Programa de Doctorado en Educación Matemática

MODELO DIDÁCTICO PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIADO POR LA MODELACIÓN GEOMÉTRICA

Tesis presentada como requisito para optar al título de Doctorado en

Educación Matemática

Luz Marina Fonseca Vizcaya

Bogotá D.C.

2023

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Doctorado en Educación Matemática

MODELO DIDÁCTICO PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIADO POR LA MODELACIÓN GEOMÉTRICA

Tesis presentada como requisito para optar al título de Doctorado en

Educación Matemática

Autora: Luz Marina Fonseca Vizcaya

Director de tesis:

Dr. Osvaldo Jesús Rojas Velázquez

Bogotá D.C.

2023

Nota de aceptación:

____

Firma del presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá D.C. octubre de 2023

AGRADECIMIENTOS

Se expresa agradecimiento a:

- El doctor Osvaldo Jesús Rojas Velázquez por su apoyo incondicional, dedicación y esmero en la asesoría de esta investigación.
- A la doctora Mary Falk de Lozada, por sus contribuciones y asesoría para la construcción del aporte teórico de este proyecto.
- A los doctores Gerardo Chacón y Rafael Sánchez Lamoneda por la formación impartida y sus valiosos aportes como jurados de esta tesis y a la doctora Diana Carolina Perez por sus aportes en la formulación de este proyecto en cada uno de los talleres de tesis.
- A los directivos, padres y estudiantes de la I.E.D Nuestra Señora de la Salud de Supatá quienes permitieron el desarrollo exitoso de esta investigación.
- A los compañeros, amigos y demás personas que apoyaron incondicionalmente este proyecto investigativo.

DEDICATORIA

A Jehová quien puso todas las emociones a mi favor para que cada una de ellas hiciera en mí de una persona perseverante y luchadora, el que guía mi andar y mi sabiduría, el que hacer florecer el gusto por el aprendizaje y pone en mi camino las personas adecuadas para conseguir sueños.

A mis hijas Gabriela y Emily que son la luz de mi vida, las que me dan todo su amor y paciencia, las que me despiertan el amor infinito por alcanzar metas y que con su corazón valiente apoyan cada uno de mis logros.

A mi esposo Pablo por su acompañamiento constante, por la motivación y apoyo incondicional en cada una de mis metas alcanzadas.

SÍNTESIS

El desarrollo del pensamiento matemático mediante un robusto proceso de enseñanza y aprendizaje permite alcances cognitivos significativos en los estudiantes de básica secundaria. Este proceso favorece la adquisición de habilidades y capacidades fundamentales para estudiar, comprender y usar conceptos matemáticos, establecer conexiones y relaciones entre ellos para avanzar en la resolución de problemas de manera sistemática. También contribuye a la construcción de argumentos para validar y representar objetos de manera abstracta, beneficia la comunicación de ideas matemáticas y estimula la creatividad. Por su parte, un robusto pensamiento matemático impacta de carácter relevante en la toma de decisiones diarias, el éxito académico y profesional, donde se comprende mejor el mundo que nos rodea y nos enfrentamos a desafíos matemáticos complejos.

La presente investigación propone un modelo didáctico para el desarrollo del pensamiento matemático a través de la resolución de problemas y la modelación geométrica en estudiantes del grado octavo de un aula regular de la institución Nuestra Señora de la Salud del departamento de Cundinamarca. Esta propuesta asume el desarrollo de habilidades en el proceso cognitivo y metacognitivo por medio de un sistema de actividades que contempla cinco subprocesos: abordaje del contenido matemático, visualización matemática, resolución de problemas, modelación geométrica y el *Sense Making*. En la metodología se asume un enfoque cualitativo y con un diseño de investigación acción.

En los resultados obtenidos se evidencia un alcance significativo en el desarrollo de habilidades cognitivas, la construcción de conceptos matemáticos, la capacidad para aplicarlos a contextos reales y la construcción de argumentos sólidos por medio de la resolución de problemas, donde los estudiantes hacen uso del modelado geométrico y la visualización para dar sentido y significado a las matemáticas.

ABSTRACT

The development of mathematical thinking through a robust teaching and learning process allows for significant cognitive achievements in high school students. This process favors the acquisition of fundamental skills and abilities to understand, study and use mathematical concepts, establish connections and relationships between them to advance in problem solving in a systematic way. It also contributes to the construction of arguments to validate and represent objects abstractly, benefits the communication of mathematical ideas and stimulates creativity. In turn, robust mathematical thinking has a significant impact on daily decision making, academic and professional success, where the world around us is better understood and we face complex mathematical challenges.

This research proposes a didactic model for the development of mathematical thinking through problem solving and geometric modeling in eighth grade students of a regular classroom of the Nuestra Señora de la Salud school in the department of Cundinamarca. This proposal assumes the development of skills in the cognitive and metacognitive process through a system of activities that includes five sub-processes: approaching mathematical content, mathematical visualization, problem solving, geometric modeling and Sense Making. The methodology assumes a qualitative approach and an action research design.

The results obtained show a significant scope in the development of cognitive skills, the construction of mathematical concepts, the ability to apply them to real contexts and the construction of solid arguments through problem solving, where students make use of geometric modeling and visualization to make sense and meaning of mathematics.

