribuyeron más a su aprendizaje?

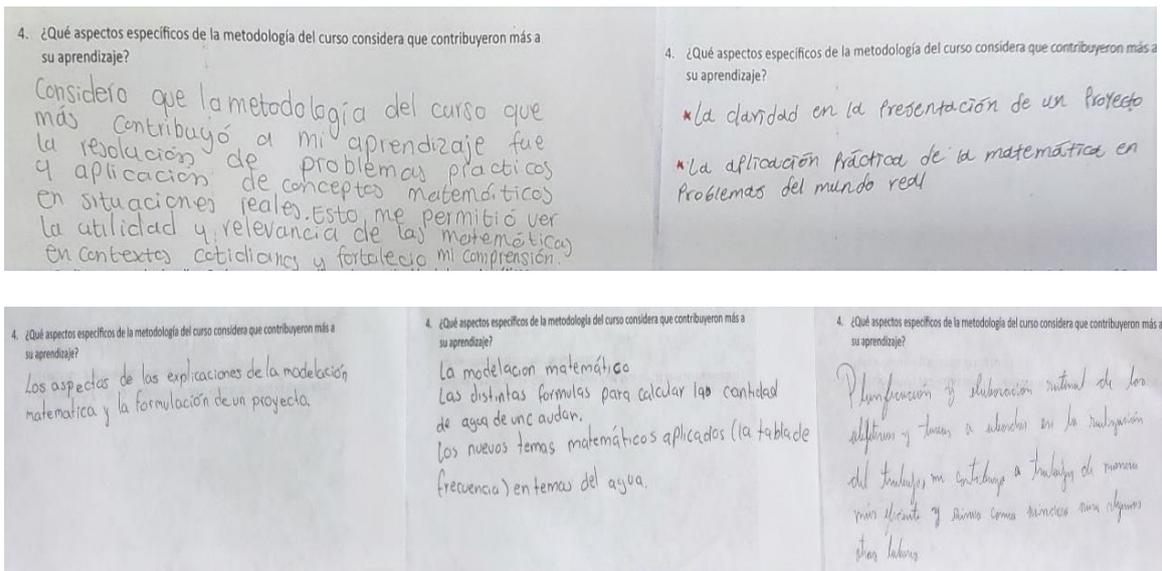


Ilustración 30: Respuesta de los aspectos del curso formativo que contribuyeron a su aprendizaje.

A continuación, se resaltan algunas de las respuestas de los estudiantes:

–“considero que la metodología del curso que más contribuyó a mi aprendizaje fue la resolución de problemas prácticos y aplicación de conceptos matemáticos en situaciones reales”,

–“la claridad en la presentación de un proyecto, la aplicación práctica de la matemática en el mundo real”.

Varios estudiantes destacan su interés en los ejercicios de modelación matemática y la formulación de proyectos, en cuanto a la modelación matemática las fórmulas para determinar la cantidad de agua necesaria para abastecer de buena manera la comunidad, además, de cómo las matemáticas están presentes en el día a día y cómo ayudan a resolver problemas.

Por otro lado, también destacan el trabajo realizado en las sesiones de cómo realizar un proyecto y cuáles son los pasos a seguir para el cumplimiento de este.

5. Explique con todo detalle ¿Qué aspectos específicos de su actitud hacia las matemáticas han cambiado con el desarrollo de este curso?

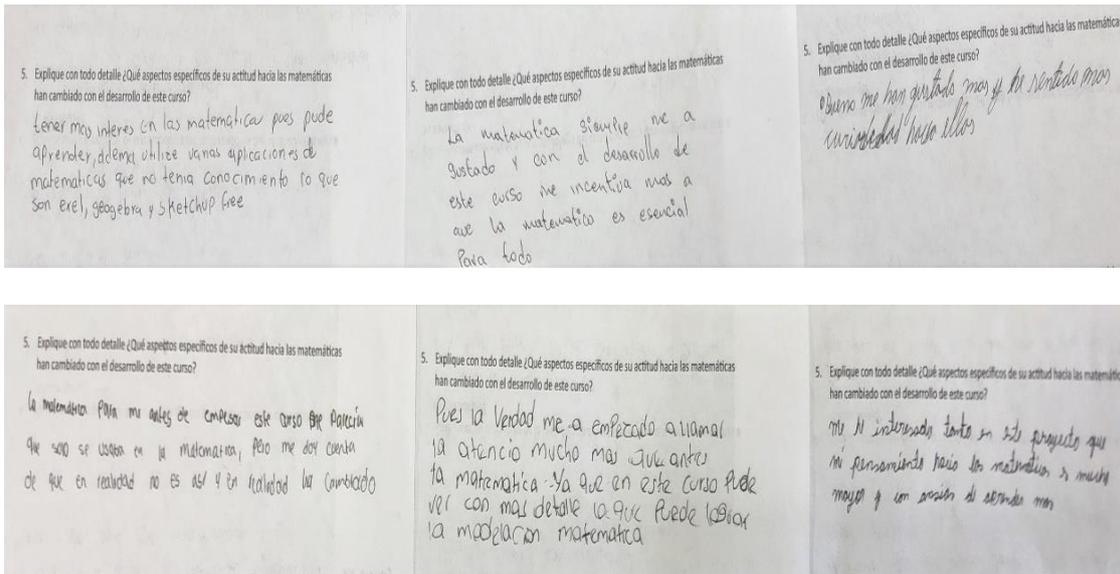


Ilustración 31: Respuesta de los estudiantes sobre los aspectos específicos de su actitud hacia las matemáticas que han cambiado con el desarrollo de este curso.

Varios de los estudiantes manifestaron:

–“la matemática para mí antes de empezar este curso parecía que solo se usaba en la matemática, pero me doy cuenta que en realidad no es así y en la realidad ha cambiado”,

–“pues la verdad me ha empezado a llamar la atención mucho más la matemática dado que en ese curso pue ver con más detalle lo que puede lograr la modelación matemática”,

–“me ha interesado tanto este proyecto que mi pensamiento hacia las matemáticas es mucho mayor y con ansias de aprender más”.

Se evidencia un cambio en la actitud hacia las matemáticas, los estudiantes dicen tener mayor interés dado que las matemáticas no son solo operaciones mecánicas, fórmulas y algoritmos, sino que se puede emplear en situaciones reales y esto los motiva a aprender más de estas.

6. Explique con todo detalle ¿Qué aspectos específicos de su pensamiento matemático han cambiado con el desarrollo de este curso?

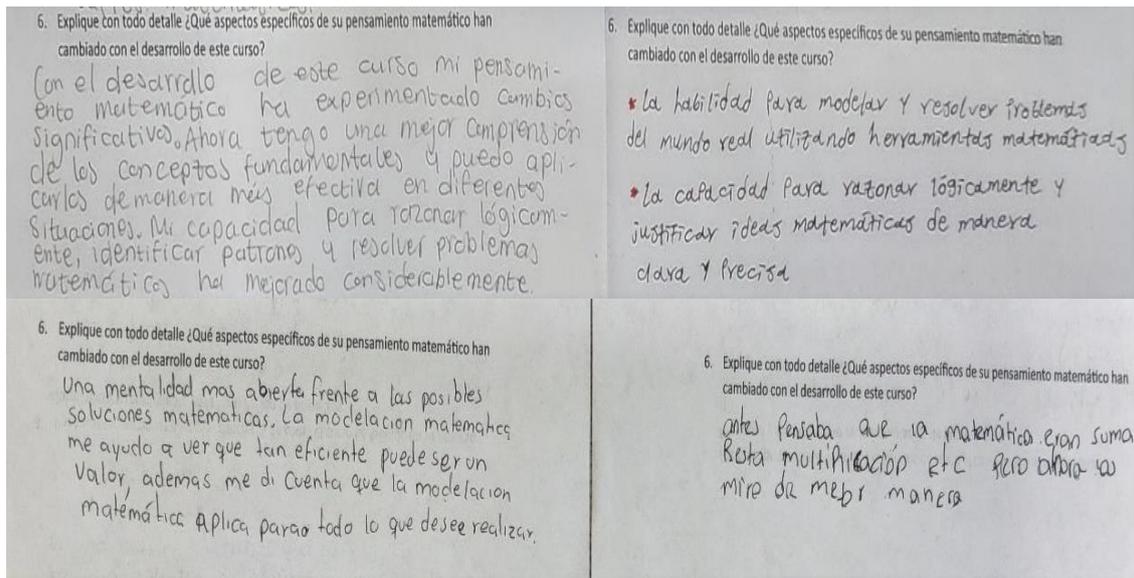


Ilustración 32: Respuestas de los estudiantes sobre los aspectos específicos del pensamiento matemático han cambiado con el desarrollo de este curso.

A continuación, se resaltan algunas de las respuestas de los estudiantes:

-“con el desarrollo de este curso mi pensamiento matemático ha experimentado cambios significativos, ahora tengo una mejor comprensión de los conceptos fundamentales y puedo aplicarlo de manera más efectiva en diferentes situaciones. Mi capacidad para razonar lógicamente, identificar patrones y resolver problemas matemáticos ha mejorado considerablemente”,

-“la habilidad para modelar y resolver problemas del mundo real utilizando herramientas matemáticas”,

-“una mentalidad más abierta frente a las posibles soluciones matemáticas”,

-“antes pensaba que las matemáticas eran suma, resta, multiplicación, etc. Pero ahora pero ahora las miro de mejor manera”.

Por otro lado, destacan cambios significativos en la comprensión de problemas matemáticos, en la mejora en el razonamiento al enfrentarse a problemas matemáticos mediante habilidades de identificación de patrones y resolución de problemas.

7. Exprese con sus palabras ¿cuál ha sido el nivel de motivación y satisfacción en el desarrollo del curso formativo?

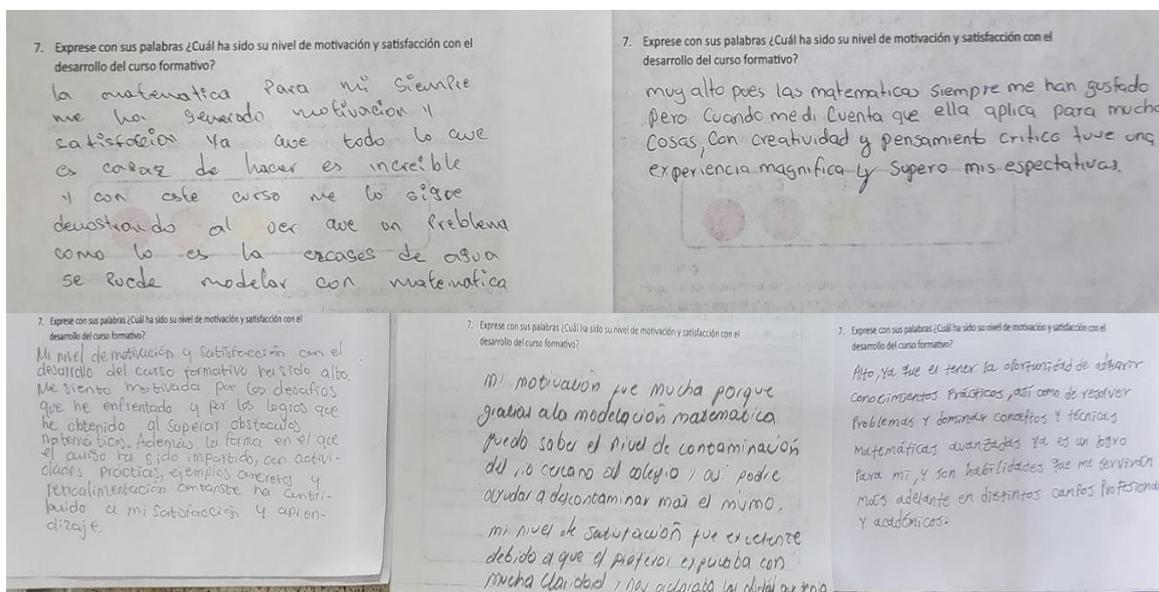


Ilustración 33: Respuesta de los estudiantes sobre ¿cuál ha sido el nivel de motivación y satisfacción en el desarrollo del curso formativo?

A continuación, se resaltan algunas de las respuestas de los estudiantes:

-“la matemática para mí siempre ha generado motivación ya que todo lo que es capaz de hacer es increíble y con este curso me lo sigue demostrando al ver que un problema como la escasez de agua se puede modelar con matemática”,

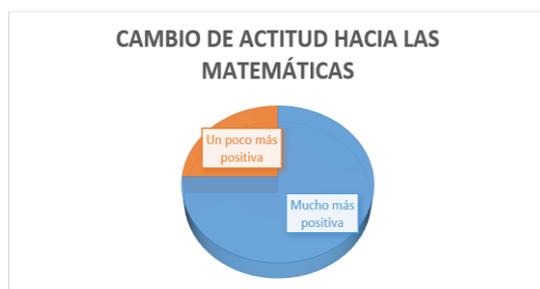
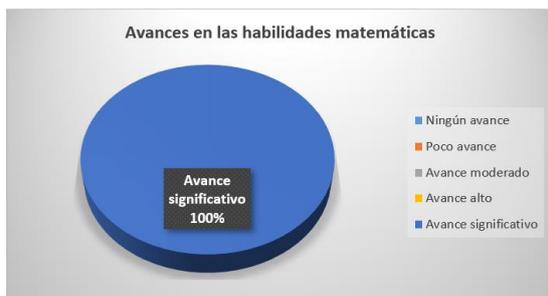
-“mi nivel de motivación y satisfacción con el desarrollo del curso ha sido alto. Me siento motivado por los desafíos que he aprendido y por los logros que he obtenido al superar obstáculos matemáticos. Además, la forma en la que el curso ha sido impartido con actividades prácticas, ejemplos concretos y retroalimentación constante ha contribuido a mi satisfacción y aprendizaje”,

-“alto ya que es tener la oportunidad de adquirir conocimientos prácticos, así como resolver problemas y dominar conceptos y técnicas matemáticas

avanzadas ya que es un logro para mí y son habilidades que me servirán más adelante en distintos campos profesionales y académicos”.

Como se evidencia en las respuestas de los estudiantes el nivel de motivación y satisfacción ha sido bastante alto debido al superar obstáculos matemáticos, al entender situaciones del mundo real y ver cómo se puede emplear la matemática para resolverlos. También se destaca la motivación que brinda el uso de herramientas tecnológicas que antes no eran empleadas. Finalmente se destaca la aplicación de estos conocimientos adquiridos en modelación matemática y aprendizaje basado en proyectos para su día a día y su futura formación académica se muestran los resultados de cada uno de los cuestionarios.

Por otro lado, en cuanto al cuestionario de percepción practicado a los docentes se encontró que, a las preguntas, 1, 3, 5, 6, 8, 9 relacionadas con los avances en sus habilidades matemáticas, el impacto en proceso de resolución de problemas, el impacto en el proceso de formulación de proyectos, la pertinencia de los contenidos del curso, los cambios en sus actitudes hacia las matemáticas y la evolución en su forma de pensar matemáticamente producto del desarrollo del curso formativo y el desarrollo de las olimpiadas, en general los docentes respondieron haber tenido un avance significativo en cada uno de estos aspectos lo que muestra la importancia de las olimpiadas medioambientales y el desarrollo de proyectos en el proceso formativo de docentes, el cual se verá reflejado en la formación de los estudiantes.



Cuando se pidió proporcionar ejemplos específicos de cómo ha mejorado en términos de sus habilidades matemáticas y de modelación durante el curso, entre las respuestas presentadas por los docentes se encuentran:

-“ha mejorado mi conocimiento sobre los procesos de modelación matemática, a ser más analítico al leer un problema, a identificar variables, intentar plantear posibles soluciones y verificarlas, por otro lado, también mejoro la habilidad de emplear las TICS en el proceso de modelación,”

-“considero que la modelación saca del tradicionalismo al docente en los contenidos programáticos”,

-“les permitió a los docentes tener experiencias con otros programas tecnológicos como GeoGebra para efectuar procedimientos matemáticos y también les permitió aprender nuevos conocimientos”.

Las respuestas dadas por los docentes a esta pregunta evidencian la mejora de habilidades de los docentes tras recibir el curso formativo; entre las habilidades se destacan la mejora en el análisis en la resolución de problemas, identificación de variables y el uso de herramientas tecnológicas.

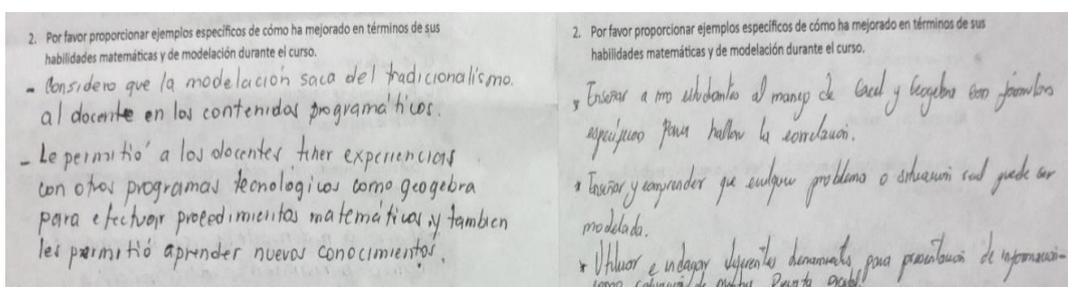


Ilustración 34: Respuesta dada por los docentes sobre las mejoras en sus habilidades tras recibir el curso formativo.