TABLA DE CONTENIDOS **PÁG.**

INTRODUCCIÓN 11

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE 19

1.1. El proceso enseñanza y aprendizaje de la matemática, en particular la resolución de problemas a través de la modelación geométrica en la escuela secundaria en congresos y reuniones. 19

1.2. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática a través de la resolución de problemas en la escuela básica secundaria 21

1.2.1. Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research 21

1.2.2. La resolución de problemas no rutinarios en el aula de primaria y secundaria. Un estudio con profesores 22

1.2.3. Resolución de problemas como estrategia en el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de secundaria 23

1.2.4. Improvement of Mathematical Problem-Solving Ability of High School Students through Problem Based Learning 24

1.3.Investigaciones sobre el proceso enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas a través de la modelación matemática en la escuela secundaria 25

1.3.1. Developing the roots of modelling conceptions: 'Mathematical modelling is the life of the world' 25

1.3.2. Teaching of Mathematical Modeling Elements in the Mathematics Course of the Secondary School 26

1.3.3. Towards Integration of Modelling in Secondary Mathematics Teaching 27

1.3.4 Learning mathematics through mathematical modeling approach using Jembatan Musi 2 context 27

1.3.4. Upper secondary school students' difficulties with mathematical modelling 28

1.3.5. Fostering Students' Construction of Meaningfulness of Mathematics with Mathematical Modelling Problems 29

1.3.6. Metacognitive strategies in group work in mathematical modelling activities–The students' perspective 30

1.3.7. Mathematical modelling with a solution plan: An intervention study about the development of grade 9 students' modelling competencies 31

1.3.13. Mathematical Modelling and Applications in Education 31

1.3.14. Creativity in students' modelling competencies: conceptualization and measurement 32

1.3.14. Development in Mathematical Modeling. In Exploring Mathematical Modeling with Young Learners ... 33

1.3.15. Mathematical modelling and discrete mathematics: opportunities for modern mathematics teaching .. 34

1.4. Investigaciones sobre el proceso enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas a través de la modelación geométrica (MGA) en la escuela secundaria 35

1.4.1. Mathematics through the 5E Instructional Model and Mathematical Modelling: The Geometrical Objects 35

1.4.2. Geometric modelling inspired by Da Vinci: Shaping and adding movement using technology and physical resources 36

1.4.3. Mathematical modelling with digital tools—a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software 37

1.4.4. Geometric Modeling of Mesospace Objects: A Task, its Didactical Variables, and the Mathematics at Stake 38

1.4.5. Geometric Modeling Tasks and Opportunity to Learn Geometry: The Ranking Triangles Task Revisited 39

1.4.6. Doing Math Modelling Outdoors- A Special Math Class Activity designed with MathCityMap 39

1.4.7. Measuring and investigating strategic knowledge about drawing to solve geometry modelling problems 40

1.4.8. How to analyze the students' mathematization competencies in solving geometrical problems? 41

1.4.9. Experience of teaching geometric modeling at schools and universities 42

1.4.9 Geometric Modeling: Determining the Largest Lake 43

1.4.10. Students' modelling processes when working with math trails 44

1.5. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas a través de la modelación matemática y geométrica en la escuela secundaria en Colombia 45

1.5.1. Desarrollo de la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumen a través de la implementación de la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje. 45

1.5.2. Art and Geometry of Plants: Experience in Mathematical Modelling... 46

Conclusiones del capítulo 1 46

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO 48

2.1. Fundamentos filosóficos, psicológicos y didácticos 48

2.5. Fundamentos de la visualización Matemática 50

2.2. Referentes sobre la teoría de la resolución de problemas. Problemas retadores 53

2.3. Fundamentos sobre la modelación matemática y modelación geométrica 55

2.3.1 Referentes de la modelación matemática 56

2.3.2. Elementos teóricos de la modelación geométrica 57

2.4. Fundamentos del Pensamiento Matemático en el contexto de la resolución de problemas 62

2.6. Referentes teóricos sobre el Sense Making 64

2.7. Fundamento de los contenidos matemáticos 66

Conclusiones del capítulo 2 69

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN 71

3.1. Tipo o enfoque de investigación 71

3.2. Alcance del estudio 72

3.3. Población y muestra (Unidad de análisis) ... 73
3.4. Métodos teóricos, empíricos y técnicas e instrumentos utilizados ... 73
3.5. Fases de la investigación ... 75
Conclusiones del capítulo 3 ... 76
CAPÍTULO 4. MODELO DIDÁCTICO PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS RETADORES MEDIADO POR LA MODELACIÓN GEOMÉTRICA ... 77
4.1. Referentes sobre modelo didáctico ... 77
4.2. Modelo didáctico ... 77
Conclusiones del capítulo 4 ... 96
CAPÍTULO 5. SISTEMA DE ACTIVIDADES PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS RETADORES MEDIADA POR LA MODELACIÓN GEOMÉTRICA ... 98
5.1. Sistema de actividades para la resolución de problemas retadores basado en el procedimiento de la modelación geométrica. ... 98
5.1.1. Actividad 1: La brigada de vacunación ... 99
5.1.2. Actividad 2: Segundo día de brigada ... 102
5.1.3. Actividad 3: Triangulando Ando ... 105
5.1.4. Actividad 4. Protegiendo los museos de la capital ... 108
5.1.5. Actividad 5: Cuidando mi zona en la cancha ... 111
5.1.6. Actividad 6: El tanque de agua y los bebederos ... 114
5.1.7. Actividad 7: La distancia más corta ... 117
5.1.8. Actividad 8. Dos alfombras triangulares ... 119
Conclusiones del capítulo ... 122
CAPÍTULO 6. ANÁLISIS DE RESULTADOS ... 124
6.1. Resultados a entrevista de expertos ... 124
6.2. Resultados de encuesta a docentes de matemáticas ... 127
6.3. Validación del modelo didáctico y del sistema de actividades ... 130
6.4. Resultados del estudio exploratorio ... 136
6.5 Resultados de la implementación del sistema de actividades ... 138
6.5.1. Resultados actividad 1. La brigada de vacunación ... 138
6.5.2. Resultados actividad 2. El segundo día de brigada ... 142
6.5.3. Resultados actividad 3. Triangulando Ando ... 146