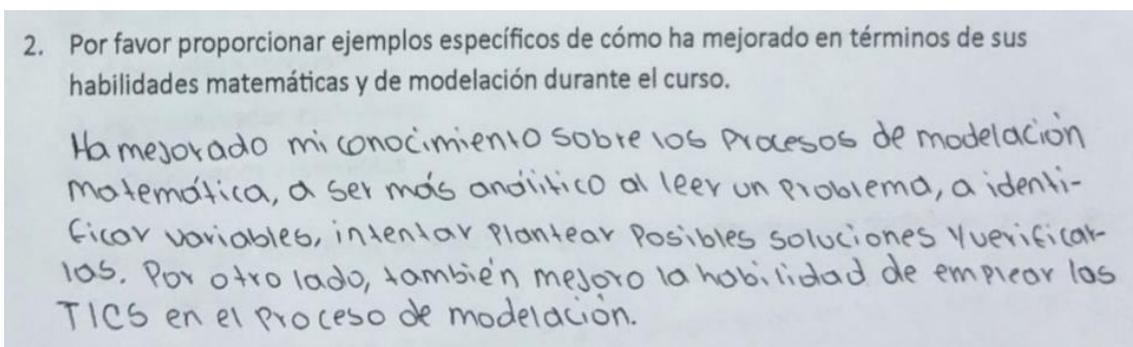


Ilustración 35: Respuesta de los docentes sobre las mejoras en los docentes tras recibir el curso formativo.

Cuando se pide proporcionar ejemplos concretos de cómo el curso ha influido en su proceso formativo y su crecimiento en resolución de problemas matemáticos, entre las respuestas presentadas por los docentes se encuentran:

-“En mi proceso formativo como utilizar herramientas como GeoGebra y Excel lo cual es fundamental”,

-“me influyó de una manera en cuanto al empleo del ABP y me causó gran interés en emplear esta estrategia en el desarrollo de mis clases y la planeación de situaciones específicas del mundo real que se podrían trabajar en clases y así obtener mayor interés y participación de los estudiantes, por otro lado ayuda a eliminar las creencias que ciertos temas son muy complejos para los estudiantes y aumentar el interés en incursionar en las TICS”.

Con las respuestas de los profesores se evidencia que el curso formativo influyó en los profesores participantes en las olimpiadas en el interés en incursionar en las TICS en el uso del ABP y formulación de situaciones del mundo real que sean atractivas para los estudiantes dado el interés que pueden estar generando en ellos.

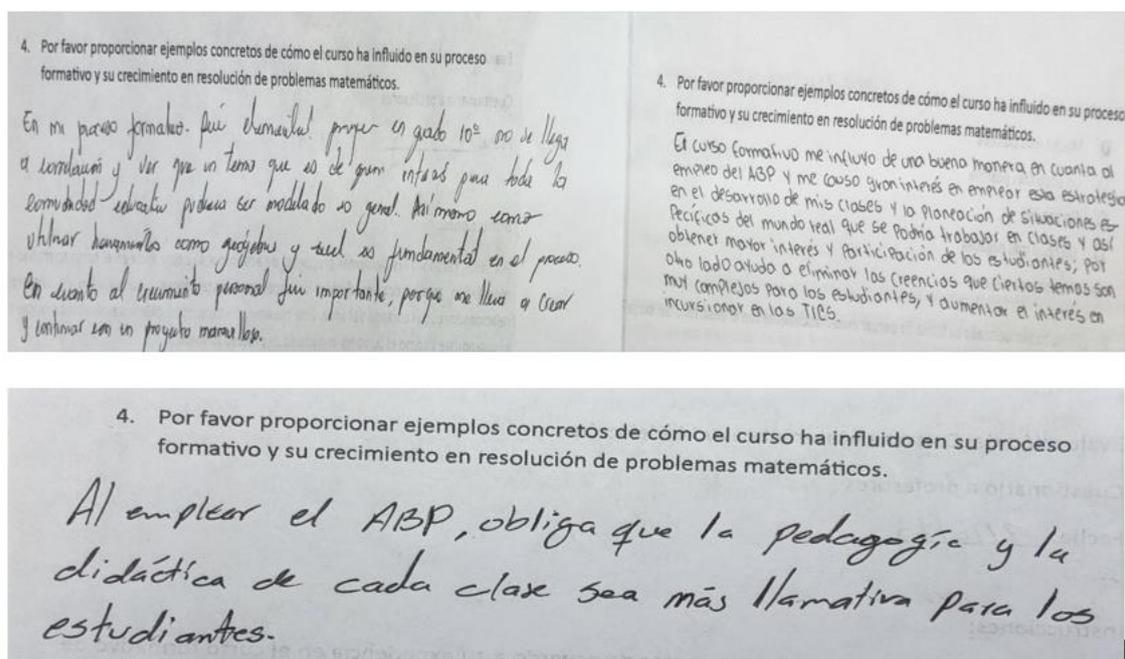


Ilustración 36: Ejemplos concretos de cómo el curso ha influido en su proceso formativo y su crecimiento en resolución de problemas.

Respecto a, ¿Qué aspectos específicos de la metodología del curso considera que contribuyeron más a su aprendizaje?

Entre las respuestas presentadas por los docentes se encuentran:

-“la resolución de problemas de nuestro entorno, el aplicar conceptos matemáticos para darle solución a esa problemática”,

-“puedo destacar los ejemplos que se emplearon en la modelación matemática, ya que fueron muy interesantes y motivadores, también las instrucciones dadas sobre los pasos en la modelación matemática, los pasos sobre cómo formular un proyecto”.

Se evidencia por las respuestas de los profesores que el uso de la modelación matemática en situaciones reales fue muy llamativo, así como lo fue el empleo del aprendizaje basado en proyectos.

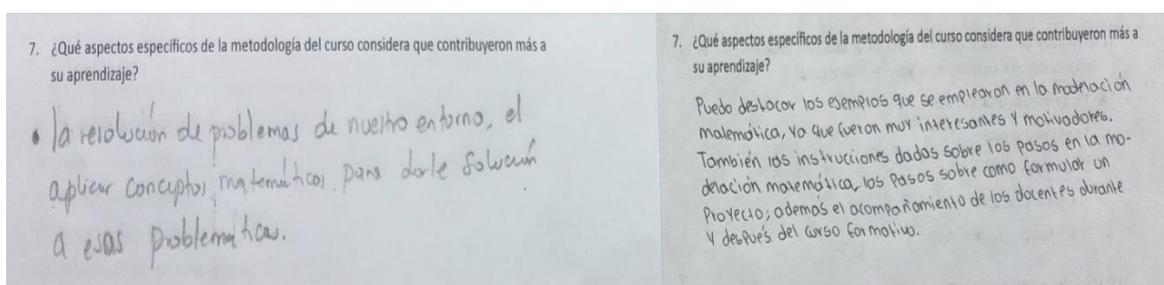


Ilustración 37: Respuesta de docentes sobre los aspectos del curso formativo que consideran más destacados.

*En cuanto a, ¿Qué aspectos específicos de su pensamiento matemático han cambiado con el desarrollo de este curso?*

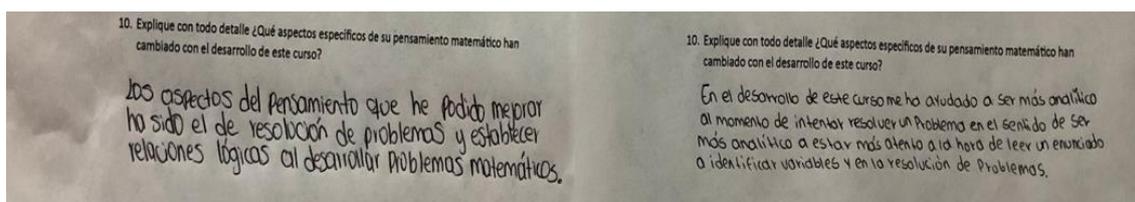


Ilustración 38: Aspectos sobre el pensamiento matemático

Entre las respuestas presentadas por los docentes se encuentran:

-“los aspectos del pensamiento matemático que he podido mejorar ha sido el de resolución de problemas y establecer relaciones lógicas al desarrollar problemas matemáticos”,

-“el desarrollo de este curso me ha ayudado al ser más analítico al momento de intentar resolver un problema en el sentido de estar más atento a la hora de leer un enunciado o identificar variables, y en la resolución de problemas”.

Se evidencia en las respuestas de los profesores que uno de los aspectos del pensamiento matemático que más se evidencia es el de resolución de problemas y establecimiento de relaciones entre las variables en particular en la modelación.

Respecto a ¿Qué aspectos del curso le gustaría sean mejorados o resaltados y cuáles serían sus sugerencias?

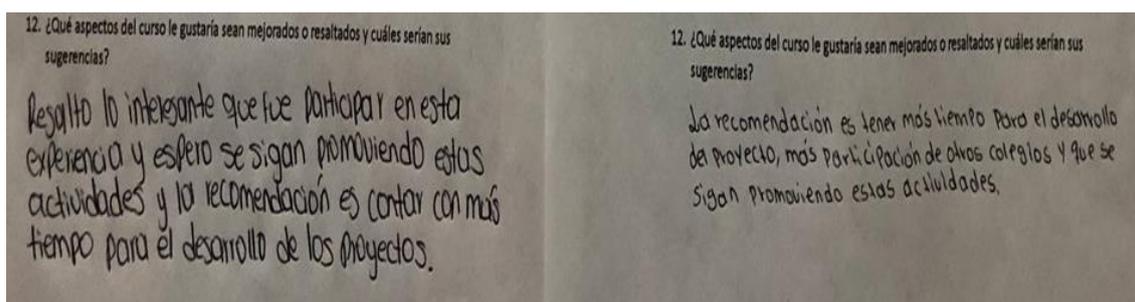


Ilustración 39: recomendaciones sobre aspecto a mejorar en el curso formativo

Las sugerencias recibidas por los profes han sido que esta actividad de olimpiadas.

Los profesores resaltan como sugerencia en otras futuras olimpiadas es tener más tiempo para el desarrollo del proyecto y con respecto a las cosas que les gustaron comentan que fue una experiencia muy interesante y gratificante y esperan que se siga realizando y que los sigan teniendo en cuenta como participantes.

### 3.8 Valoración de los expertos a los proyectos presentados.

A continuación, se presenta la valoración de los proyectos por parte de los expertos a través de las rubricas descritas en el capítulo tres.

#### Evaluación proyecto presentado por colegio 1

- **COMPONENTE DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

El área sombreada muestra la calificación obtenida por el proyecto en el componente de solución de problemas, donde se pueden observar fortalezas en los indicadores de **formulación, procedimientos válidos, creatividad de la solución y uso del lenguaje matemático**, lo que indica que los evaluadores se manifiestan totalmente de acuerdo en que el modelo demuestra claridad en el problema que se quiere resolver, los procedimientos usados en la solución del problema son válidos y se ajustan a la situación planteada. Hace buen uso del lenguaje matemático y la manera como intentaron abordar los modelos matemáticos fue interesante y creativa. Por otro lado, con respecto al indicador “ajuste a la solución de problemas” los jurados se manifiestan de acuerdo y se invita a mirar de qué manera se puede mejorar en este indicador.  $C_1 =$

3.27

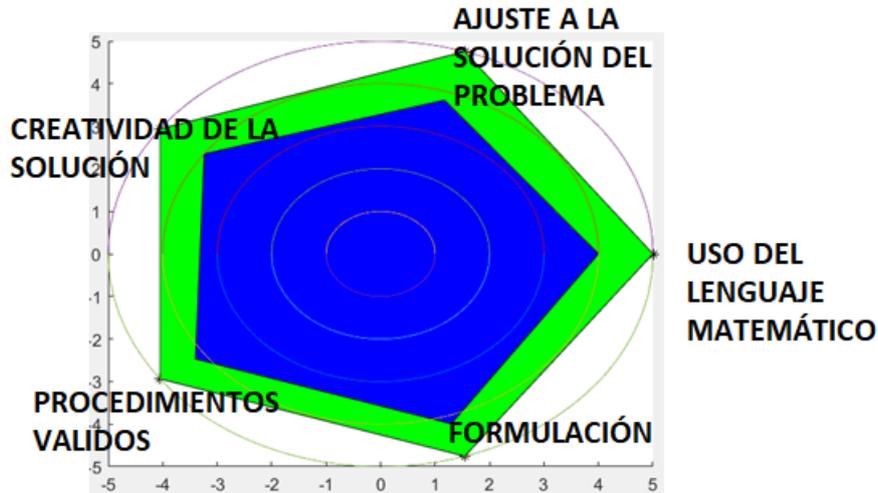


Ilustración 40: Componente de solución de problemas.

- **COMPONENTE DE MODELACIÓN MATEMÁTICA**

El área sombreada muestra la calificación obtenida por el proyecto en el componente de modelación matemática evidenciando un muy buen desempeño en los indicadores: precisión, validez, robustez, utilidad y claridad, lo que indica que los evaluadores se encuentran totalmente de acuerdo con que las predicciones del modelo están en correspondencia con los datos reales, las suposiciones que se hicieron en el proceso de modelación son razonables, el modelo matemático es fácil de entender, y las suposiciones y ecuaciones se explican claramente, y el modelo matemático es útil. En la gráfica se muestra que el desempeño realizado en esta dimensión fue muy asertivo llegando a tender a un desempeño optimo.  $c_2 = 4.12$

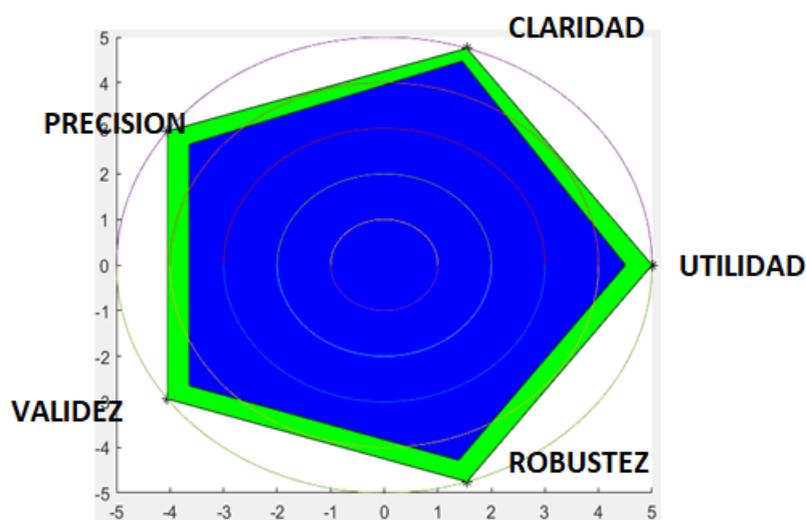
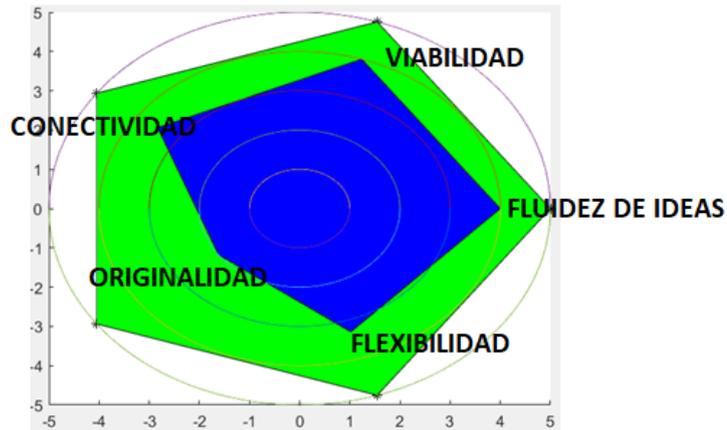


Ilustración 41: Componente de modelación matemática.

- **COMPONENTE DE CREATIVIDAD**

El área sombreada muestra la calificación obtenida por el proyecto en el componente de creatividad evidenciando un muy buen desempeño en los indicadores: fluidez de ideas y viabilidad, lo que indica que los evaluadores se encuentran totalmente de acuerdo en que se ha generado una variedad de ideas relacionadas con el problema del agua y las ideas presentadas son factibles de implementar en términos de recursos, tecnología y contextos socioeconómicos. Por otro lado, los evaluadores se encuentran de acuerdo en los indicadores de flexibilidad y conectividad en el sentido que se consideraron varios enfoques para abordar el problema del cuidado del agua y las ideas planteadas muestran capacidad de establecer relaciones entre conceptos no relacionados para abordar el problema. Finalmente, los jurados consideran que el indicador de originalidad no muestra algo novedoso debido a que este tipo de prototipos ya se han trabajado en otros proyectos.



$$C_3 = 2.27$$

*Ilustración 42: Componente de creatividad.*

- **COMPONENTE DE PRESENTACIÓN Y SUSTENTACIÓN**

El área sombreada muestra la calificación obtenida por el proyecto en el componente de presentación y sustentación evidenciando un muy buen desempeño en los indicadores: comunicación, apropiación, presentación y referencias, lo que indica que los evaluadores se encuentran totalmente de acuerdo en que el lenguaje utilizado es claro y preciso, por lo que el objetivo y propósitos del proyecto son comprensibles, los miembros del equipo demuestran dominio y apropiación del proyecto y su posible impacto, el documento es claro y legible sin errores ortográficos, la expresión fue adecuada y comprensible para el público objetivo. Con respecto al indicador de respuesta a preguntas formuladas los jurados están de acuerdo que faltó un poco de más precisión al responder las preguntas planteadas.