6.5.4. Resultados actividad 4. Protegiendo los museos de la capital 150
6.5.5. Resultados actividad 5. Cuidando mi zona en la cancha 154
6.5.6. Resultados actividad 6. El tanque de agua y los bebederos 158
6.5.7. Resultados actividad 7. La distancia más corta 162
6.5.8. Resultados actividad 8. Dos alfombras triangulares 166
Conclusiones del capítulo 6 170
CONCLUSIONES 173
RECOMENDACIONES 182
BIBLIOGRAFÍA 183
ANEXOS 192

INTRODUCCIÓN

Desarrollar el pensamiento matemático es fundamental para el avance del ser humano, pues influye de manera significativa en el progreso individual y de las sociedades. Por tanto, el conocimiento de las matemáticas juega un papel revelador en la formación integral del individuo, propiciando espacios de razonamiento y practicidad en la vida. Es necesario que los estudiantes posean un dominio sobre el contenido matemático y la escuela debe ser garante de una adecuada enseñanza y aprendizaje, que les permita desarrollar todas sus habilidades y potenciales, encontrando el gusto por el saber y su aplicación en variados contextos cotidianos.

El abordaje en la escuela de situaciones problema centradas en el mundo real es un procedimiento vital para la proximidad al conocimiento matemático y una oportunidad para poner en práctica todo lo aprendido. Uno de los procesos que dinamiza este abordaje es la resolución de problemas, en particular aquellos que se denominan retadores, apoyados indudablemente por la modelación. A medida que los estudiantes resuelven problemas de este tipo, van perfeccionando la capacidad de comunicarse matemáticamente, alcanzando métodos de pensamiento a un nivel superior.

Existe una conexión esencial entre la resolución de problemas, la aplicabilidad y la modelación. El modelado apunta a relacionar el mundo real y las matemáticas, desarrollando en los estudiantes potencialidades en su pensamiento. Por otro lado, si se propician espacios en el aula para modelar, se les concede a los estudiantes desarrollar destrezas de predicción, explicación y de dar solución a situaciones en un contexto auténtico y natural.

Las tendencias actuales de investigación en educación matemática vinculan la resolución de problemas y la modelación en todos los niveles educativos (Sriraman y English, 2010). Estas temáticas se ven reflejadas en diferentes congresos y reuniones: Congreso Internacional de Educación Matemática

(ICME), en el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), en las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa (RELME), Conferencia Iberoamericana de Educación Matemática (CIAEM), Congreso interamericano de educación matemática (CIBEM) y la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), entre otros. En estas reuniones se presentan ponencias, cursos y conferencias, que reflejan los avances y oportunidades de mejoras en la resolución de problemas a través de la modelación geométrica (MGA) en la escuela.

En los ICME se discute sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la resolución de problemas, la modelación y la visualización matemática, en varios Topic Study Group (TSG) en sus últimas cuatro ediciones[1]. En el ICME 2008 en los TSG 19, 20, y 11, en el 2012, en los TSG 15, 16, 17 y 8. Además, en el ICME 2016, en los TSG 19, 20, 21 y 11 y el ICME 2021 en los TSG 7, 9, 17, 22 y 23.

Este análisis muestra la importancia que ha tenido la enseñanza y aprendizaje de la geometría a través de la resolución de problemas, la vinculación de la modelación y la visualización matemática, para el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes.

En la RELME, en su histórico de los últimos tres años, expuestos en el Alme 31 al 35 se trabaja el reconocimiento de problemas en contextos, la visualización geométrica en la educación, la modelación y la enseñanza aprendizaje de la geometría. Las mismas temáticas son objeto de estudio en el CERME en los tres últimos eventos, en sus diversos Thematic Working Group (TGW), en el año 2015, 2017 y en el 2019 en los TGW 4 (Enseñanza de la geometría y el modelado) y 24 (Enseñanza y aprendizaje que involucra la visualización y la resolución de problemas).

Por su parte, en la CIAEM 2015 se evidencian estudios sobre la creación de problemas retadores, favoreciendo el desarrollo del pensamiento matemático, a través de situaciones significativas en

[1] En este orden que se presenta los TSG, se hace referencia en cada uno de los ICME.

contextos diversos e interdisciplinariedad. En la CIAEM 2019 se presentan estudios relacionados con la enseñanza de la geometría, la resolución de problemas y la modelación en la educación matemática.

En los temas abordados en los eventos realizados por la SEIEM desde el 2016 hasta el 2019, se encuentran trabajos investigativos relevantes en temáticas sobre problemas geométricos y matemáticos auténticos, no rutinarios, apoyados por modelación y la visualización. Por otra parte, las mismas temáticas se abordan en el CIBEM 2013 y 2017 y en la PME 2018 y 2019.

En los estudios realizados por el ICMI 2015, se enfatiza en los temas 4 y 5 (experiencias didácticas en la resolución de problemas). Además, en el 2018 se relacionan con los temas 1 (la visualización y el razonamiento en torno a la geometría y el modelado matemático en contexto de la escuela secundaria) y 3 (desarrollo de la visualización geométrica y diseños para la práctica sobre resolución de problemas).