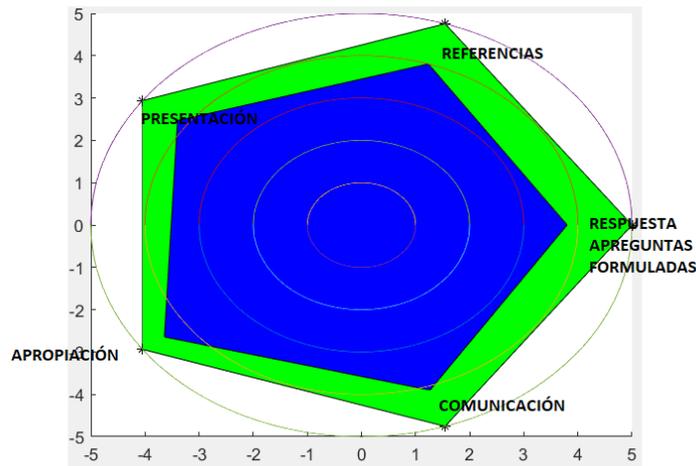


Ilustración 43: Componente presentación y sustentación

$$C_4 = 3.40$$

- **COMPONENTE AMBIENTAL**

El área sombreada muestra la calificación obtenida por el proyecto en el componente ambiental evidenciando un muy buen desempeño en todos los indicadores: evaluación de impacto y riesgo, relevancia, beneficio social, sostenibilidad y económicamente viable. Los evaluadores están totalmente de acuerdo en que se presentaron las posibles implicaciones ambientales positivas y negativas que puede presentar el proyecto, el proyecto es relevante en relación con la problemática encontrada y las necesidades de la comunidad, se presentó de forma clara cuál es el beneficio social que este proyecto ofrece a la comunidad y la mejora ambiental que se promueve es clara, además de ser desarrollado de manera económica y es autosostenible.  $C_5 = 4.24$

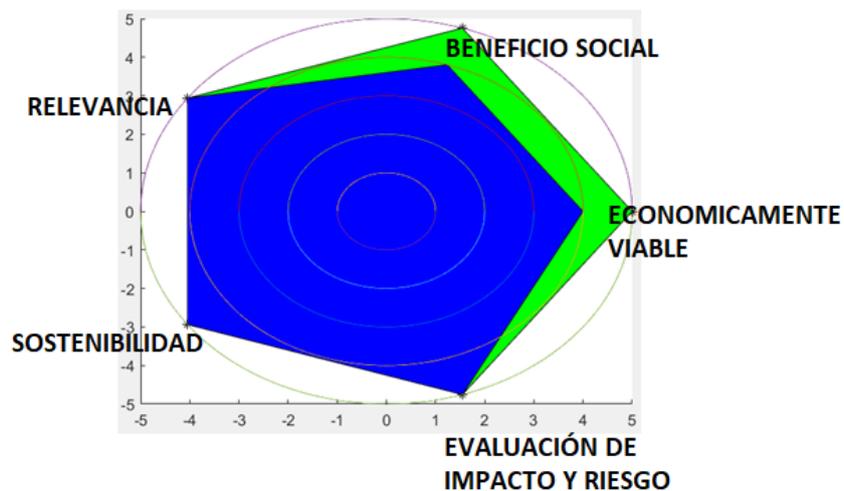


Ilustración 44: Componente ambiental.

- **INFORME GENERAL 5- DIMENSIONES**

El área sombreada muestra la calificación final obtenida en las cinco dimensiones evaluadas en el proyecto en la cual mediante la gráfica se puede identificar las fortalezas presentadas en la componente ambiental y en la modelación matemática. Los evaluadores consideran que este proyecto mostró un trabajo matemático muy interesante dado que el equipo intentó emplear varios modelos para determinar la efectividad de la Biobarda en donde determinaron que dos de las ideas iniciales que tuvieron no fueron convenientes, hasta que encontraron un modelo efectivo para medir la efectividad de la Biobarda para atrapar residuos sólidos. Por otro lado, los evaluadores están de acuerdo que el trabajo mostrado en los componentes de sustentación y resolución de problemas estuvo muy bien realizado, y finalmente solo muestra una debilidad considerable en el indicador de creatividad.  $C_f =$

2.42

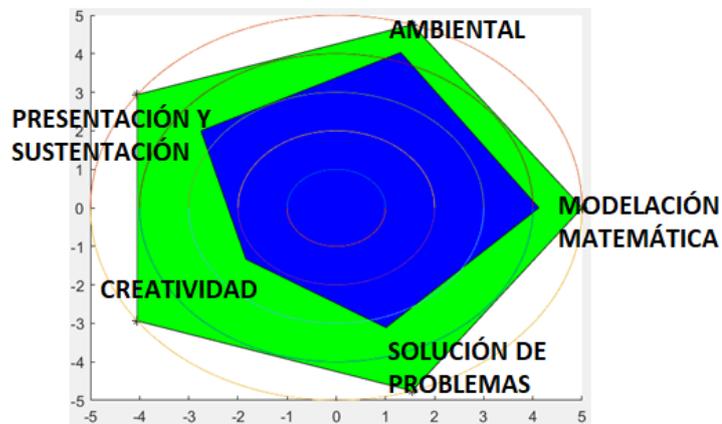


Ilustración 45: Informe final colegio 1.

## Evaluación proyecto presentado por colegio 2

- **COMPONENTE DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

El área sombreada muestra la calificación obtenida por el proyecto en el componente de solución de problemas, donde se puede evidenciar en la gráfica un desempeño en todos los indicadores de **formulación, procedimientos válidos, creatividad de la solución y uso del lenguaje matemático**, lo que indica que los evaluadores se manifiestan totalmente de acuerdo en que el modelo demuestra claridad en el problema que se quiere resolver, los procedimientos usados en la solución del problema son válidos y se ajustan a la situación planteada. Hace buen uso del lenguaje matemático y la manera como intentaron abordar los modelos matemáticos fue interesante y creativa. Por otro lado, con respecto al indicador “ajuste a la solución de problemas” los jurados se manifiestan de acuerdo y se invita a mirar de qué manera se puede mejorar en este indicador.  $C_1 = 3.26$

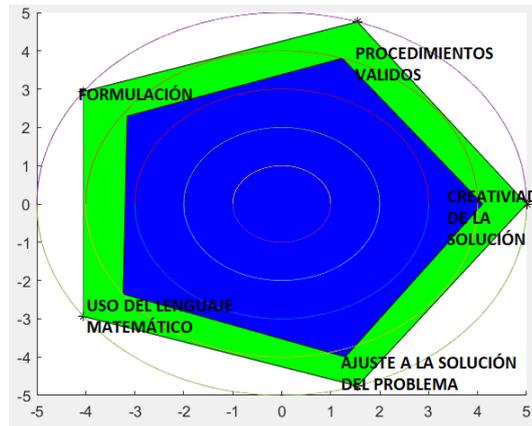
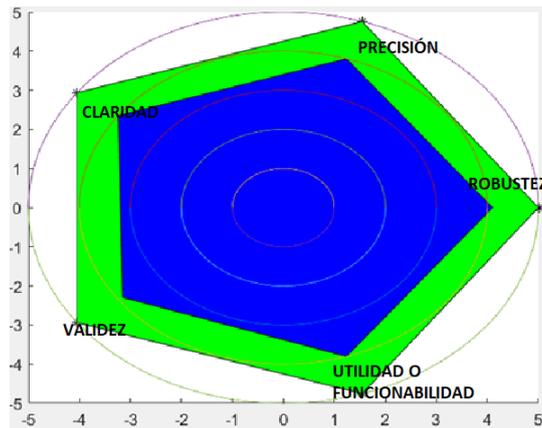


Ilustración 46: Componente de solución de problemas

- **COMPONENTE DE MODELACIÓN MATEMÁTICA**

El área sombreada muestra la calificación obtenida por el proyecto en el componente de modelación matemática evidenciando un muy buen desempeño en todos los indicadores: precisión, validez, robustez, utilidad y claridad, lo que indica que los evaluadores se encuentran totalmente de acuerdo con que las predicciones del modelo están en correspondencia con los datos reales, las suposiciones que se hicieron en el proceso de modelación son razonables, el modelo matemático es fácil de entender, y las suposiciones y ecuaciones se explican claramente, y el modelo matemático es útil. En la gráfica se muestra que el desempeño realizado en esta dimensión fue muy asertivo.  $c_2 = 3.2$



*Ilustración 47: Componente de modelación matemática.*

- **COMPONENTE DE CREATIVIDAD**

El área sombreada muestra la calificación obtenida por el proyecto en el componente de creatividad evidenciando un muy buen desempeño en los indicadores: conectividad, viabilidad y fluidez de ideas, lo que indica que los evaluadores se encuentran totalmente de acuerdo en que se ha generado una variedad de ideas relacionadas con el problema del agua y las ideas presentadas son factibles de implementar en términos de recursos, tecnología y contextos socioeconómicos. Por otro lado, los evaluadores se encuentran de acuerdo en los indicadores de flexibilidad en el sentido que se consideraron varios enfoques para abordar el problema del cuidado del agua. Finalmente, los jurados consideran que el indicador de originalidad no muestra algo novedoso debido a que existen estudios de este tipo en los diferentes ríos.

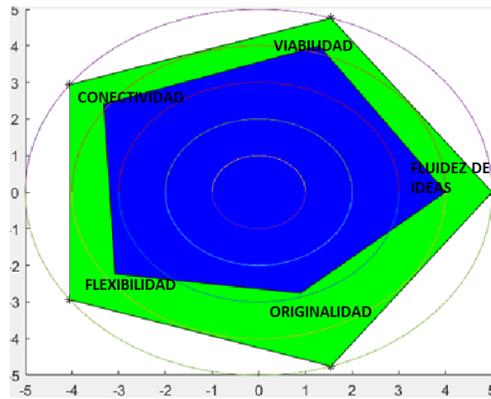


Ilustración 48: Componente de creatividad

$$C_3 = 2.9$$

- **COMPONENTE DE PRESENTACIÓN Y SUSTENTACIÓN**

El área sombreada muestra la calificación obtenida por el proyecto en el componente de presentación y sustentación evidenciando un muy buen desempeño en los indicadores: comunicación, apropiación, presentación y referencias, lo que indica que los evaluadores se encuentran totalmente de acuerdo en que el lenguaje utilizado es claro y preciso, por lo que el objetivo y propósitos del proyecto son comprensibles, los miembros del equipo demuestran dominio y apropiación del proyecto y su posible impacto, el documento es claro y legible sin errores ortográficos, la expresión fue adecuada y comprensible para el público objetivo. Con respecto al indicador de respuesta a preguntas formuladas los jurados están de acuerdo que faltó un poco de más precisión al responder las preguntas planteadas.

$$C_4 = 3.43$$

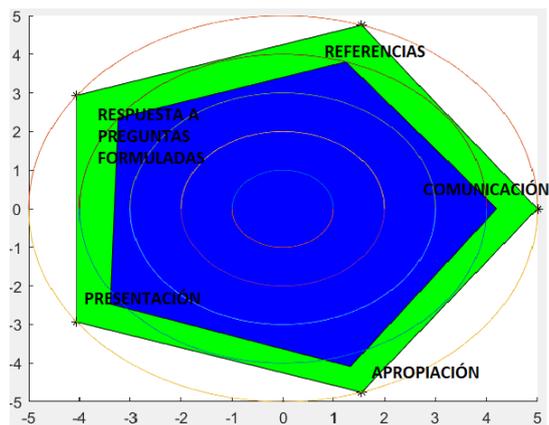


Ilustración 49:Componente presentación y sustentación.

- **COMPONENTE AMBIENTAL**

El área sombreada muestra la calificación obtenida por el proyecto en el componente ambiental evidenciando un muy buen desempeño en todos los indicadores: evaluación de impacto y riesgo, relevancia, beneficio social, sostenibilidad y económicamente viable. Los evaluadores están totalmente de acuerdo en que se presentaron las posibles implicaciones ambientales positivas y negativas que puede presentar el proyecto, el proyecto es relevante en relación con la problemática encontrada y las necesidades de la comunidad, se presentó de forma clara cuál es el beneficio social que este proyecto ofrece a la comunidad y la mejora ambiental que se promueve es clara, además de ser desarrollado de manera económica y es autosostenible.  $C_5 = 3.33$

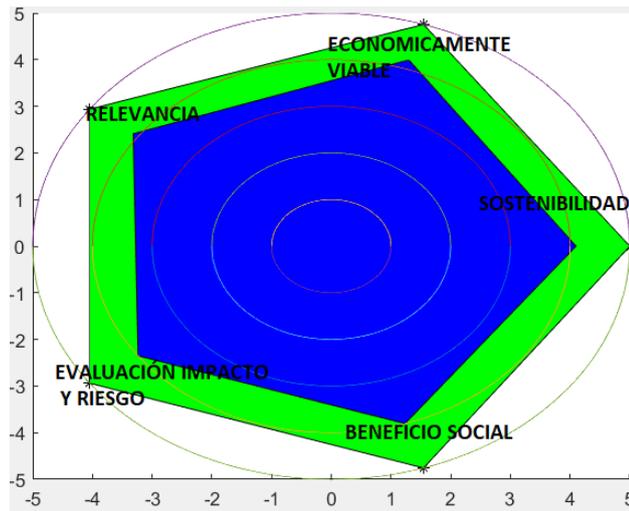


Ilustración 50: Componente medioambiental.

- **INFORME GENERAL 5- DIMENSIONES**

El área sombreada muestra la calificación final obtenida en las cinco dimensiones evaluadas en el proyecto en la cual mediante la gráfica se puede identificar las fortalezas presentadas en la componente ambiental, solución de problemas y en la modelación matemática. Los evaluadores consideran que este proyecto mostró un trabajo aritmético por la manipulación de las fórmulas empleadas para calcular el índice de calidad del agua. Por otro lado, los evaluadores están de acuerdo que el trabajo mostrado en los componentes de sustentación y resolución de problemas estuvo muy bien realizado, finalmente solo se evidenció una debilidad considerable en el indicador de creatividad.

$$C_f = 2.08$$

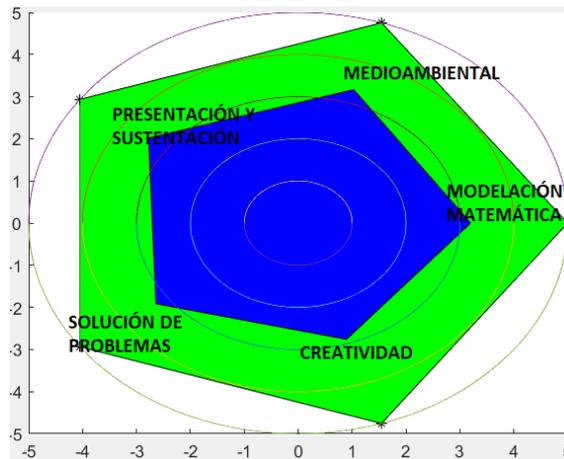


Ilustración 51: Informe final colegio 2.

### Evaluación proyecto presentado por colegio 3

- **COMPONENTE DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

El área sombreada muestra la calificación obtenida por el proyecto en el componente de solución de problemas, donde se puede evidenciar en la gráfica un desempeño con promedio de 3.3 en todos los indicadores de **formulación, procedimientos válidos, creatividad de la solución y uso del lenguaje matemático**, lo que indica que los evaluadores se manifiestan de acuerdo en que el modelo demuestra claridad en el problema que se quiere resolver, los procedimientos usados en la solución del problema son válidos y se ajustan a la situación planteada. Hace buen uso del lenguaje matemático y la manera como intentaron abordar los modelos matemáticos fue interesante y creativa. Por otro lado, con respecto al indicador “ajuste a la solución de problemas” los jurados se manifiestan de acuerdo y se invita a mirar de qué manera se puede mejorar en este indicador.  $C_1 = 3.37$

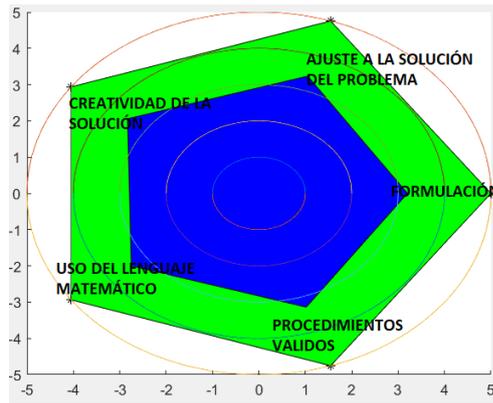


Ilustración 52: Componente de solución de problemas

- **COMPONENTE DE MODELACIÓN MATEMÁTICA**

El área sombreada muestra la calificación obtenida por el proyecto en el componente de modelación matemática evidenciando un buen desempeño en todos los indicadores: validez, claridad, precisión, robustez y utilidad, lo que indica que los evaluadores se encuentran totalmente de acuerdo con que las predicciones del modelo están en correspondencia con los datos reales, las suposiciones que se hicieron en el proceso de modelación son razonables, el modelo matemático es fácil de entender, y las suposiciones y ecuaciones se explican claramente, y el modelo matemático es útil. En la gráfica se muestra que el desempeño realizado en esta dimensión fue muy asertivo.  $c_2 = 2.6$

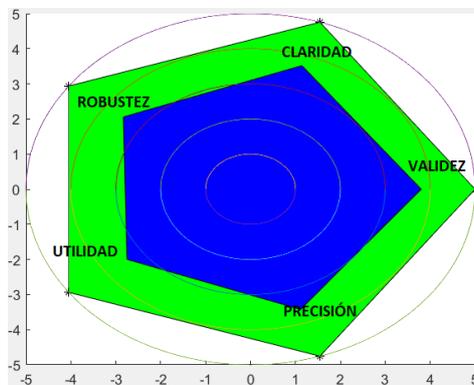


Ilustración 53: Componente de modelación matemática.

- **COMPONENTE DE CREATIVIDAD**

El área sombreada muestra la calificación obtenida por el proyecto en el componente de creatividad evidenciando un desempeño bueno en los indicadores de viabilidad, conectividad y fluidez de ideas, lo que indica que los evaluadores se encuentran de acuerdo en que se ha generado una variedad de ideas relacionadas con el problema del agua y las ideas presentadas son factibles de implementar en términos de recursos, tecnología y contextos socioeconómicos. Por otro lado, los evaluadores se encuentran de acuerdo en los indicadores de flexibilidad en el sentido que se consideraron varios enfoques para abordar el problema del cuidado del agua. Finalmente, los jurados consideran que el indicador de originalidad no muestra algo novedoso debido a que existen estudios de este tipo en los diferentes ríos.

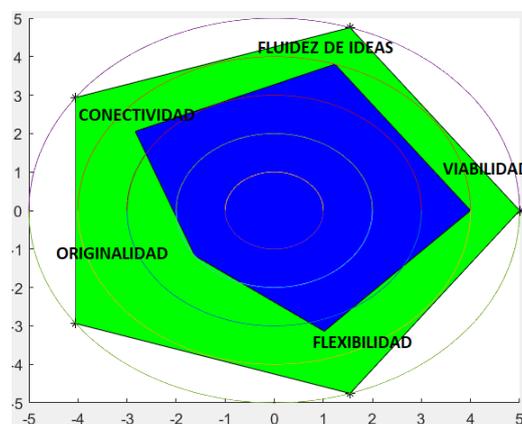


Ilustración 54: Componente de creatividad

$$C_3 = 2.27$$

- **COMPONENTE DE PRESENTACIÓN Y SUSTENTACIÓN**

El área sombreada muestra la calificación obtenida por el proyecto en el componente de presentación y sustentación evidenciando un muy buen desempeño en los indicadores: comunicación, apropiación, presentación y

referencias, lo que indica que los evaluadores se encuentran totalmente de acuerdo en que el lenguaje utilizado es claro y preciso, por lo que el objetivo y propósitos del proyecto son comprensibles, los miembros del equipo demuestran dominio y apropiación del proyecto y su posible impacto, el documento es claro y legible sin errores ortográficos, la expresión fue adecuada y comprensible para el público objetivo. Con respecto al indicador de respuesta a preguntas formuladas los jurados están de acuerdo que faltó un poco de más precisión al responder las preguntas planteadas.

$$C_4 = 3.98$$

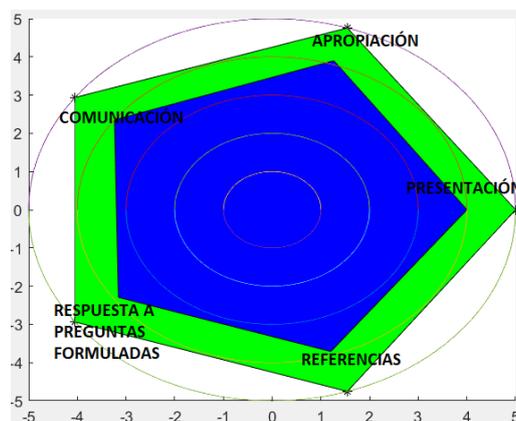


Ilustración 55:Componente presentación y sustentación.

## • COMPONENTE AMBIENTAL

El área sombreada muestra la calificación obtenida por el proyecto en el componente ambiental evidenciando excelente desempeño en todos los indicadores: evaluación de impacto y riesgo, relevancia, beneficio social, sostenibilidad y económicamente viable. Los evaluadores están totalmente de acuerdo en que se presentaron las posibles implicaciones ambientales positivas y negativas que puede presentar el proyecto, el proyecto es relevante en relación con la problemática encontrada y las necesidades de la comunidad,

se presentó de forma clara cuál es el beneficio social que este proyecto ofrece a la comunidad y la mejora ambiental que se promueve es clara, además de ser desarrollado de manera económica y es autosostenible.  $C_5 = 3.76$

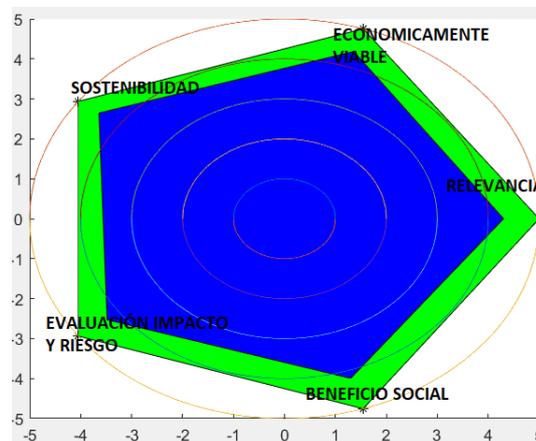


Ilustración 56: Componente medioambiental.

- **INFORME GENERAL 5- DIMENSIONES**

El área sombreada muestra la calificación final obtenida en las cinco dimensiones evaluadas en el proyecto en la cual mediante la gráfica se puede identificar las fortalezas presentadas en la componente solución de problemas, ambiental presentación y sustentación. Por otro lado, finalmente solo se evidenció una debilidad considerable en el indicador de creatividad y modelación matemática.  $C_f = 2.06$

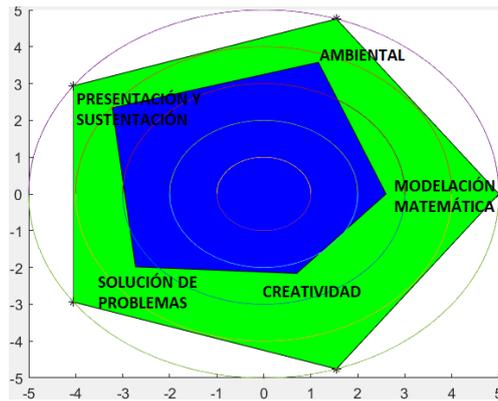


Ilustración 57: Informe final colegio 3

### Evaluación proyecto presentado por colegio 4

- COMPONENTE DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

El área sombreada que las fortalezas se encontraron en los indicadores de **procedimientos válidos y ajuste a la solución de problemas**, por otro lado, los indicadores de **formulación, creatividad de la solución y uso del lenguaje matemático** tuvieron una nota de tres, lo que indica que los evaluadores se manifiestan ni de acuerdo ni en desacuerdo en la claridad del problema, en la posible solución creativa y el uso del lenguaje matemático indicando que estos aspectos pueden ser mejorados. Se nota un mejor desempeño en procedimientos válidos y ajuste a la solución del problema.  $C_1 = 2.32$

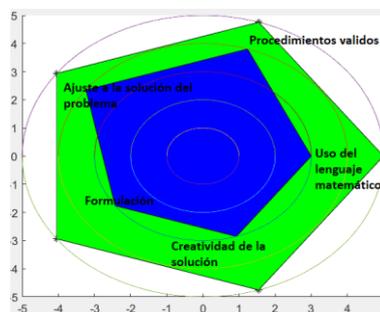


Ilustración 58: Componente de solución de problemas

- **COMPONENTE DE MODELACIÓN MATEMÁTICA**

El área sombreada muestra la calificación obtenida por el proyecto en el componente de modelación matemática evidenciando un desempeño parejo en todos los indicadores: validez , precisión, robustez y utilidad , lo que indica que los evaluadores se encuentran ni de acuerdo ni desacuerdo en estos aspectos, lo cual indica que se pueden mejorar en estos aspectos. Se destaca el indicador de claridad dado que se entendió las ideas presentadas por lo tanto los evaluadores se encontraron de acuerdo en este aspecto  $c_2 = 2.04$

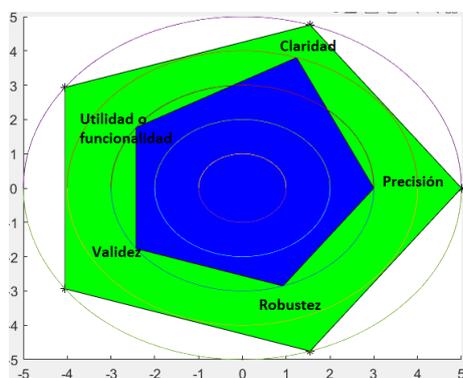


Ilustración 59: Componente de modelación matemática.

- **COMPONENTE DE CREATIVIDAD**

El área sombreada muestra la calificación obtenida por el proyecto en el componente de creatividad evidenciando un desempeño bueno en los indicadores de conectividad y originalidad este último se evidencia en la propuesta de revista digital. Los indicadores de flexibilidad, conectividad y viabilidad los evaluadores se encuentran ni de acuerdo ni desacuerdo lo que indica que estos aspectos pueden ser mejorados.

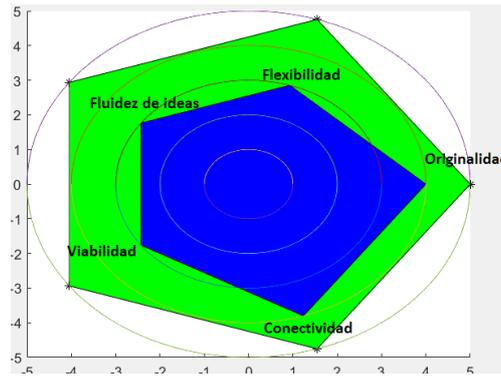


Ilustración 60: Componente de creatividad

$$C_3 = 2.32$$

- **COMPONENTE DE PRESENTACIÓN Y SUSTENTACIÓN**

El área sombreada muestra la calificación obtenida por el proyecto en el componente de presentación y sustentación evidenciando un muy buen desempeño en todos los indicadores: lo que indica que los evaluadores se encuentran de acuerdo en que el lenguaje utilizado es claro y preciso, por lo que el objetivo y propósitos del proyecto son comprensibles, los miembros del equipo demuestran dominio y apropiación del proyecto y su posible impacto, el documento es claro y legible sin errores ortográficos, la expresión fue adecuada y comprensible para el público objetivo. Los estudiantes respondieron con claridad las preguntas formuladas.

$$C_4 = 3.2$$

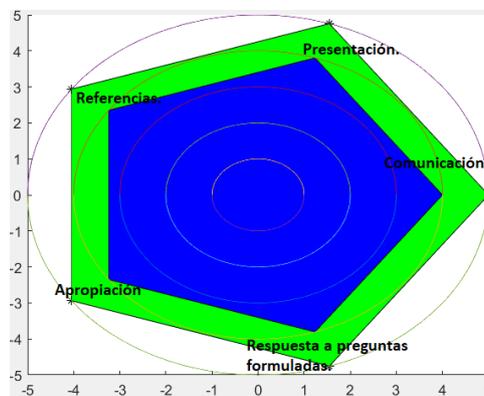
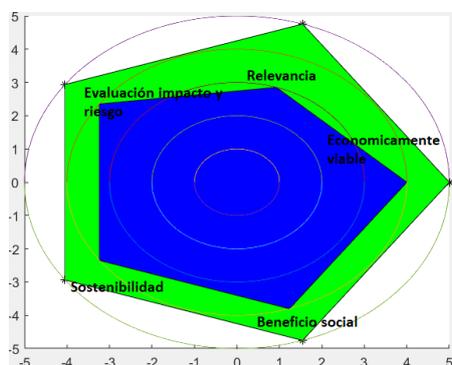


Ilustración 61: Componente presentación y sustentación.

- **COMPONENTE AMBIENTAL**

El área sombreada muestra la calificación obtenida por el proyecto en el componente ambiental evidenciando un buen desempeño en los indicadores: evaluación de impacto y riesgo, beneficio social, sostenibilidad y económicamente viable. Los evaluadores están de acuerdo en que se presentaron las posibles implicaciones ambientales positivas y negativas que puede presentar el proyecto, se presentó de forma clara cuál es el beneficio social que este proyecto ofrece a la comunidad y la mejora ambiental que se promueve es clara, además de ser desarrollado de manera económica y es autosostenible. Por el lado de la relevancia los evaluadores consideran que es posible mejorar este aspecto  $C_5 = 2.88$



*Ilustración 62: Componente ambiental*

- **INFORME GENERAL 5- DIMENSIONES**

El área sombreada muestra la calificación final obtenida en las cinco dimensiones evaluadas en el proyecto en la cual mediante la gráfica se puede identificar las fortalezas presentadas en la componente presentación y

sustentación. Por otro lado, finalmente solo se evidencia que es posible mejorar los otros indicadores.  $C_f = 1.31$

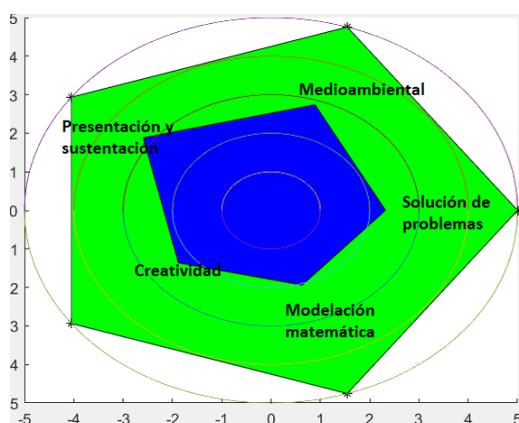


Ilustración 63: Informe final colegio 4

### 3.9 Análisis de los avances en el desarrollo del pensamiento matemático a la luz de los proyectos presentados.

Para el análisis de los avances en el desarrollo del pensamiento matemático producto de la integración de la educación matemática crítica, la modelación matemática y el aprendizaje basado en proyectos se hace uso de la siguiente rúbrica.

Fases	Niveles de desarrollo		
	Bajo	Medio	Superior
Abordaje	Presenta dificultades para modelar matemáticamente situaciones sencillas del mundo real relacionadas con el cuidado del agua y muestra poca claridad en su enfoque de resolución de problemas.	Modela matemáticamente situaciones sencillas del mundo real y muestra avances en su enfoque de resolución de problemas.	Modela matemáticamente situaciones del mundo real, explorando diversas opciones para definir un modelo sólido de la situación.
Ataque	Demuestra poca comprensión de los elementos	Muestra comprensión de algunos elementos	Muestra comprensión profunda de los elementos matemáticos

	matemáticos necesarios para atacar la solución de problemas involucrados en situaciones medioambientales y comete errores frecuentes en el proceso.	matemáticos necesarios para atacar la solución de problemas involucrados en situaciones medioambientales, pero su enfoque en ocasiones es inadecuado o incompleto	necesarios para atacar de manera efectiva la solución a problemas matemáticos involucrados en situaciones medioambientales, aplicando conceptos de manera apropiada y precisa, utilizando estrategias variadas y adecuadas
Revisión	Muestra poca evidencia de pensamiento crítico al revisar y mejorar las soluciones matemáticas propuestas a las situaciones tratadas	Demuestra rasgos incipientes del pensamiento matemático crítico al revisar y mejorar con poca profundidad las soluciones matemáticas propuestas a las situaciones tratadas	Demuestra un alto nivel de pensamiento matemático crítico al revisar y mejorar a profundidad las soluciones propuestas a las situaciones tratadas, mostrando creatividad y originalidad en sus enfoques e integrando de manera crítica y creativa los conceptos matemáticos, cuestionando y analizando las implicaciones éticas y sociales de sus soluciones.

En ese sentido vale la pena resaltar el proyecto realizado por el colegio 2 que tiene que ver con un estudio del índice de calidad del agua del Rio Gaira con el fin de generar un recurso informativo y de concienciación respecto al cuidado del agua para la comunidad de Santa Marta.

El proyecto se enfoca en los resultados obtenidos a través del análisis de laboratorio donde se identificaron y evaluaron diversos parámetros clave, como el pH, alcalinidad, turbidez, temperatura, DBO (Demanda Bioquímica de Oxígeno), DQO (Demanda Química de Oxígeno), conductividad, fosfatos, nitritos, nitratos, sólidos suspendidos, E-coli, coliformes totales, coliformes

fecales y oxígeno disuelto. El propósito fundamental es determinar la calidad del agua en la cuenca del Río Gaira y evaluar si esta cumple con los parámetros mínimos y máximos permitidos, según las diferentes normativas que rigen las aguas superficiales.

Para tal fin los estudiantes realizaron una toma de muestras de acuerdo con la Resolución 0631 de 2015 expedida por el Ministerio de Ambiente y Desarrollo Sostenible que explica la evaluación de calidad del agua y los ecosistemas acuáticos.



*Ilustración 64: Estudiantes colegio 2 desarrollando su proyecto*

#### Toma de muestras de agua en el Río Gaira

Las muestras obtenidas fueron entregadas para su análisis en el laboratorio de Ingeniería Ambiental de la Universidad del Magdalena y se muestran en la siguiente tabla.

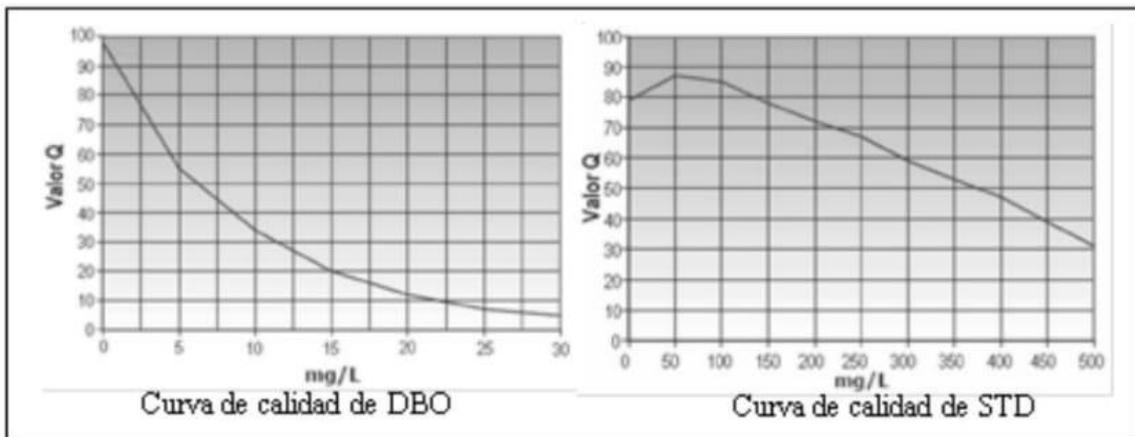
Parámetro	Metodología	P 1-a	P 1-b	P 2-a	P 2-b	Wi
Fosfatos, mg PO4 3- /L	Ácido ascórbico	0,3390	0,3391	0,3436	0,3391	0,12
Nitratos mg NO3 - /L	Colorimetría	0,43	0,47	0,45	0,41	0,12
pH	Potenciométrico	7,37	7,56	7,38	7,37	0,10
Sólidos suspendidos mg/l	Gravimétrico	23,1	22,7	22,4	21,9	0,19
E. Coli UFC/100ml	Filtración por membrana	686	795	715	766	0,17
DBO5 mg/L O2	Incubación a 5 días	9,77	9,26	8,61	8,9	0,12
Oxígeno disuelto, mg/L	Electrométrico	5,71	5,78	5,62	5,69	0,14

*Ilustración 65: Resultados de los parámetros analizados para el cálculo del ICA.*

Los estudiantes con los resultados obtenidos en el laboratorio realizaron un análisis de información dispuesta en tablas y gráficas para así determinar el

índice de calidad del agua a través de un promedio aritmético ponderado de nueve variables con el uso de la ecuación  $ICA = \sum_{i=1}^n Q_i W_i$ .