Por otra parte, varias son las investigaciones sobre la MGA, las cuales, dirigen ciertas tendencias en el trabajo de aula. Entre ellas:

- Desarrollo de competencias del modelado geométrico (MGO) en los estudiantes de secundaria, para el aprendizaje de las matemáticas abordando problemas de contexto (Sol, Giménez, & Rosich, 2011; Blomhøj, 2019; Riyanto & Putri, 2019; entre otros).
- Análisis y potencialización de habilidades en la resolución de problemas reales por medio de la MGA (Lesh, & Harel, 2003; Mousoulides, Christou, & Sriraman, 2008); Tezer & Cumhur, 2017; Krutikhina, Vlasova, Galushkin, & Pavlushin, 2018; Herbst & Boileau, 2018, entre otros).
- Identificación de cómo los recursos físicos y digitales aportan al MGO para el desarrollo del pensamiento matemático, a través de la resolución de problemas reales (Lieban & Lavicza, 2017).

Por otra parte, para el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2017) la calidad educativa es aquella que "[…] *propone y alcanza fines pertinentes para las personas y las comunidades en una sociedad en* *continuo progreso y que la hace competitiva en el contexto mundial"*[2]. En este sentido, la educación matemática debe aportar a la construcción de un conocimiento que le permita a todo ciudadano desempeñarse en la vida social, a través del desarrollo de competencias matemáticas de alto nivel.

Por ende, Colombia participa en pruebas internacionales con el ánimo de conocer alcances y fortalezas que propenden a la calidad educativa en el país, teniendo como insumo los resultados de los estudiantes. En estos procesos se evidencian las competencias, habilidades y conocimientos, que poseen los jóvenes para la resolución de problemas, el uso de la información y la manera en que se enfrentan a situaciones que marcarán su adultez.

En los informes de las pruebas PISA[3] aplicada a estudiantes de 15 años de las diferentes instituciones educativas de Colombia, se puede verificar que los resultados en matemáticas en el país son inferiores a la media de los países participantes pertenecientes a la OCDE[4]. En este análisis, un porcentaje mínimo de estudiantes pueden modelar situaciones y buscar estrategias para solucionar problemas que incluyen todos los pensamientos y sistemas.

Resultados similares se muestran en las SABER[5]. Esta situación está dada, entre otras cosas, a las escasas habilidades que poseen los estudiantes, para hacer uso de la modelación durante el proceso de resolución de problemas (Edo, Putri & Hartono, 2013; Villa & López, 2011) y el limitado dominio de los conocimientos previos.

Para contribuir a la mejora del desempeño de los estudiantes en estos establecimientos educativos, se debe generar un cambio significativo en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Este

[2] Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2017). Plan Nacional decenal de educación 2019-2026.Colombia. p.25.

[3] El informe del programa internacional para la Evaluación de estudiantes evalúa el desarrollo de las habilidades y conocimientos de los estudiantes de 15 años a través de tres pruebas principales: lectura, matemáticas y ciencias.

[4] La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos, contribuye al diseño de mejores políticas que favorezcan la igualdad, prosperidad y bienestar de las personas. Elabora y aplica pruebas estandarizadas en educación.

[5] Pruebas estandarizadas aplicadas a los establecimientos Educativos en Colombia, para contribuir al mejoramiento de la calidad.

trabajo, debe impactar positivamente el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, generando caminos asertivos en la resolución de problemas retadores.

En aras de lograr óptimos aprendizajes y mejores habilidades, se hace necesario que los estudiantes muestren dominio en la resolución de problemas, apoyados en el proceso de la modelación geométrica. Por tanto, se requiere de "[…]*una metodología que integre los dos procesos en toda actividad matemática"*[6]. Esta integración permite el desarrollo oportuno y adecuado del saber matemático, donde se fortalece el aprendizaje y el interés por el conocimiento en los estudiantes.

Por otro lado, a través de la aplicación de métodos empíricos e instrumentos como encuestas a docentes (ver Anexo 1) con formación en el área, la cual fue validada por medio del método Delphi (ver Anexo 2), entrevistas a expertos (ver anexo 3), la revisión de la literatura y la experiencia de la investigadora, se constatan ciertas oportunidades de mejoras para la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas retadores en grado octavo. Estas están dadas en:

- Reconocimiento de variables y las relaciones entre ellas en los estudiantes (Sol, Giménez & Rosich ,2011).
- Estrategias de abordaje para el análisis y la justificación en la resolución de problemas en los estudiantes y el desarrollo de habilidades para la comprensión y contextualización de un problema en los estudiantes (Socas, Hernández & Palarea, 2014).
- Recursos para explicar las relaciones entre objetos reales y las matemáticas para fortalecer habilidades para explorar un problema social y abordarlo matemáticamente (Edo, Putri & Hartono, 2013; Kadijevich, 2009).

[6] Rico, L. (2007). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación.* España. p. 279.

Las valoraciones anteriores y el estudio epistemológico inicial realizado permiten determinar el siguiente **problema de investigación**: ¿Cómo integrar la modelación geométrica en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas para el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes de grado octavo?

Se precisa como **objeto de estudio** el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en la secundaria. Se infiere como **objetivo general** construir un modelo didáctico que tiene como eje dinamizador la modelación geométrica en la resolución de problemas, para el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes del grado octavo de la institución Nuestra Señora de la Salud del municipio de Supatá, Cundinamarca. Además, se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Caracterizar el desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas a través de la modelación geométrica.
- Construir una propuesta teórica y práctica que aporte al desarrollo del pensamiento matemático a través de la resolución de problemas retadores.
- Validar el alcance de la propuesta teórica y práctica para el desarrollo del pensamiento matemático.