Específicamente seleccionan el valor obtenido en un parámetro en la tabla \* en cada uno de los puntos donde se tomaron las muestras, luego analizan ese valor en las tablas que contienen las curvas de función y determinan el valor de concentración de dicho parámetro  $Q_i$



Parámetros	Peso de importancia
E. Coli	0,17
Potencial de hidrogeno (pH)	0,10
Demanda bioquímica de oxígeno (DBO5)	0,12
Nitratos $\text{NO}_3^{-1}$	0,12
Fosfatos $\text{PO}_4^{3-}$	0,12
Solidos totales disueltos (STD)	0,19
Oxígeno disuelto (OD)	0,14

El valor del  $Q_i$  se multiplica por el peso de importancia correspondiente  $W_i$ ; la suma de todos los resultados es el índice de calidad del agua (ICA) en ese punto.

Parámetro	Metodología	P 1-a	P 1-a y	P 1-b	P 1-b y	P 2-a	P 2-a y	P 2-b	P 2-b y	Wi
Fosfatos, mg PO <sub>4</sub> 3- /L	Ácido ascórbico	0,339	90	0,339	95	0,344	91	0,339	95	0,12
Nitratos mg NO <sub>3</sub> - /L	Colorimetría	0,43	93	0,47	90	0,45	92	0,41	93	0,12
pH	Potenciométrico	7,37	90	7,56	93	7,38	91	7,37	90	0,1
Sólidos suspendidos mg/l	Gravimétrico	23,1	82	22,7	80	22,4	81	21,9	82	0,19
E. Coli UFC/100ml	Filtración por membrana	686	26	795	22	715	24	766	21	0,17
DBO5 mg/L O <sub>2</sub>	Incubación a 5 días	9,77	35	9,26	40	8,61	38	8,9	32	0,12
Oxígeno disuelto, mg/L	Electrométrico	5,71	2	5,78	2	5,62	1	5,69	1	0,14

Los resultados del procedimiento anteriormente descrito se describen en una tabla.

Puntos de toma de muestra								
	Punto 1		Punto 2		Punto 3		Punto 4	
Día	ICA	Calidad	ICA	Calidad	ICA	Calidad	ICA	Calidad
1	52,72	Media	52,32	Media	51,8	Media	51,78	Media

El ejercicio desarrollado por estudiantes y profesores durante el transcurso del proyecto los ubica en el nivel superior de la fase de abordaje toda vez que son capaces de modelar matemáticamente situaciones del mundo real, explorando diversas opciones para definir un modelo sólido de la situación, en este caso el análisis del índice de calidad del agua. Además, demuestran una comprensión profunda de los elementos matemáticos necesarios para atacar de manera efectiva la solución del problema, aplicando conceptos de manera apropiada y precisa, utilizando estrategias variadas y adecuadas lo que los ubica en el nivel superior de la fase de ataque en el desarrollo del pensamiento matemático.

Esto muestra avances significativos en el desarrollo del pensamiento matemático de estudiantes y docentes, específicamente el razonamiento estadístico, el cual es trabajado de manera superficial a nivel curricular en las instituciones participantes. Esto los lleva a desarrollar habilidades propias del

pensamiento aleatorio o razonamiento estadístico, específicamente, el reconocimiento de la necesidad de los datos, la transnumeración y la percepción de la variación descritas en los modos fundamentales del razonamiento estadístico planteados por Wild y Pfannkuch (1999).

Otro trabajo que muestra avances importantes en el desarrollo del pensamiento matemático es el proyecto presentado por el colegio 1 con él se busca destacar la importancia de conservar los recursos hídricos ante la contaminación urbana y la falta de gestión de residuos flotantes. Para abordar el problema, los estudiantes con el profesor se proponen el desarrollo de un prototipo de Biobarda, una estructura diseñada para retener y recolectar residuos sólidos flotantes de manera efectiva y sostenible y de esa manera mejorar la calidad del agua en la quebrada "El Mayor" mediante la implementación de la Biobarda construida con envases plásticos reciclados.



*Ilustración 66: Estudiantes del colegio 1 desarrollando el proyecto*

Durante el desarrollo del proyecto los estudiantes enfrentaron varios retos que los llevaron a hacer uso de conceptos y habilidades matemáticas, algunos nuevos para ellos.

El primer paso es el cálculo del caudal en una zona del río para para determinar la resistencia que debía tener la Biobarda y así no fuera destruida por la fuerza del agua.

#### Calculo del caudal (Q)

Tiempo promedio  $t(\bar{x})$  e la corriente del rio.

$$t(\bar{x}) = 21,6 \text{ seg}$$

Profundidad promedio  $P\bar{x}$  del rio

$$P\bar{x} = 22,15 \text{ cm} = 0,2215 \text{ m}$$

Para calcular el volumen ( $V$ ) del cuerpo de agua se determinó area primero tomando como medida 10 metros de largo por el ancho que fueron  $a \cdot b \cdot m$

$$V = 10m \cdot 9,6m \cdot 0,2215m$$

$$V = 22,264m^3$$

Teniendo el volumen ( $v$ ) y el tiempo, procedimos calcular caudal ( $Q$ )

$$Q = \frac{V}{t}$$

$$Q = \frac{22,264m^3}{21,6seg}$$

$$Q = 0,98 \frac{m^3}{seg}$$

El trabajo realizado muestra su capacidad para modelar matemáticamente situaciones sencillas del mundo real evidenciando avances en su enfoque de resolución de problemas. Por otra parte, el tratamiento aritmético y algebraico de la situación pone de manifiesto la comprensión de algunos elementos matemáticos necesarios para atacar la solución del problema, mostrando un nivel medio de desarrollo del pensamiento matemático en las fases de abordaje y ataque descritos en la rúbrica.

Luego de calcular el caudal pasaron a determinar la eficiencia de la Biobarda, analizando la cantidad de residuos flotantes atrapados con experimentos simulados arrojando residuos en el Río a una distancia determinada, para ello

lanzaban diez residuos flotantes y contaban la cantidad atrapada en la Biobarda para luego ser registrados en una tabla.

8, 8, 7, 9, 8, 9, 8, 8, 9, 7,  
 8, 8, 8, 8, 9, 8, 7, 9, 8, 7,  
 7, 8, 8, 8, 8, 9, 7, 7, 8, 8,  
 7, 8, 8, 8, 8, 7, 9, 8, 8, 7,  
 8, 8, 8, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9,

El primer procedimiento para calcular la eficiencia de la Biobarda fue hallar el promedio de la cantidad de residuos atrapados en cada ensayo, pero se dieron cuenta que se trataba de un cálculo muy simple y que no arrojaba información confiable, por lo que estudiantes y docentes consultaron expertos y decidieron hacer otro tipo de análisis.

Por lo anterior procedieron a construir una tabla de frecuencias de captación y desarrollar de esa manera un modelo probabilístico que les permitiera analizar de manera la eficiencia de la Biobarda.

DATOS	fi	hi	Hi	Fi
7	12	0.24	24%	14
8	30	0.6	60%	37
9	8	0.16	16%	50

Con la tabla de frecuencias procedieron a construir un modelo matemático probabilístico de aproximación binomial ya que solo tienen dos resultados posibles, éxito, cuando la Biobarda atrapa el 70% o más de los residuos o fracaso, si atrapa menos del 70%. Para ello utilizaron el modelo binomial.

$$P[X \leq x] = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Con la información en la tabla procedieron a realizar el cálculo de eficiencia con el modelo binomial.

Realizados los 10 intentos de retención de residuos sólidos con la biobarda y que, en promedio, la probabilidad de éxito (retención) en un intento es del 0.7 ( $p = 0.7$ ). Queremos calcular la probabilidad de que la biobarda retenga al menos 7 residuos sólidos en esos 10 intentos ( $X = 7$ ).

Primero, calculamos  $P(X < 7)$

Realizando los cálculos, obtenemos  $P(X < 7) \approx 0.2668$ .

Luego, calculemos  $P(X \geq 7)$ :

$$P(X \geq 7) = 1 - 0.2668 \approx 0.7332$$

Concluyen así que la probabilidad de que la Biobarda retenga al menos el 70% de los residuos en diez intentos es del 73.32%, lo que les proporcionó una mejor estimación de la eficiencia de la Biobarda.

Este cambio de modelo y las acciones realizadas los ubica en superior de desarrollo del pensamiento matemático en las fases de abordaje, ataque y revisión descritos en la rúbrica.

### **3.10 Resumen de los proyectos presentados por los colegios participantes en las olimpiadas**

Los colegios participantes en las olimpiadas medioambientales mostraron en el desarrollo del curso formativo y en la presentación de los proyectos aspectos muy importantes en cada una de las dimensiones evaluadas (componente de modelación matemática, componente de solución de problemas, componente de creatividad, componente de presentación, sustentación y componente ambiental), se destaca el entusiasmo y compromiso mostrado por los estudiantes y docentes acompañantes en cada una de las secciones del curso formativo.

Con respecto a las dimensiones evaluadas se encontró fortalezas en la dimensión de presentación y sustentación en donde los estudiantes realizaron una excelente presentación de sus proyectos lo cual se evidenció con un desempeño alto en cada uno de los indicadores de esta dimensión, como por ejemplo en los indicadores de comunicación, de respuesta a preguntas formuladas, apropiación y presentación los estudiantes de cada institución educativa mostraron buen dominio del trabajo en general.

Otra dimensión con buenos resultados fue la del componente ambiental en donde los equipos tuvieron presente el beneficio social que ofrecía cada proyecto, además, que fuera económicamente viable y era relevante con la problemática inicial encontrada y las necesidades de la comunidad en general enmarcada en el cuidado del agua. En cuanto a la dimensión de solución de problemas los colegios 1 y 2 presentaron mejores resultados que los colegios 3 y 4 en los indicadores de procedimientos válidos, creatividad en la solución y formulación y uso del lenguaje matemático y ajuste en la solución del problema.

En la dimensión de modelación matemática los colegios 1 y 2 presentaron un mejor desempeño que los colegios 3 y 4 dado que la parte de modelación matemática empleada por estos equipos fue un poco más allá del factor común en todos los equipos que fue la recolección de datos estadísticos y su interpretación. El equipo 1 con el trabajo de la biobarda realizó un trabajo de campo en el río tomando datos, midiendo, calculando caudal y haciendo pruebas de eficiencia de la biobarda lo cual fue un factor motivante en la realización de este proyecto, por otro lado el colegio 2 que también realizó trabajo de campo con la toma de muestras de agua en el río Gaira y luego realizaron la interpretación de los resultados del laboratorio para realizar el informe del ICA también presentaron mucha motivación por realizar actividades novedosas para ellos y como se mencionó anteriormente el contenido matemático realizado fue un poco mayor que el realizado por los equipos 3 y 4.

Finalmente, con respecto a la dimensión de creatividad se obtuvieron resultados homogéneos alrededor del 3,5 en donde la originalidad y flexibilidad fueron indicadores con alta exigencia debido a encontrar soluciones originales no es una tarea fácil.

Un aspecto positivo que se considera importante es el aporte social que generan la puesta en marcha de estas olimpiadas, como por ejemplo el colegio 3 con su revista digital ambiental y el trabajo realizado compartiendo dicha información con los estudiantes de otros grados en busca de generar una cultura del cuidado del agua, también se destaca el colegio 2 que al presentar el informe del ICA del río Gaira tomaron acciones con la comunidad realizando jornada pedagógica en busca de fomentar el cuidado del río evitando su contaminación.

Los colegios 1 y 4 también compartieron el trabajo realizado en su institución educativa en busca de fomentar la cultura del cuidado del agua.

### **3.11 Conclusiones del capítulo**

El diseño e implementación de las actividades en el curso formativo, el trabajo realizado por estudiantes y profesores en las actividades, los proyectos realizados, así como los resultados de las encuestas de percepción aplicadas a docentes y estudiantes muestran el impacto de la implementación de las olimpiadas medioambientales para que docentes y estudiantes desarrollen su pensamiento matemático y su proceso de resolución de problemas, toda vez que este tipo de actividades promueve las capacidades de razonar, resolver problemas, comunicar ideas y tomar decisiones de manera efectiva.

#### 4 CONCLUSIONES

Producto de la revisión bibliográfica, del diseño e implementación de las actividades del curso formativo y el desarrollo de las olimpiadas medioambientales y de modelación matemática, se pueden extraer las siguientes conclusiones.

La integración de los enfoques de aprendizaje basado en proyectos, la educación matemática crítica y la modelación matemática en un contexto medioambiental resulta ser especialmente efectiva para promover el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes de educación media ya que estos enfoques se basan en la contextualización, la autonomía del estudiante, la colaboración, la resolución de problemas y la evaluación auténtica, lo que los hace altamente relevantes para abordar desafíos que favorezcan de manera significativa el proceso formativo no solo de los estudiantes sino de los profesores involucrados en el proceso.

Un aporte de este trabajo a la educación matemática es la construcción de una rúbrica que permita valorar el desarrollo del pensamiento matemático a partir de las fases de resolución de problemas propuestas por Mason, L. Burton y K. Stacey, donde se describe el nivel de desarrollo del pensamiento matemático a partir de la integración de la modelación matemática, la educación matemática crítica y el aprendizaje basado en proyectos, tal como se detalla a continuación.

En la **fase de abordaje** se describe el menor nivel de desarrollo cuando el estudiante presenta dificultades para modelar matemáticamente situaciones sencillas del mundo real relacionadas con el cuidado del agua y muestra poca

claridad en su enfoque de resolución de problemas; y el máximo nivel de desarrollo se encuentra cuando el estudiante modela matemáticamente situaciones del mundo real, explorando diversas opciones para definir un modelo sólido de la situación.

En la **fase de ataque**, el mínimo nivel de desarrollo se encuentra cuando el estudiante demuestra poca comprensión de los elementos matemáticos necesarios para atacar la solución de problemas involucrados en situaciones medioambientales y comete errores frecuentes en el proceso; y el máximo nivel cuando muestra comprensión profunda de los elementos matemáticos necesarios para atacar de manera efectiva la solución a problemas matemáticos involucrados en situaciones medioambientales, aplicando conceptos de manera apropiada y precisa, utilizando estrategias variadas y adecuadas.

Finalmente, **en la fase de revisión** el mínimo nivel de desarrollo se observa cuando el estudiante muestra poca evidencia de pensamiento crítico para revisar y mejorar las soluciones matemáticas propuestas a las situaciones tratadas y el máximo nivel cuando demuestra un alto nivel de pensamiento matemático crítico al revisar y mejorar a profundidad las soluciones propuestas a las situaciones tratadas, evidenciando creatividad y originalidad en sus enfoques e integrando de manera crítica y creativa los conceptos matemáticos, así como cuestionando y analizando las implicaciones éticas y sociales de sus soluciones.

Lo anterior se puede evidenciar cuando los estudiantes pasan de un modelo aritmético como es el promedio, a un modelo probabilístico para el análisis de la eficiencia de la Biobarda en el caso del grupo de estudiantes del colegio 1. Ello muestra rasgos importantes de los avances en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes y profesores participantes al evidenciar una comprensión profunda de los elementos matemáticos necesarios para atacar de manera efectiva la solución al problema, aplicando conceptos de manera apropiada y precisa, utilizando estrategias variadas y adecuadas, dando muestras de un alto nivel de desarrollo del pensamiento matemático crítico al revisar y mejorar a profundidad las soluciones propuestas en las situaciones tratadas, mostrando creatividad y originalidad en sus enfoques, integrando de manera crítica y creativa los conceptos matemáticos, cuestionando y analizando las implicaciones éticas y sociales de sus soluciones.

Esto muestra avances significativos en el desarrollo del pensamiento matemático de estudiantes y docentes, específicamente del razonamiento estadístico el cual es trabajado de manera superficial en las instituciones participantes y en muchas instituciones de la región y el país.

Por otra parte, el desarrollo de esta tesis ha mostrado en el contexto de la educación media, la importancia de que la enseñanza de las matemáticas se enfoque en el desarrollo de un pensamiento matemático crítico, que permita a los estudiantes comprender la naturaleza de la matemática, sus aplicaciones en el mundo real y su importancia para la toma de decisiones informadas y esto se logra con el trabajo en

situaciones reales que permitan a los estudiantes interactuar con el problema y explorar soluciones.

## **RECOMENDACIONES**

La integración del aprendizaje basado en proyectos, la educación matemática crítica y la modelación matemática puede empoderar a los estudiantes para que se conviertan en ciudadanos críticos y activos que comprenden la importancia de las matemáticas en la toma de decisiones éticas y sostenibles. Sin embargo, su implementación exitosa requiere un compromiso significativo de los docentes, las instituciones educativas y las políticas educativas a nivel nacional. Además, el esfuerzo invertido en la incorporación de estos enfoques puede tener un impacto duradero en la educación matemática y en la capacidad de los estudiantes para abordar los desafíos matemáticos involucrados en situaciones medioambientales.

Las formas tradicionales de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas han evolucionado y en la actualidad se reconoce y recomienda la importancia de incorporar enfoques pedagógicos innovadores que promuevan el pensamiento matemático crítico y su aplicación en contextos relevantes y significativos y en ese sentido, el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) y la Educación Matemática Crítica (EMC) son enfoques pedagógicos que han ganado relevancia en este contexto tal como ha sido evidenciado en el desarrollo del presente trabajo.

Finalmente, a pesar de los beneficios potenciales de la implementación exitosa de enfoques de ABP y EMC en la educación matemática, ello plantea desafíos y consideraciones importantes, por ejemplo, la **formación de los docentes**: Los docentes necesitan capacitación y apoyo para implementar eficazmente el ABP y la EMC en sus aulas lo cual requiere inversiones en desarrollo profesional.

Otro aspecto es la **evaluación auténtica**; los educadores deben desarrollar métodos de evaluación auténticos y basados en evidencia, los **recursos y acceso**, los proyectos de ABP y EMC requieren de recursos adicionales, como materiales, tecnología y conexiones con expertos. Es importante garantizar que todos los estudiantes tengan acceso a estos recursos.

Por último, la **adaptación curricular**: La integración de ABP y EMC requiere ajustes en el currículo y en las políticas educativas a nivel local y nacional.

## ANEXOS

### CURSO FORMATIVO

#### MODELACIÓN MATEMÁTICA Y CUIDADO DEL AGUA

IED		GRADO	
DOCENTE	ELLERY GREGORIO CHACUTO LÓPEZ	FECHA	

#### DESCRIPCIÓN

Las condiciones actuales del planeta ponen de manifiesto la necesidad de educarse frente al cuidado ambiental debido a los fenómenos del calentamiento global y los inevitables efectos que está trayendo el cambio climático; la naturaleza enseña la dependencia de la biodiversidad y de sus ecosistemas para poder subsistir en el planeta. Esto es cierto especialmente frente a la problemática del agua, particularmente en un departamento en el cual es un bien escaso. Además, ello influye en el ahondamiento de las brechas de desigualdad socioeconómicas y de la inequidad social.

Con este curso se pretende resaltar la importancia que tiene el entendimiento de cómo cuidar el medio ambiente en la actualidad y el poder generar proyectos locales en torno a su cuidado de modo que ayude a mejorar la calidad de vida de todos los seres vivos, y a la vez emplear conocimientos matemáticos que permitan contextualizar y modelar comportamientos de diversas situaciones medioambientales y plantear soluciones de mejoramiento.

Para lograr el propósito de una buena educación ambiental, las matemáticas son una herramienta imprescindible ya que permiten establecer modelos que ayudan a comprender ciertos aspectos medioambientales a la vez que se contextualizan determinados contenidos matemáticos en el proceso de

enseñanza. Lo anterior implica la importancia de poner en el contexto de las matemáticas escolares aspectos medioambientales, tal como se pretende en este curso y de esta manera se favorece el desarrollo del pensamiento matemático y se genera la posibilidad de diseñar proyectos ambientales locales.

Por la anterior en este curso se pretende desarrollar los conocimientos matemáticos necesarios para modelar situaciones reales o idealizadas que están relacionadas con el cuidado del ambiente y de esa forma favorecer la formulación de proyectos medioambientales que tengan que ver con el cuidado del agua en el departamento del Magdalena.

OBJETIVOS
GENERAL
<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Favorecer el desarrollo de procesos de modelación matemática en la formulación de proyectos relacionados con el cuidado del agua en el departamento del Magdalena a través del planteamiento y resolución de problemas y el trabajo en equipos.</li> </ul>
OBJETIVOS ESPECÍFICOS
<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Comprender los procesos de modelación matemática</li> <li>▪ Reconocer la importancia del cuidado del agua y la formulación de proyectos para el cuidado del agua en la ciudad de Santa Marta</li> <li>▪ Resolver problemas que involucren modelación matemática y cuidado del agua</li> <li>▪ Formular problemas que involucren modelación matemática y cuidado del agua</li> <li>▪ Prepararse para la formulación de proyectos relacionados con el cuidado del agua y la modelación matemática</li> </ul>

METODOLOGÍA
<p>Para el desarrollo de la actividad usaremos la estrategia de <b>trabajo en equipo</b> para</p> <p><b>Solución de problemas y formulación de proyectos en equipos:</b> los estudiantes trabajan en equipos, para resolver situaciones y formular proyectos a escala local relacionados con la modelación matemática y el cuidado del</p>

agua.

El análisis de la solución a los problemas resueltos por los estudiantes en el curso formativo y los proyectos presentados contempla los siguientes aspectos.

En la solución de problemas.

- Creatividad de la solución
- Procedimientos válidos
- Uso del lenguaje matemático
- Ajuste de la solución al problema

En la formulación de proyectos

- Relevancia. ¿Por qué es deseable llevar a cabo este proyecto?
- Coherencia. Relación entre lo que se quiere conseguir, lo que se quiere transmitir, con el ¿Cómo se va a hacer?
- Componente matemático. Incluye la modelación matemática en la formulación
- Pertinencia de los aspectos relacionados con el cuidado del agua.
- Cronograma y presupuesto ¿Qué se va a necesitar?, ¿Cuándo se va a llevar a cabo el programa?, ¿Cuánto tiempo se necesita para su desarrollo?, ¿Cómo se va a difundir?, ¿Cuánto va a costar?
- Posible impacto. ¿Se han conseguido las metas? ¿Cómo se puede mejorar?

### **Responsabilidad de los integrantes en cada equipo**

1. Compartir las soluciones con los miembros del grupo, buscando entre todos, de forma colaborativa, al menos una solución viable. Si el grupo encuentra más de una solución, debe valorarlas confrontando las virtudes y/o deficiencias de cada una de ellas.
2. Consultar al profesor o a otros expertos para pedir orientación cuando lo necesita.
3. Compartir responsabilidades con sus compañeros.
4. Participar en sesiones de grupo para reflexionar sobre el proceso, los resultados logrados y proponer juntos soluciones de mejora con la orientación del profesor o de expertos en el tema.

## **CONTENIDOS**

### **Formación en modelación matemática.**

Se presenta a los estudiantes y profesores una serie de problemas relacionados con el cuidado ambiental y la modelación matemática que serán resueltos con el acompañamiento del docente.

1. ¿Qué es la modelación matemática?
  - a. Realidad
  - b. Contextos intra y extra-matemáticos

- c. Resolución de problemas
- 2. Importancia de la modelación matemática
  - a. La modelación matemática como actividad científica
- 3. Procesos de la modelación matemática
  - a. Identificación de un problema de la realidad (Situación real)
  - b. Construcción de un modelo (Situación matemática)
  - c. Trabajar matemáticamente (Operaciones matemáticas)
  - d. Conclusiones del modelo
  - e. Interpretación en la realidad (Validación del modelo)
  - f. Reformulación

### **Formación en formulación de proyectos.**

Se presentan a los estudiantes y profesores los aspectos que se deben tener en cuenta para la formulación de proyectos, específicamente con el cuidado ambiental, de modo que ilustre el trabajo futuro en las actividades del curso formativo y la participación en las olimpiadas.

Estos aspectos son:

1. Conceptualización.
  - a. ¿Qué es un Proyecto?
  - b. Objetivos del Proyecto
  - c. Características de los Proyectos
  - d. Puntos claves de un Proyecto
  - e. Ciclo de un Proyecto: Diseño-Planificación- Ejecución- Seguimiento y control- Evaluación y cierre
2. Diseño del proyecto.
  - a. Identificación de necesidad/es y/o problemas
  - b. ¿Qué es un problema?
  - c. Establecimiento de prioridades
  - d. Legislación relacionada
  - e. Descripción del proyecto
  - f. Justificación
  - g. Beneficiarios
  - h. Localización
  - i. Definición de objetivos
3. Planificación del proyecto.
  - a. Análisis y gestión de riesgos
  - b. Planificación
  - c. Recursos
  - d. Presupuesto
  - e. Seguimiento y evaluación
4. Ejecución y seguimiento.
  - a. Seguimiento y control
  - b. Equipo del proyecto

### **Rubrica para analizar la solución de las actividades del curso**

ASPECTO	Nivel Inferior	Nivel Medio	Nivel Alto
Actitudinal	Muestra una actitud pasiva frente al desarrollo de las actividades.	En ocasiones se muestra proactivo frente al desarrollo de las actividades.	Muestra un alto interés frente al desarrollo de las tareas o problemas propuestos en las actividades
Conocimiento	Muestra poca comprensión de las tareas propuestas en las actividades.	Muestra una comprensión parcial de los temas involucrados en las actividades.	Recurre a conceptos y procedimientos y el lenguaje adecuado para la solución de los interrogantes o problemas contenidos en las actividades
Habilidades de pensamiento	Muestra tendencia a las respuestas elementales a los problemas planteados sin reflexión alguna.  Las respuestas a las preguntas y soluciones a los problemas están basadas en el ensayo y error	Muestra poca profundidad en su razonamiento, evidenciado en respuestas parciales y poco elaboradas a los interrogantes o problemas planteados	Presenta ideas consistentes, basadas en procesos de reflexión, la discusión o la indagación.  Muestra profundidad en sus razonamientos evidenciado en las respuestas elaboradas a los interrogantes o problemas planteados en las actividades, producto de la reflexión.

## ACTIVIDAD 1

### Aprendizaje esperado

- ✓ Reconoce la importancia del cuidado del agua y la formulación de proyectos para el cuidado del agua en la ciudad de Santa Marta.

### Profesor:

1. Presentación del curso formativo, su importancia y alcances.
2. Se reúne a los estudiantes para que conformen equipos de 3 o 4 para el trabajo en el curso.
3. Se inicia una actividad exploratoria para generar discusión en torno al cuidado del agua a través de la siguiente pregunta.

¿Cuál es el principal problema que enfrenta tu comunidad respecto al agua potable?

*“Esta pregunta se plantea con el fin de identificar una pregunta del mundo real que se quiere entender”*

**Profesor**

4. Participa en la discusión de los equipos visitando cada grupo

**Estudiantes y profesores**

5. Los estudiantes y profesores darán sus respuestas de las cuales se derivan nuevas preguntas, hasta llegar a una situación concreta que se pueda atender en términos de la modelación matemática.

**Profesor**

6. Anima la discusión planteando nuevas preguntas derivadas de las respuestas de los estudiantes: se plantean las siguientes preguntas entre otras: ¿Cuál es el problema específico? ¿A qué se debe? ¿Cómo se podría abordar? ¿La solución es viable? Y otras que surjan producto de la reflexión en los distintos equipos.

Una vez decantada la problemática identificada en cada grupo se pedirá que la describan formalmente.

**Estudiantes y profesores**

7. Socializan los posibles problemas identificados en los equipos y reciben retroalimentación de toda la clase (se genera un debate)
8. Los estudiantes y profesores entregan la descripción de un posible problema relacionado con el cuidado del agua que han identificado en su comunidad.

**Profesor**

9. Se hace la revisión de los problemas identificados y da la retroalimentación.

## ACTIVIDAD 2

### Aprendizaje esperado

- ✓ Comprende los procesos de modelación matemática a partir de la solución de problemas idealizados o reales.

Se plantea una actividad de modelación matemática la cual será orientada por el docente, en este momento se ilustra el proceso de modelación.

### Profesor

1. Presenta una actividad exploratoria a toda la clase para activar los conocimientos matemáticos necesarios para el desarrollo de las tareas o problemas de la actividad. Se pide a los estudiantes que piensen un número, luego, encuentren el número que es 4 más que su primer número, llamen a este número A. ahora resten 1 del primer número, luego encuentren el número que es 6 más que este nuevo número, llamen a este número B. ¿Cuánto más grande es A que B o B que A? ¿De qué depende?

Aquí los estudiantes demostraran sus conocimientos o habilidades para resolver situaciones sencillas haciendo uso de diferentes registros de representación.

### Profesor.

2. Institucionaliza la situación haciendo una retroalimentación general a las diferentes soluciones encontradas haciendo énfasis en la importancia de los procesos de representación, generalización y validación de los resultados encontrados matemáticamente.

Luego se plantea la siguiente situación que se usará como medio para desarrollar los aprendizajes necesarios relacionados con la modelación matemática.

### Situación 1

En época de invierno la ciudad de Santa Marta cuenta con aproximadamente 1500 litros de agua por segundo, según la empresa administradora del servicio del agua ESSMART, la cual es distribuida en la ciudad a través de las redes de acueducto y por camiones. El agua se obtiene de la planta de Mamatoco con un caudal de 800 litros por segundo, la planta del Roble con un caudal de 400

litros por segundo y pozos subterráneos que brindan 300 litros de agua por segundo. Además, en época de sequías solo se cuenta con aproximadamente 800 litros de agua por segundo. Analizar y fundamentar ¿Cuáles son las consecuencias de contar con este suministro de agua en épocas de invierno y sequía en la ciudad de Santa Marta?

Esta tarea será resuelta con el acompañamiento del docente para comprender las fases de la modelación matemática y entre otras cosas construir una fórmula que permita determinar el caudal necesario en la ciudad de Santa Marta.

Posibles respuestas de los estudiantes.

**Intuitivas y triviales.** Hay mayor caudal en invierno que en verano, la diferencia de caudales en invierno y verano es de 700 l/s.

Algunas preguntas triviales. ¿Qué es caudal? ...

Se hacen las claridades pertinentes.

**Profesor.**

3. Interviene planteando preguntas orientadoras que conduzcan a soluciones más robustas. ¿Son suficientes los caudales en invierno y verano para abastecer a la ciudad? ¿cómo podría saberse? ¿Qué información se necesita? ¿Con qué información se dispone? ....
4. Hace una explicación de las fases de la modelación matemática para presentar respuestas más elaboradas a la pregunta inicial.

Las fases de la modelación matemática se orientan a través de la solución conjunta de la siguiente situación

## **Situación 2**

Se le pide a un grupo de estudiantes en un IED que determinen qué cantidad de botellas de plástico que venden en la tienda escolar durante el período de clases en el año 2023.

**Comprender.**

Para determinar un promedio el consumo de material plástico usado correspondiente al uso de botellas de plástico es necesario hacer una recolección de información, por ejemplo, las distintas clases botellas que se venden en la cafetería escolar en un tiempo determinado y qué cantidad de área superficial tiene cada botella y el tipo de plástico ya que se ha ido utilizando cada vez un plástico más “delgado”. Después hay que buscar recursos matemáticos los cuales den respuesta al problema.

### **Matematizar.**

Al realizar un trabajo estadístico para recoger información referente al consumo de los diferentes productos en botellas plásticas durante seis semanas se obtuvo los siguientes datos.

Envase	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
Ag 300	320	350	375	335	405	300	355	346	360
Ag 420	240	250	275	315	340	305	332	311	310
Ag 600	230	235	255	280	235	245	255	243	233
Ref 250	375	340	320	290	350	335	312	323	338
Ref 400	325	315	290	300	325	320	312	301	335
Ref 300	585	545	565	570	580	480	445	452	460
Total	2075	2035	2080	2090	2235	1985	2011	1976	2036

El profesor explica qué es una regresión lineal con ejemplos.

La regresión lineal es una técnica estadística la cual es utilizada para predecir o estimar una variable cuantitativa en función de otra variable cuantitativa. La regresión lineal consiste en modelar una ecuación de una línea recta, ejemplo de ello es determinar el número de nacimientos en una determinada ciudad en un año determinado, para eso se identifican las variables presentes  $x$  e  $y$ , en donde  $x$  representa el año, por otro lado la variable  $y$  representa el número de nacimientos, al tener cierta cantidad de datos de la forma  $(x,y)$ , estos datos se ubican en el plano cartesiano mediante un diagrama de dispersión. Es posible obtener muchas rectas que pasen por dos o más puntos, sin embargo, hay una recta que es la más óptima (dicha recta es la que se encuentra más próxima al conjunto de puntos).

Ahora se debe verificar si existe una correlación lineal entre los datos.

Los datos tomados se pueden ubicar en el plano cartesiano de la siguiente manera (semana, cantidad de botellas), por ejemplo (S1, cantidad de botellas) = (1, 415) y de esta manera podemos obtener un diagrama de dispersión y luego realizar una regresión lineal para así determinar una recta que representa el comportamiento de la situación en un futuro.

Aquí se advierte a los estudiantes que no se están considerando los diferentes “espesores” del plástico. Por lo tanto, se les plantea la pregunta ¿Cómo pueden tenerlo en consideración?

Aquí se espera que los estudiantes hagan un experimento de visitar la tienda escolar en dos días diferentes y ver alguna tendencia en las ventas (hablando también con el tendero) que les permite tener en cuenta un estimativo de cuántas botellas que se venden a diario son de cada espesor.

### Trabajar matemáticamente

Se definen las variables X=Número de semanas, Y=Número de botellas

Se construye la tabla para calcular los parámetros de regresión lineal, aquí se hará uso del software dinámico de cálculo simbólico Geogebra.