Acorde con el objetivo, el **campo de acción** se enmarca en el proceso enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas a través de la modelación geométrica en grado octavo de la escuela secundaria.

Como guía para el cumplimiento del objetivo y la solución del problema, se presentan las siguientes **preguntas científicas**:

1. ¿Cómo potenciar las habilidades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas retadores en contextos, a través de la modelación geométrica para el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de secundaria?
2. ¿Cómo tributan los fundamentos y referentes teóricos al proceso de enseñanza y aprendizaje

mediado por problemas retadores a través de la modelación geométrica en estudiantes del octavo grado?

3. ¿Cómo un modelo didáctico aporta al proceso de enseñanza y aprendizaje de problemas retadores a través de la modelación geométrica para que contribuya al desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes del octavo grado?
4. ¿De qué forma un sistema de actividades sustentadas en un modelo didáctico favorece el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes del octavo grado?

Con el ánimo de dar cumplimiento al objetivo y lograr resolver el problema planteado, así como para guiar el curso de la tesis fueron propuestas las siguientes **tareas de investigación**:

1. Elaborar el estado del arte sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, específicamente sobre la resolución de problemas a través de la MGA para el desarrollo del pensamiento matemático en grado octavo de la escuela secundaria.
2. Determinar los fundamentos teóricos sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas a través de la MGA para el desarrollo del pensamiento matemático en grado octavo de la escuela secundaria.
3. Elaborar un modelo didáctico para la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas retadores, a través de MGA para el desarrollo del pensamiento matemático en grado octavo de la escuela secundaria.
4. Elaborar un sistema de actividades para favorecer el proceso enseñanza aprendizaje de la resolución de problemas retadores, a través de la MGA en grado octavo de la escuela secundaria.

5. Validar el modelo didáctico y el sistema de actividades para la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas retadores a través de la MGA para el desarrollo del pensamiento matemático en grado octavo de la escuela secundaria.

El **aporte práctico** radica en un sistema de actividades dirigido a fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas retadores, a través de la MGA para desarrollar el pensamiento matemático en estudiantes del grado octavo de básica secundaria, de la institución Nuestra Señora de la Salud en Supatá Cundinamarca.

El **aporte teórico** consiste en un modelo didáctico, basado en el proceso de la MGA como elemento dinamizador y el sistema de relaciones que se establecen entre sus categorías para favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas retadores orientado al fortalecimiento del pensamiento matemático en los estudiantes de básica secundaria.

La tesis consta de introducción, cinco capítulos, conclusiones, recomendaciones y 6 anexos. En el capítulo uno se presenta el estado del arte. En el segundo capítulo se expone el marco teórico, el cual está instituido en fundamentos y referentes. En el tercer capítulo se presentan los aspectos metodológicos del presente estudio. En el capítulo cuarto se especifican los aportes teórico y práctico de la presente tesis. En el capítulo quinto se muestran los resultados obtenidos del proceso investigativo.

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

En este apartado se exponen investigaciones relacionadas con la resolución de problemas y el uso de la modelación en la secundaria. Se estudian diferentes eventos internacionales de educación matemática, el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática a través de la resolución de problemas, la modelación matemática, la MGA en la escuela secundaria de manera internacional y nacional.

1.1. El proceso enseñanza y aprendizaje de la matemática, en particular la resolución de problemas a través de la modelación geométrica en la escuela secundaria en congresos y reuniones.

Este espacio está dirigido a resaltar la temática investigada en congresos y reuniones a nivel mundial, de alta trayectoria en la educación matemática, que tienen relación con la MGA y la resolución de problemas en la secundaria. Se hace una revisión histórica y se presentan de manera general las temáticas.

En el ICME 14 (2021) el TSG 9 y 23 tiene como eje el análisis de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en secundaria, vinculación del modelado y la resolución de problemas, y el TSG 17 se centra en el planteamiento y la resolución de problemas, como clave para el desarrollo del pensamiento matemático. En el TSG 23 se abordan temas fundamentales de visualización en los procesos educativos.

En el PME en los dos últimos eventos se destacan avances investigativos relacionados con la geometría, la modelación y la resolución de problemas. En el acta de la conferencia realizada (2019) se asumen temas sobre el pensamiento geométrico y la resolución de problemas matemáticos. Así como, el acercamiento y la revisión de modelos visuales en el nivel básico. En el (2018) se evidencian estudios basados principalmente en competencias para describir el pensamiento geométrico (razonamiento figurativo, operacional y visual). Además, se llevan a cabo contribuciones en el conocimiento geométrico inicial, visualización y la resolución de problemas matemáticos.

También, en la RELME (2018 – 2023) cuyos trabajos se evidencian en las Actas Latinoamericanas de Matemáticas Educativas (ALME), se puede constatar escritos sobre las temáticas abordadas en esta investigación. En el ALME 31 (2018) en la sección 1 se revisan propuestas para la enseñanza de las matemáticas bajo la resolución de problemas como estrategia de aprendizaje integral. En la sección 2 se lleva a cabo el reconocimiento de problemas en contextos, la visualización geométrica en la educación elemental y la modelación matemática. En el ALME 34 (2020) y en el ALME 35 (2022) se abordan los campos de pensamiento geométrico, la resolución de problemas, la visualización para la enseñanza y aprendizaje de la matemática en la escuela secundaria. También, se exponen estudios relacionados con modelación matemática y geométrica.

En el CERME 11 (2019) en el TGW 4 y 24 se abordan los procesos investigativos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la geometría en temas como: el modelado, la visualización, el lenguaje, argumentación, creatividad, la resolución de problemas en la educación matemática, la enseñanza y aprendizajes de las matemáticas.

En el estudio ICMI 24 (2018) en el tema 1 y 3 se examinan investigaciones sobre herramientas y representaciones, se analizan estudios del diseño de tareas para fomentar la visualización, el modelado matemático en contexto de la escuela secundaria y la práctica de tareas sobre la resolución de problemas.

En el CIAEM (2015, 2019 y 2023) se exponen reflexiones y experiencias didácticas acerca de la creación de problemas como parte de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y la resolución de problemas creados de forma grupal e individual para potenciar los procesos educativos. Además, se propicia el desarrollo del pensamiento matemático y la capacidad de creación.

Se hace una revisión y estudio de las actas de la SEIEM XXII (2018) contiene estudios investigativos sobre modelación matemática en el proceso de resolución de problemas en contexto geométrico y el uso de la visualización. En el SEIEM XXVI (2019) se abordan investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la modelación matemática, la resolución de problemas no rutinarios en diferentes niveles educativos, la resolución de problemas auténticos y geométricos.

En las actas del CIBEM (2017) se muestran estudios en los que se valoran las prácticas relacionadas con las propiedades geométricas, la modelación en la resolución de problemas por medio de software educativos, el desarrollo de competencias matemáticas y de visualización.

Este análisis muestra los avances investigativos en la resolución de problemas a través de la MGA y de las categorías relacionadas, en los congresos y reuniones, lo cual evidencia la pertinencia y actualidad de la temática.

1.2. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática a través de la resolución de problemas en la escuela básica secundaria

En este apartado se presentan trabajos investigativos que tienen relación con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática mediada por la resolución de problemas en la escuela secundaria.

1.2.1. Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research[7]

La resolución de problemas es un proceso fundamental para el fortalecimiento de habilidades matemáticas, esta investigación lo asume en el aula como el vértice principal en el proceso de enseñanza y aprendizaje de estas. El trabajo realizado por los autores Lester & Cai (2016) ofrece aportes interesantes, por su parte, afirman que existe un consenso dentro de la comunidad matemática, en que, el desarrollo de las habilidades en la resolución de problemas de los estudiantes debe ser siempre un objetivo fundamental en el trabajo de los maestros. Asimismo, los autores consideran que, si se quieren

[7] Lester, F., & Cai, J. (2016). Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. *Posing and solving mathematical problems*, 117-135.

estudiantes exitosos solucionadores de problemas, se debe ubicar la resolución de problemas en el aula como parte integral del aprendizaje de las matemáticas.

Este análisis de los investigadores muestra que el ambiente de aprendizaje por medio de la resolución de problemas contribuye a que los estudiantes presenten diversas soluciones. Esto sirve para la construcción de conocimiento compartido, ayudando a aclarar sus ideas y así lograr diferentes perspectivas de lo que están aprendiendo. En esta medida, la resolución de problemas es un eje dinamizador en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Además, Lester & Cai (2016) declaran que los maestros deben ser estratégicos en la selección apropiada de tareas, para maximizar las oportunidades de aprendizaje, esto se da con la inclusión de la resolución de problemas dentro del currículo de matemáticas. Adicionalmente, los maestros deben involucrar estrategias de solución múltiple a un problema dado, así como participar en la exposición de problemas, la exploración matemática y dirigiendo todo el proceso a la consecución de generalizaciones.

1.2.2. La resolución de problemas no rutinarios en el aula de primaria y secundaria. Un estudio con profesores[8]

El estudio realizado con profesores de la educación básica muestra la importancia de llevar al aula un trabajo estructurado y basado en la resolución de problemas bajo una planificación minuciosa. Por ende, brinda la oportunidad al presente trabajo investigativo a que, planifique e implemente el sistema de actividades para obtener avances relevantes en los aprendizajes de los estudiantes a través de guiones didácticos que medien el proceso de enseñanza y aprendizaje.

El estudio de García, García & Camacho (2019) revela que los docentes respaldan el enfoque de la enseñanza matemática por medio de la resolución de problemas (RP), sin considerar la enseñanza

[8] García, I., García, A., & Camacho, M. (2019). La resolución de problemas no rutinarios en el aula de Primaria y Secundaria. Un estudio con profesores.

matemática con exclusividad para resolver problemas. A la vez, los docentes de la secundaria sostienen que su metodología en la práctica educativa va dirigida a la RP, pero es fundamental que el profesorado realice un proceso razonado y estructurado en el aula sobre la resolución de problemas matemáticos no rutinarios (RPMNR).

García et al. (2019) manifiestan que los docentes activos suelen no estudiar con anterioridad las respuestas de los problemas que llevan a clase, mientras para los docentes que se encuentran en formación revisan por anticipado los problemas, porque los hace sentir más seguros en la clase y buscan explorar la situación problémica para sacar lo mejor de la actividad al trabajar con los estudiantes.

1.2.3. Resolución de problemas como estrategia en el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de secundaria[9]

El desarrollo de competencias matemáticas juega un papel relevante en el desarrollo del pensamiento, la investigación realizada por Paye (2019) evidencian avances importantes y emotiva a esta tesis a reconocer la importancia de aplicar estrategias heurísticas y fases en el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas, de tal manera que favorezca la construcción del saber matemático.