X	Y	$X - \bar{X}$	$Y - \bar{Y}$	$(X - \bar{X})^2$	$(Y - \bar{Y})^2$	$(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$
1	2075					
2	4110					
3	6190					
4	8280					
5	10515					
6	12500					
7	14511					
8	16487					
9	18523					

X	$(X_i - \bar{X})$	$(X_i - \bar{X})^2$	Y	$(Y_i - \bar{Y})$	$(Y_i - \bar{Y})^2$
1	-4	16	2075	-8279,556	68551040,2
2	-3	9	4110	-6244,556	38994474,1
3	-2	4	6190	-4164,556	17343523
4	-1	1	8280	-2074,556	4303780,75
5	0	0	10515	160,44444	25742,4198
6	1	1	12500	2145,4444	4602931,86
7	2	4	14511	4156,4444	17276030,4
8	3	9	16487	6132,4444	37606874,9
9	4	16	18523		

9	Desviación estándar	2,5819889	Valor medio: 10354,556	Desviación estándar	5327,37044
---	---------------------	-----------	------------------------	---------------------	------------

$$S_{xy} = \frac{\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{N} \approx 13753,88$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum(y - \bar{y})^2}{N}} \approx 5327,37$$

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = \frac{13753,88}{2,5819 \times 5327,37} = 0,9999 \rightarrow \rightarrow \text{Perfecta}$$

Ecuación lineal de la correlación entre la variable Y y la variable X;  $y = ax + b$

$$a = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{9(589740) - (45)(93191)}{9(285) - (45)^2} = 2063,08333$$

	X	Y	X <sup>2</sup>	XY
	1	2075	1	2075
	2	4110	4	8220
	3	6190	9	18570
	4	8280	16	33120
	5	10515	25	52575
	6	12500	36	75000
	7	14511	49	101577
	8	16487	64	131896
	9	18523	81	166707
Sumatoria	45	93191	285	589740

$$b = \frac{\sum y - a \cdot \sum x}{n} = \frac{93191 - 2063,08333(45)}{9} = 39,1388$$

	X	Y	X <sup>2</sup>	XY
	1	2075	1	2075
	2	4110	4	8220
	3	6190	9	18570
	4	8280	16	33120
	5	10515	25	52575
	6	12500	36	75000
	7	14511	49	101577
	8	16487	64	131896
	9	18523	81	166707
Sumatoria	45	93191	285	589740

**Validar e interpretar**

La ecuación que representa el comportamiento de la cantidad de botellas utilizadas en la tienda escolar durante el periodo de clases esta dado por

$$y = ax + b = 2063,08333x + 39,1388$$

El periodo escolar comprende alrededor de 40 semanas, por lo tanto, el promedio de botellas plásticas esta dado por:

$$y = 2063,08333(40) + 39,1388 = 82562$$

### **ACTIVIDAD 3**

#### **Aprendizaje esperado**

- ✓ Resuelve problemas que involucren modelación matemática y cuidado del agua.

Aquí se plantean dos problemas relacionados con el cuidado del agua que involucre modelación matemática para ser resuelto por los estudiantes.

#### **Profesor:**

1. Inicia la actividad planteando la primera situación a ser resuelta por los estudiantes de modo que se fortalezca el proceso de resolución de problemas

#### **Situación 1.**

Analizar la calidad del agua de una de las diferentes fuentes de suministro que tiene la ciudad de Santa Marta y proyectar cómo la calidad del agua podría cambiar en el tiempo y la cantidad de agua disponible para ser utilizada en las diferentes zonas beneficiadas.

Se da el espacio para el análisis de la situación, se plantean preguntas cómo:  
¿Se entiende el problema? ¿Cuál es la pregunta? ¿Qué se debe hacer?  
¿Cómo se debe hacer? Entre otras.

**Profesor:**

Plantea algunas tareas que orientan el proceso en caso de ser necesario.

- Recopilar datos de calidad del agua de una fuente de suministro en diferentes momentos o en diferentes ubicaciones.
- Utilizar gráficas y análisis estadísticos para determinar patrones y tendencias en la calidad del agua.
- Modelar cómo los cambios en el clima podrían afectar la cantidad de agua disponible para su uso en diferentes ubicaciones geográficas.
- Plantear modelos matemáticos para proyectar cómo la calidad del agua podría cambiar en el tiempo.
- Desarrollar planes de manejo de agua y recomendaciones para garantizar que se mantenga la calidad del agua y su suministro en zonas beneficiadas.

**Profesor:**

2. Plantea la segunda situación a ser resuelta por los estudiantes para seguir fortaleciendo el proceso de resolución de problemas

**Situación 2.**

Analizar y fundamentar los patrones de consumo de agua en su comunidad y cómo estos afectan el suministro de agua en la zona.

Los estudiantes deberán recopilar datos sobre el uso de agua en hogares, comercios y otros lugares dentro de la comunidad y utilizar técnicas de modelación matemática para proyectar cómo los patrones de consumo podrían evolucionar en el futuro y cómo esto afectaría el suministro de agua de la comunidad.

Para ello, se determinan los factores a tener en cuenta por medio de la indagación y luego se lleva a cabo una discusión en clase para ver si los diferentes grupos utilizan diferentes conjuntos de factores.

Otra actividad que podría desarrollarse es estudiar opciones para conservar y utilizar de manera más eficiente el agua en la comunidad y evaluar el impacto

de estas opciones en el consumo y agotamiento del suministro de agua a largo plazo.

Aquí nuevamente se genera una discusión sobre los factores a tener en cuenta y su relativa importancia en el asunto.

**Profesor:**

Da la orientación para que las soluciones planteadas deberán incluir los siguientes elementos:

- **Definir el problema:** Este paso involucra la identificación del problema y la descripción de los objetivos que se quieren lograr con relación al cuidado del agua y el suministro en la comunidad. También se requiere una descripción clara de los datos disponibles y los supuestos para establecer la información relevante.
- **Desarrollar un modelo matemático:** con base en los datos disponibles, se debe desarrollar un modelo matemático para entender los patrones de consumo de agua y prever su evolución en el futuro. Esto podría incluir variables como el número de residentes, el clima y el consumo de agua en diferentes situaciones.
- **Validar el modelo matemático:** Es importante garantizar que el modelo sea preciso y adecuado para los datos. Se debe comparar la predicción del modelo con datos históricos para asegurarse de que funciona bien.
- **Realizar análisis de sensibilidad:** En esta fase, se debe probar cómo cambia la predicción del modelo ante diferentes supuestos y condiciones. Esto ayuda a los estudiantes a identificar áreas problemáticas que necesiten soluciones alternativas.
- **Identificar soluciones:** Con el modelo de predicción, los estudiantes exploran diferentes opciones para utilizar mejor el agua en la comunidad. Esto incluye la promoción del uso responsable del agua o la implementación de sistemas de captación de agua de lluvia entre otros.
- **Evaluar las soluciones:** Usando el modelo de predicción, los estudiantes deberán comparar diferentes soluciones para ver cuál sería la más efectiva para la comunidad en cuestión. También podrían examinar el costo-

beneficio de cada solución, entre otros criterios, para decidir cuál sería la solución más factible.

## **ACTIVIDAD 4**

### **Aprendizaje esperado**

- ✓ Formula problemas que involucren modelación matemática y cuidado del agua.

Aquí se pide a los estudiantes que formulen un problema relacionado con el cuidado del agua que involucre modelación matemática.

### **Profesor:**

1. Se reúne a los estudiantes en los equipos conformados en la actividad 1.
2. Se retoma la actividad 1 y las iniciativas de los estudiantes para ser planteadas como problemas.
3. Participa en la discusión de los equipos visitando cada grupo

### **Estudiantes y profesores**

4. Los estudiantes presentan sus posibles problemas y son analizados con el acompañamiento del profesor y del resto de la clase.

### **Profesor**

5. Anima la discusión planteando las siguientes preguntas entre otras: ¿Cuál es el problema específico? ¿A qué se debe? ¿Cómo se podría abordar? ¿La solución es viable? Y otras que surjan producto de la reflexión en los distintos equipos.

Una vez decantada la problemática identificada en cada grupo se pedirá que la describan formalmente.

### **Estudiantes y profesores**

6. Socializan los posibles problemas identificados en los equipos y reciben retroalimentación de toda la clase (se genera un debate)
7. Los estudiantes y profesores entregan la descripción de un posible problema relacionado con el cuidado del agua que han identificado en su comunidad.

## **Profesor**

Se hace la revisión de los problemas identificados y da la realimentación.

Los estudiantes resuelven los problemas formulados

## **ACTIVIDAD 5**

### **Aprendizajes esperados**

- ✓ Prepararse para la formulación de proyectos relacionados con el cuidado del agua y la modelación matemática.
- ✓ Aprender los pasos fundamentales en la formulación de proyectos relacionados con el cuidado del agua.

En esta actividad se plantean los elementos de la formulación de proyectos; durante la clase, se incluyen ejemplos prácticos, estudios de casos y discusiones grupales para fomentar la participación de los estudiantes.

**Momento 1.** Presentación del tema e importancia del cuidado del agua y la necesidad de formular proyectos para su conservación: se inicia con una presentación por parte del docente acerca de la formulación de proyectos y se vincula con el cuidado del agua

**Momento 2.** Identificación del problema:

Se hace la explicación de la importancia de identificar un problema específico relacionado con el cuidado del agua para la formulación del proyecto, aquí se pueden tener en cuenta las ideas planteadas en la Actividad 1.

El profesor ilustra con ejemplos de problemas comunes: escasez de agua, contaminación, desperdicio y gestión ineficiente, recolección de aguas grises, plantas de desalinización, entre otros.

Aquí nuevamente se pide a los estudiantes que identifiquen un problema relacionado con el agua y lo compartan con el grupo.

**Momento 3.** Análisis de la situación:

Se hace la explicación de la necesidad de analizar la situación actual en relación con el problema identificado, la recopilación de datos relevantes: por

ejemplo, disponibilidad de agua, calidad del agua, impacto ambiental, necesidades de la comunidad, etc.

Aquí se pide a los estudiantes que investiguen y recopilen datos sobre el problema que identificaron.

**Momento 4.** Establecimiento de objetivos y metas:

Se hace la explicación de la importancia de establecer objetivos claros y medibles para el proyecto, la definición de metas a corto, mediano y largo plazo.

Los objetivos y metas se centrarán en el corto plazo ya que solo tendrán el tiempo que dura la olimpiada para hacer mediciones, el mediano y largo plazo podrían ser proyectadas matemáticamente.

Aquí se pide a los estudiantes que establezcan objetivos y metas para abordar el problema identificado.

**Momento 5.** Diseño de estrategias y acciones:

Se hace la explicación de cómo diseñar estrategias y acciones para alcanzar los objetivos establecidos y la identificación de posibles soluciones y enfoques para abordar el problema.

Aquí se pide a los estudiantes que propongan estrategias y acciones concretas para su problema identificado.

**Momento 6.** Presupuesto y recursos:

Se hace explicación de la importancia de elaborar un presupuesto y determinar los recursos necesarios para implementar el proyecto, consideración de costos de materiales, personal, capacitación, entre otros.

Aquí se pide a los estudiantes que elaboren un presupuesto estimado para su proyecto.

**Momento 7.** Evaluación y seguimiento:

Se hace la explicación de la necesidad de evaluar y hacer un seguimiento del proyecto para medir su efectividad, definir indicadores de éxito y establecer criterios de evaluación.

Aquí se pide a los estudiantes que propongan indicadores de éxito y criterios de evaluación para su proyecto. Se advierte que puede suceder que estos tengan que ser reevaluados en el transcurso de la realización del proyecto.

#### **Momento 8. Conclusiones:**

Se hace la recapitulación de los pasos fundamentales en la formulación de proyectos relacionados con el cuidado del agua, importancia de la planificación y el seguimiento en el éxito de los proyectos. Se da la motivación para tomar acción y contribuir al cuidado del agua mediante proyectos concretos y factibles para su comunidad.

#### **Formación en formulación de proyectos.**

La capacidad de formular proyectos se ha convertido en una estrategia apropiada para promover los aprendizajes matemáticos de los estudiantes. Y le permite al profesor, ofrecer situaciones concretas y del entorno les ayude a los estudiantes a organizar e interpretar información y datos, describir relaciones, desarrollar modelos matemáticos, revisar problemas y poder pensar en múltiples soluciones, también permite entender y aplicar conceptos básicos matemáticos.

Esta estrategia se plantea como un mecanismo para para el desarrollo del pensamiento lógico, y se concibe como el proceso de búsqueda de las relaciones que pueden darse en torno a un tema o una situación, como es el caso específico del cuidado del agua. Esto se considera importante para la formación de los estudiantes, ya que se procura desarrollar una visión en la forma de relacionarse con la nueva información que haga que su aprendizaje vaya siendo relacional y comprensivo.

Para este curso se presentan a los estudiantes y profesores los aspectos que se deben tener en cuenta para la formulación de proyectos, específicamente con el cuidado del agua, de modo que pueda presentar resultados que permitan ser evaluados y establecer mecanismo de mejora para lograr que los estudiantes alcancen los resultados a aprender.

#### **¿Qué es un Proyecto?**

“Proceso único que conlleva un conjunto de actividades planificadas, ejecutadas y evaluadas que, con recursos humanos, técnicos y financieros finitos, trata de obtener unos objetivos en un plazo determinado, con un comienzo y un fin claramente identificables”.

“Conjunto de actividades concretas, interrelacionadas y coordinadas entre sí, que se realizan con el fin de producir determinados bienes o servicios capaces de detectar necesidades o resolver problemas”.

“Secuencia única y tecnológicamente determinada de actividades, generalmente no repetitiva, que supone la coordinación de múltiples recursos (personas, materiales y financieros) para alcanzar unos objetivos claramente definidos en un tiempo y con unos costes determinados”.

Se ilustra con el proyecto



Se remite a los estudiantes a la página [WRA-Arizonas-Water-Future-vFinal.pdf](http://westernresourceadvocates.org/WRA-Arizonas-Water-Future-vFinal.pdf) ([westernresourceadvocates.org](http://westernresourceadvocates.org))

### **Objetivos del Proyecto**

Aquí se hace necesario plantearse las siguientes preguntas ¿para qué sirve el proyecto? o ¿por qué llevarlo a cabo? es decir, qué objetivos persigue su realización.

Para responder a las preguntas se plantea

1. Conseguir un resultado final
2. Buscar un costo equilibrado
3. Establecer y cumplir un plazo
4. Satisfacer las necesidades observadas o de los usuarios

Los objetivos de un proyecto son los logros que se quieren conseguir con la ejecución de una acción previamente planificada. Constituyen la referencia principal y dan coherencia al plan de acción.

Después de identificar las necesidades a las que se desea responder, es necesario establecer los objetivos de la acción. Este proceso consiste en preguntarse qué es lo que se quiere lograr para dar respuestas concretas.

Es muy importante que los objetivos sean:

- Claros: deben estar enunciados en un lenguaje comprensible y preciso, de modo que sean fácilmente identificables y de este modo se puedan evitar diferentes interpretaciones.
- Concretos: es decir, que expresen con claridad y precisión lo que se pretende alcanzar con ellos.
- Realistas: que deben ser factibles de alcanzar con los recursos disponibles, con la metodología adoptada y dentro de los plazos previstos.
- Pertinentes: los objetivos deben tener una relación lógica con la naturaleza de los problemas que se pretenden solucionar.
- Evaluables: lo que equivale a decir que, cuando terminen las actividades que los desarrollan, se pueda saber si se han cumplido o no.

¿Cuáles fueron los objetivos del proyecto ARIZONA'S WATER FUTURE”?

### **Ciclo de vida de un Proyecto**

Todo proyecto debe cumplir las siguientes fases.

**DISEÑO:** en esta fase se definen los objetivos del proyecto, las especificaciones técnicas del mismo, el alcance. Por otro lado, se analiza la información asociada a las posibles actividades y tareas a realizar, es decir, se analiza la experiencia previa que exista sobre proyectos similares.

**PLANIFICACIÓN:** consiste en analizar los riesgos o problemas potenciales que puedan surgir, definir las actividades y tareas a realizar en el proyecto para alcanzar los objetivos, determinar los recursos necesarios y establecer un plan de seguimiento del mismo. Es una fase importante ya que si ajustamos al máximo esta actividad tenemos más garantías de éxito.

**EJECUCIÓN:** consiste en la puesta en marcha de la planificación realizada en la fase anterior. Esta fase combina la gestión y el trabajo técnico que hay que realizar para alcanzar los objetivos del proyecto.

**SEGUIMIENTO Y CONTROL:** es la aplicación del plan de seguimiento establecido en la fase de planificación. ¿Por qué esta fase? Es difícil, por no decir imposible, que una planificación se ejecute tal cual se ha establecido, por ello es necesario hacer un seguimiento del grado de realización de las actividades, de los recursos utilizados, de la evolución del presupuesto... Cuanto antes se detecten las desviaciones, antes se podrá actuar y arreglar los problemas. En ese caso, se deberá replanificar e introducir las modificaciones que permitan alcanzar los objetivos.

**EVALUACIÓN Y CIERRE:** es el momento de hacer balance de los resultados alcanzados, de valorar si se han conseguido los objetivos planteados en el proyecto, y cerrar el proyecto elaborando el informe final y disolviendo el equipo de trabajo

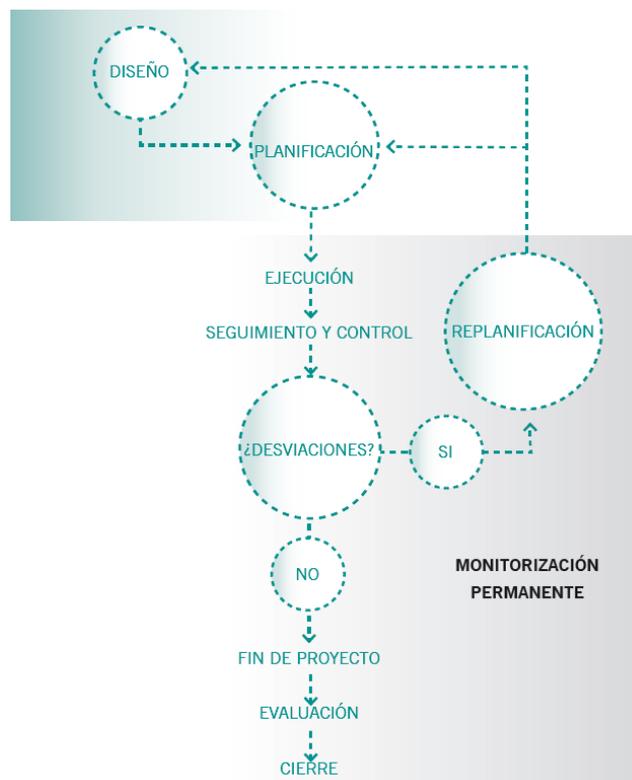


Ilustración 67: Ilustración fases del desarrollo del proyecto.