En este sentido, Paye (2019) basa su implementación en la parte teórica y conceptual de Pólya (1961) y Schoenfeld (1985) sobre la resolución de problemas. En ella, el estudiante desarrolla habilidades de reflexión, ejecución de pasos y comprobación, que incide de manera directa en el alcance de sus competencias, capacidades y desempeños académicos. Por consiguiente, se encuentra un progreso significativo en la resolución de problemas, se comprueba una efectividad relevante en la aplicación del método de Pólya. En esta dirección, la implementación de estrategias de resolución de problemas como

[9] Paye, C. (2019). Resolución de problemas como estrategia en el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de secundaria. *Revista de Investigaciones de la Escuela de Posgrado* de *la UNA PUNO*, 8(2), 1028-1036.

un medio en el aula, favorece al desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes. También, se evidencia que es adecuado llevar al aula de clase el trabajo en pequeños grupos.

1.2.4. Improvement of Mathematical Problem-Solving Ability of High School Students through Problem Based Learning[10]

La presente investigación identifica la importancia de llevar a cabo procesos cognitivos en el aula que fomenten el desarrollo de competencias matemáticas resolutoras bajo estrategias significativas que despierten interés y la creatividad de los estudiantes. Al respecto, los autores de este articulo Elmiwati et al. (2020) sostienen que fortalecer habilidades en los estudiantes para resolver problemas matemáticos debe ser una la tarea central en la escuela porque brinda oportunidades a los estudiantes para mejorar los niveles de desempeño en las matemáticas.

Dentro de sus hallazgos investigativos Elmiwati et al. (2020) encuentran que el aprendizaje de las matemáticas se limita a proveer de insumos al estudiante, para que éste pueda resolver preguntas en determinados exámenes. Por consiguiente, aprender matemáticas viene basándose en la memorización de problemas de muestra o aprendiendo preguntas ya resueltas, por ende, el aprendizaje está apartado de la experiencia diaria y del mundo real, haciendo que los estudiantes presenten dificultades para abordar y resolver problemas que son no rutinarios.

Elmiwati et al. (2020) consideran que el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) dirige a los escolares a pensar y a resolver problemas en su entorno. Conjuntamente, desarrolla habilidades de pensamiento y habilidades intelectuales, también aprenden roles y llegan a convertirse en aprendices independientes que trabajan en la construcción de saberes de manera espontánea, innovadora y de calidad.

---

[10] Elmiwati, E., Kartini, K. & Zulkarnain, Z. (2020). Improvement of mathematical problem-solving ability of high school students through problem-based learning. *Journal of Educational Sciences, 4(3), 584-593.*

Por tanto, los estudiantes que trabajan mediante el ABP obtienen mejores desempeños en su aprendizaje y la capacidad para resolver problemas mejora significativamente a diferencia de aquellos que participan de actividades tradicionales.

1.3. Investigaciones sobre el proceso enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas a través de la modelación matemática en la escuela secundaria

A continuación, se lleva a cabo el análisis de algunas investigaciones que tienen como eje principal la resolución de problemas a través de la modelación matemática.

1.3.1. Developing the roots of modelling conceptions: 'Mathematical modelling is the life of the world'[11]

En esta tesis se reconoce la importancia de vincular el modelado y la resolución de problemas en contextos auténticos en la escuela desde edades tempranas. El estudio investigativo de Brown & Stillman (2017) ratifican que la resolución de problemas permite a los estudiantes entender la importancia de las matemáticas. Esto debido a que, les ayuda a desarrollar habilidades en el proceso del modelado y ampliar la forma de entender el mundo. Por su parte, el proceso de matematización beneficia la comprensión del modelado y las habilidades de comunicación.

De igual modo, los investigadores aseguran que las tareas ricas en modelado permiten que los estudiantes participen activamente en las matemáticas. Esta participación es mayor, cuando tienen el control sobre la elección de lo que modelan en un contexto auténtico. Es allí, donde se establecen raíces para ver las matemáticas como una manera de pensar sobre la vida. A su vez, sostienen que la modelación debe ser un proceso continuo y nutrido desde edades tempranas durante toda la escolarización.

[11] Brown, J., & Stillman, G. (2017). Developing the roots of modelling conceptions: 'Mathematical modelling is the life of the world'. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(3), 353-373.

Con respecto a los estudiantes de bajo rendimiento, Brown & Stillman (2017) afirman que la modelación les permite tener un desempeño importante en la construcción de saberes matemáticos. Al mismo tiempo, los estudiantes reconocen la importancia de la modelación en la resolución de problemas y los problemas como un medio para el aprendizaje.

1.3.2. Teaching of Mathematical Modeling Elements in the Mathematics Course of the Secondary School[12]

La presente investigación reconoce la trascendencia que tiene la modelación matemática y geométrica en el proceso de enseñanza y aprendizaje, debido a que favorece el desarrollo de habilidades tanto del modelado como el abordaje y resolución de problemas. En esta medida, este artículo proporciona un sustento teórico porque permite llevar a cabo una visión sobre cómo puede ser posible abordar etapas y elementos importantes para el modelado dentro del aula de clase, y cómo acercar a los estudiantes a la solución de problemas retadores en un contexto real auténtico.

Por su parte, Krutikhina et al. (2018) identifican cuatro elementos del modelado matemático, como se muestra en la (ver Figura 1).