### Diseño del proyecto

El punto de partida de un proyecto es la existencia de un problema o necesidad real que se quiere resolver o cubrir. Por ello, el primer paso para la elaboración de un proyecto será la identificación de ese problema o necesidad.

¿Qué es un problema? Un problema sería una “situación inesperada que ocurre en un momento dado y que produce cambios en los objetivos previstos o distorsiona la realidad”.

Además, cabe señalar que la situación problemática no tiene que ser necesariamente una situación nueva, sino que puede tratarse de una situación ya existente que se convierte en problemática cuando empieza a crear conflictos o malestar en las personas y será entonces cuando se haga necesario intervenir para resolver el problema a través de una intervención externa a la que llamaremos proyecto.

“Identificar el problema de la escasez de agua en Arizona y su relación con la sobreexplotación del río Colorado (página 15)”

Se hacen preguntas como: ¿De qué se trata el problema tratado en el documento? ¿Cómo se relaciona con la problemática en Santa Marta?

Una vez identificadas las diversas necesidades o problemas, hay que priorizar qué necesidades o problemas se considera más urgente o importante resolver, ya que como se ha comentado anteriormente los recursos y el tiempo son limitados.

¿Cuáles fueron las prioridades establecidas en el proyecto “ARIZONA’S WATER FUTURE”? ¿Qué prioridades establecerías para la problemática identificada en tu comunidad?

Otro aspecto a tener en cuenta en el diseño del proyecto son los requisitos técnicos y/o legales que pueden suponer determinadas regulaciones normativas del sector o ámbito de actividad en el que se va a desarrollar el mismo.

¿Qué normas se tuvieron en cuenta en el proyecto “ARIZONA’S WATER FUTURE”? ¿Cuáles son las normas vigentes en Colombia y en Santa Marta que debes tener en cuenta para la solución de la problemática que has observado?

Una vez identificada y delimitada la problemática del proyecto y reconocida la legislación correspondiente se procede a la descripción del proyecto, aquí se refleja la información general sobre el mismo, a modo de resumen, que permita

a quien lea el documento hacerse una idea lo más aproximada posible del problema o necesidad que pretende resolver dicho proyecto y los principales objetivos que persigue.

Haga una descripción del proyecto que pretende desarrollar. Luego se hace necesario especificar los antecedentes, la motivación, la justificación y el origen del mismo, es decir, por qué se hace. Para poder llevarse a la práctica debe ser operativo, pero también debe apoyarse en un marco de referencia teórico, en unos presupuestos o principios aceptados.

Para realizar la justificación del proyecto es conveniente utilizar la información generada en la fase de diagnóstico y detección de necesidades, dado que aporta argumentos a dicha justificación.

Explicar en que se justifica la realización del proyecto “ARIZONA’S WATER FUTURE”

¿Cuál es la justificación de tu proyecto? Tratados el problema y necesidad, estos afectan a personas, por lo cual los proyectos siempre tienen como destinatario final a personas o clientes.

En este apartado del proyecto se concretará precisamente quién o quiénes serán las personas, clientes u otras empresas identificadas como beneficiarios de los resultados, del producto o servicio finales, realizando además una cuantificación del alcance respecto a personas beneficiarias, también se hace necesario especificar la localización.

¿Cuáles fueron los beneficiarios del proyecto “ARIZONA’S WATER FUTURE”?  
¿Quiénes serían los beneficiarios de tu proyecto? Explicar.

Por otra parte, es necesario realizar un análisis de riesgos para poder establecer

estrategias de anticipación y estar preparados para tomar medidas que permitan minimizar el impacto de estos riesgos. Generalmente se piensa que los riesgos derivan de las dificultades técnicas del proyecto, pero hay que tener en cuenta otros factores que suponen riesgo y que por tanto no deben menospreciarse.

Uno de los elementos más complicados de definir y gestionar son los recursos que han de utilizarse durante el proyecto, tanto los materiales como los humanos.

¿Qué riesgos identificas en el proyecto que pretendes desarrollar en tu comunidad? ¿Con qué recursos? ¿Cómo se gestionarán? ¿Cuál es el presupuesto?

Actividad	Duración	Costos		
		Personas	Recursos	Costo total de actividad
Total, proyecto				

### EVIDENCIAS DESARROLLO DEL CURSO FORMATIVO



*Ilustración 68: Desarrollo del curso formativo.*



Ilustración 69: Estudiantes presentando la problemática escogida por cada colegio.

Ilustración 70: Desarrollo del curso formativo

## Presentación proyectos Olimpiadas Medioambientales



Ilustración 71: Presentación proyecto colegio 2



Ilustración 72: Acciones colegio 2 con la comunidad de Gaira



Ilustración 73: Presentación proyectos colegio 1.



Ilustración 74: Presentación colegio 4

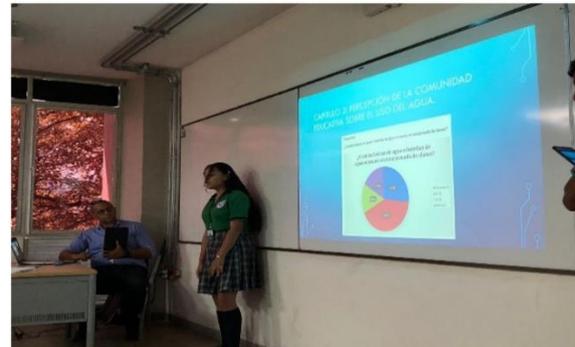


Ilustración 75: Presentación proyectos colegio 3.

### Premiación de las Olimpiadas Medioambientales

La actividad se desarrolló en la sede de la Universidad Antonio Nariño en Santa Marta y contamos con el acompañamiento del director de la Universidad Antonio Nariño sede Santa Marta Dr. Gilbert Torres, el Dr. Roberto Torres. Fue una muy buena experiencia finalizando de buena manera el proceso de las primeras olimpiadas, se contó con el acompañamiento de los estudiantes

participantes, de los docentes acompañantes y algunos profesores de las instituciones participantes y familiares de los estudiantes.

Los equipos manifestaron su interés en seguir participando y mostraron satisfacción de haber participado en las olimpiadas. La premiación consistió en la entrega de un computador para el colegio ganador de las olimpiadas y para los demás colegios se le premio con tabletas.



*Ilustración 76: Premiación de las olimpiadas medioambientales*



*Ilustración 77: Colegios recibiendo los premios donados por la Universidad Antonio Nariño*



*Ilustración 78: Premiación Olimpiadas*

Santa Marta, julio 10 del 2023

Estimados Rectores  
IED SIMON BOLIVAR DE GAIRA  
IED HUGO J. BERMUDEZ  
IED LA PAZ  
IED CRISTO REY  
IED LICEO SAMARIO  
IED 11 DE NOVIEMBRE  
IED RODRIGO GALVAN DE LAS BASTIDAS  
IED MAGDALENA  
IED EDGARDO VIVES  
IED NORMAL SAN PEDRO ALEJANDRINO  
IED NORMAL MARIA AUXILIADORA  
IED RCO. DE PAULA SANTANDER  
IED. LICEO CELEDON

**Asunto: Invitación a participar en las Olimpiadas medioambientales para el desarrollo del pensamiento matemático y de modelamiento matemático en proyectos medioambientales.**

Cordial saludo:

Los valores agregados en formación son valiosos, la mirada interdisciplinaria y la visión de aprendizaje basado en proyectos, donde se ponen en escena las Matemáticas y los proyectos medioambientales son un nuevo reto para sus estudiantes (3) por institución y el docente de matemáticas. El ofrecimiento lo hace el docente de la U. del Magdalena candidato a Doctor, ELLERY GREGORIO CHACUTO LOPEZ coordinador del proyecto.

Anexo les envío el proyecto, esperamos su aporte con la participación del docente de matemáticas y tres estudiantes, por favor contactar al profesor Chacuto, los siguientes son los datos y a su vez le suministrare a él su teléfono de contacto para facilitar la fluidez en la comunicación.

Email del profesor Chacuto: [echacuto@unimagdalena.edu.co](mailto:echacuto@unimagdalena.edu.co) teléfono celular 3006782939

Cordialmente,

ORIGINAL FIRMADO  
AURORA GARAY  
Directora de Calidad Educativa SED

Cra 8 #28 A - 60  
4209600 ext. 1393  
[educacion@santamarta.gov.co](mailto:educacion@santamarta.gov.co)  
Nit: 891.780.009-4



 @SantaMartaDTCH  
[www.santamarta.gov.co](http://www.santamarta.gov.co)

*Ilustración 79: Carta a secretaría de Educación para la participación en las olimpiadas*

## Evaluación del Curso de Matemáticas y Modelación

### Questionario a estudiantes

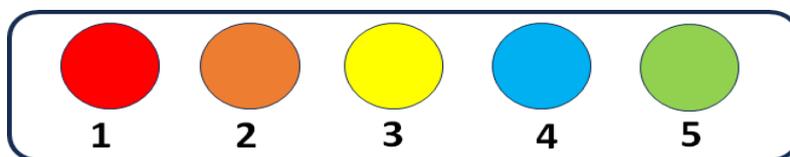
Fecha: \_\_\_\_\_

Instrucciones:

Por favor, responda las siguientes preguntas de acuerdo a su experiencia en el curso formativo de modelación matemática, resolución de problemas matemáticos y formulación de proyectos relacionados con el cuidado del agua.

Este cuestionario tiene como objetivo evaluar sus avances en el aprendizaje y cómo el curso ha impactado su proceso formativo.

1. En una escala del 1 al 5, donde 1 es "Ningún avance" y 5 es "Avance significativo", ¿cómo calificaría los avances en sus habilidades matemáticas y de modelación como resultado de este curso?



2. Por favor proporcionar ejemplos concretos de cómo el curso ha influido en su proceso formativo y su crecimiento en resolución de problemas matemáticos.
3. Por favor proporcionar ejemplos concretos de cómo el curso ha influido en su proceso formativo y su crecimiento en la formulación de proyectos.
4. ¿Qué aspectos específicos de la metodología del curso considera que contribuyeron más a su aprendizaje?
5. Explique con todo detalle ¿Qué aspectos específicos de su actitud hacia las matemáticas han cambiado con el desarrollo de este curso?
6. Explique con todo detalle ¿Qué aspectos específicos de su pensamiento matemático han cambiado con el desarrollo de este curso?
7. Exprese con sus palabras ¿Cuál ha sido su nivel de motivación y satisfacción con el desarrollo del curso formativo?

## **Evaluación del Curso de Matemáticas y Modelación**

### **Cuestionario a profesores**

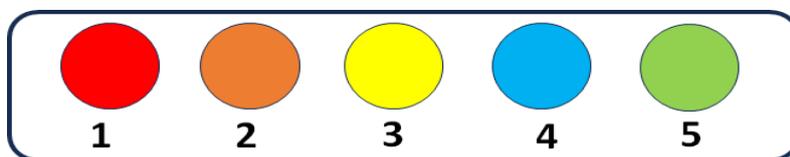
Fecha: \_\_\_\_\_

Instrucciones:

Por favor, responda las siguientes preguntas de acuerdo a su experiencia en el curso formativo de modelación matemática, resolución de problemas matemáticos y formulación de proyectos relacionados con el cuidado del agua.

Este cuestionario tiene como objetivo evaluar sus avances en el aprendizaje y cómo el curso ha impactado su proceso formativo.

8. En una escala del 1 al 5, donde 1 es "Ningún avance" y 5 es "Avance significativo", ¿cómo calificaría los avances en sus habilidades matemáticas y de modelación como resultado de este curso?



9. Por favor proporcionar ejemplos específicos de cómo ha mejorado en términos de sus habilidades matemáticas y de modelación durante el curso.
10. ¿Cómo ha impactado este curso en su proceso de resolución de problemas matemáticos, comparando con sus conocimientos antes de iniciar el curso?
- He mejorado significativamente
  - He mejorado un poco
  - Sin cambio significativo
  - He empeorado un poco
  - He empeorado significativamente
11. Por favor proporcionar ejemplos concretos de cómo el curso ha influido en su proceso formativo y su crecimiento en resolución de problemas matemáticos.
12. ¿Cómo ha impactado este curso en su proceso de formulación de proyectos, comparando con sus conocimientos antes de iniciar el curso?
- He mejorado significativamente
  - He mejorado un poco
  - Sin cambio significativo
  - He empeorado un poco
  - He empeorado significativamente
13. ¿Los contenidos del curso le han parecido adecuados y relevantes para su formación?
- Muy adecuados y relevantes
  - Adecuados y relevantes
  - Poco adecuados y relevantes
  - No adecuados y relevantes
14. ¿Qué aspectos específicos de la metodología del curso considera que contribuyeron más a su aprendizaje?

15. ¿Cómo ha cambiado su actitud hacia las matemáticas el desarrollo de este curso?
- Mucho más positiva
  - Un poco más positiva
  - Sin cambio
  - Un poco más negativa
  - Mucho más negativa
16. ¿Cómo ha evolucionado su forma de pensar matemáticamente con el desarrollo del curso?
- Ha mejorado significativamente
  - Ha mejorado un poco
  - Sin cambio significativo
  - Ha empeorado un poco
  - Ha empeorado significativamente
17. Explique con todo detalle ¿Qué aspectos específicos de su pensamiento matemático han cambiado con el desarrollo de este curso?
18. ¿Cómo ha impactado este curso en su proceso de enseñanza de las matemáticas, comparando con sus conocimientos antes de iniciar el curso?
- He mejorado significativamente
  - He mejorado un poco
  - Sin cambio significativo
  - He empeorado un poco
  - He empeorado significativamente
19. ¿Qué aspectos del curso le gustaría sean mejorados o resaltados y cuáles serían sus sugerencias?

## REFERENCIAS

Aguirre, J. M., Anhalt, C. O., Cortez, R., Turner, E. E., & Simic-Muller, K. (2019).

Engagi Aguirre, J. M., Anhalt, C. O., Cortez, R., Turner, E. E., & Simic-Muller, K. (2019). Engaging Teachers in the Powerful Combination of Mathematical Modeling and Social Justice: The Flint Water Task. *Mathematics Teacher Educator*, 7(2), 7–26.

<https://doi.org/10.5951/mathteaceduc.7.2.0007>

Barquero, B., Bosch, M., & Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: Dealing with institutional constraints. *ZDM - Mathematics Education*, 50(1–2), 31–43. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0907-z>

Bell, S. (2010). Project-Based Learning for the 21st Century: Skills for the Future. *The Clearing House: A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas*, 83(2), 39–43. <https://doi.org/10.1080/00098650903505415>

Blum, W. (2015). The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education. *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, 73–96. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3>

Bock, W., Bracke, M., Kreckler, J., Bock, W., Bracke, M., Kreckler, J., Ninth, C., Bock, W., Bracke, M., & Kreckler, J. (2016). *Taxonomy of modelling tasks*  
To cite this version : HAL Id : hal-01287249.

Brundiers, K., & Wiek, A. (2013). Do we teach what we preach? An international comparison of problem- and project-based learning

- courses in sustainability. *Sustainability (Switzerland)*, 5(4), 1725–1746. <https://doi.org/10.3390/su5041725>
- Burkhardt, H. (2017). Ways to teach modelling—a 50 year study. *ZDM - Mathematics Education*, 50(1–2), 61–75. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0899-8>
- English, L. D., & Watson, J. (2017). Modelling with authentic data in sixth grade. *ZDM - Mathematics Education*, 50(1–2), 103–115. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0896-y>
- Frejd, P., & Bergsten, C. (2018). Professional modellers' conceptions of the notion of mathematical modelling: Ideas for education. *ZDM - Mathematics Education*, 50(1–2), 117–127. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0928-2>
- GAIMME\_en\_español 2020(0).pdf*. (n.d.).
- Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). *Teaching and Learning Mathematical Modelling: Approaches and Developments from German Speaking Countries*. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9_1)
- Kaiser, G., Blomhøj, M., & Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 82–85. <https://doi.org/10.1007/BF02655882>
- Krajcik, Joseph S. and Blumenfeld, P. C. (2005). *PBL\_Article.pdf* (pp. 317–334). <https://doi.org/10.1017/CBO9780511816833.020>
- Lu, X., & Kaiser, G. (2021). Creativity in students' modelling competencies: conceptualisation and measurement. *Educational Studies in Mathematics*.

<https://doi.org/10.1007/s10649-021-10055-y>

Morales, P. T., & García, J. M. S. (2018). Project-based learning: A university experience. *Profesorado*, 22(2), 471–491.

<https://doi.org/10.30827/PROFESORADO.V22I2.7733>

Pochulu, M. (2018). *La Modelización en Matemática : marco de referencia y aplicaciones*.

Quintana Arias, R. F. (2016). La educación ambiental y su importancia en la relación sustentable: Hombre-Naturaleza-Territorio. *Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales, Niñez y Juventud*.

Rodriguez, M. E. (2011). La matemática y su relación con las ciencias como recurso pedagógico. *Números, Revista de didáctica de las matemáticas*.

Rodríguez-Sandoval, E., Vargas-Solano, E., & Luna Cortés, J. (2010). Evaluación de la estrategia "aprendizaje basado en proyectos". *Educación y Educadores*, 13-25.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática*(Traducido por Paola Valero). Bogota: Una empresa docente, Universidad de los andes.

Skovsmose, O. (2005). *Travelling through Education: Uncertainty, Mathematics, Responsibility* Rotterdam: Sense Publishers.

Skovsmose, O. (2012). Unpacking the societal in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 44(6), 775-786.

- Valero, P. (2015). Lo político en la educación matemática: de la educación matemática crítica a la política cultural de la educación matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*.
- STEWART, J., REDLIN, L., & WATSON, S. (2010). Precálculo. *Matemáticas para el cálculo*. Cengage Learning Editores, SA.
- Thomas, J. W. (2000). A Review of Research on Project-Based Learning. San Rafael, CA: Autodesk Foundation.
- Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International statistical review*, 67(3), 223-248.