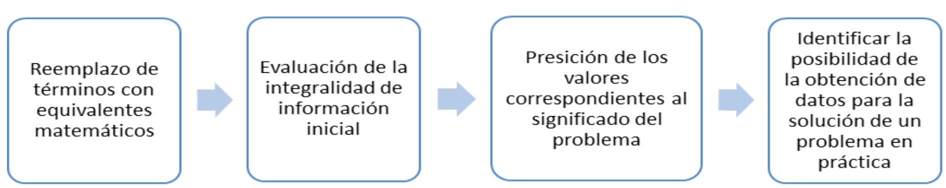


Figura 1.Elementos del modelado Krutikhina et al. (2018) p. 20

En este sentido, los autores afirman que el trabajo con modelos matemáticos presenta a los estudiantes la forma de cómo aplicar las matemáticas al contexto real. Además, consideran que es importante

[12] Krutikhina, M., Vlasova, V., Galushkin, A., & Pavlushin, A. (2018). Teaching of mathematical modeling elements in the mathematics course of the secondary school. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(4), 1305-1315.

introducir en la práctica el término "modelo matemático", las propiedades, la estructura y la construcción de estos. De tal manera que, se permita a los estudiantes una visión globalizadora de la resolución de problemas matemáticos como insumo para el desarrollo del pensamiento matemático.

1.3.3. Towards Integration of Modelling in Secondary Mathematics Teaching[13]

Esta investigación pretende abordar el modelado en la práctica educativa para contribuir a la construcción de conceptos matemáticos de los estudiantes y avanzar en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes de la secundaria. El artículo abordado expone los alcances cognitivos que se logran en los estudiantes, el autor Blomhøj (2019) familiariza a los estudiantes con una situación real, donde establecen algunas maneras de conexión, para proporcionar una raíz cognitiva y comprender todos los conceptos involucrados.

Además, Blomhøj (2019) demuestra que el modelado tributa significativamente al trabajo del docente. El cual constituye un medio didáctico, que apoya a los estudiantes en la construcción de conceptos matemáticos. Esta investigación sostiene que el modelado permite favorecer el aprendizaje de las matemáticas, por lo cual se debe integrar la modelación en los planes de estudio y en las prácticas educativas en la enseñanza y aprendizaje en el nivel secundario.

1.3.4 Learning mathematics through mathematical modeling approach using Jembatan Musi 2 context[14]

Este estudio muestra el modelado como un proceso poderoso que puede ser implementado y fortalecido en la secundaria. Conjuntamente, presenta los contextos reales como una oportunidad de aprender en la práctica bajo la resolución de problemas retadores. Todo esto ofrece una mirada a esta investigación para

---

[13] Blomhøj, M. (2019). Towards Integration of Modelling in Secondary Mathematics *Teaching. In Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education* (pp. 37-52). Springer, Cham.
[14] Riyanto, B. & Putri, R. (2019). Learning mathematics through mathematical modeling approach using jembatan musi 2 context. *In Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1315, No. 1, p. 012008).

el abordaje de ambientes de modelado relacionados con espacios reales existentes de forma significativa y motivadora para los estudiantes.

En esta dirección, Riyanto & Putri (2019) sostienen que el modelado matemático es una forma válida para preparar a los estudiantes a enfrentar situaciones desconocidas, apoyadas en maneras flexibles de pensamiento y creatividad, que favorecen la resolución de problemas del mundo real. Además, confirman que el papel del modelado desarrolla habilidades de los estudiantes para la construcción y reconstrucción de conceptos, a través del razonamiento y entornos de aprendizaje en contextos reales. De la misma manera, sostienen que reduce significativamente el nivel de ansiedad matemática en los estudiantes, teniendo una mayor efectividad que la práctica guiada.

1.3.5 Upper secondary school students' difficulties with mathematical modelling[15]

Este artículo pone en evidencia algunas dificultades que pueden darse durante el desarrollo de tareas de modelado en el aula, las cuales proporcionan aspectos importantes para analizar en esta tesis y, por otra parte, como se orienta representativamente a los estudiantes en cada uno de los ciclos del modelado. En este sentido, Jankvist & Niss (2020) afirman que para el desarrollo de tareas de modelado se requiere que los estudiantes tomen sus propias decisiones, acerca de las características y suposiciones que deben llevarse a cabo para matematizar la situación dada. Algunas tareas tienen diferentes opciones para matematizar y realizar el tratamiento matemático.

Jankvist & Niss (2020) sustentan que dentro de los obstáculos que se presentan al realizar tareas de modelado, se encuentra que algunos estudiantes *“no ven las tareas en modelos matemáticos y el modelado como "tareas matemáticas" propiamente dichas”*[16]. Esto puede deberse al discernimiento que

[15] Jankvist, U. & Niss, M. (2020). Upper secondary school students' difficulties with mathematical modelling. *International Journal of mathematical education in science and technology*, *51*(4), 467-496.
[16] Jankvist, U. & Niss, M. (2020). Upper secondary school students' difficulties with mathematical modelling. *International Journal of mathematical education in science and technology*, *51*(4). p. 477.

tienen con el contrato didáctico. Por otra parte, se les dificulta la matematización de un problema real, debido a que tienen una prematemática errada. Tampoco los estudiantes relacionan el contenido de la tarea con las condiciones que allí se establecen y no llegan a la reflexión sobre las implicaciones de la información que se les aporta en el problema dado.

1.3.6 Fostering Students' Construction of Meaningfulness of Mathematics with Mathematical Modelling Problems[17]

El artículo evidencia que el modelado aporta a los estudiantes significación sobre las matemáticas, porque da un sentido fundamental para la construcción del conocimiento. El cual, implica la resolución de problemas del mundo real haciendo uso de conceptos y técnicas que fomentan habilidades para estudiar situaciones, proponer hipótesis y valorar las soluciones dadas. Los autores de este artículo Vorhölter & Schwarz (2020) exponen la importancia de adelantar investigaciones que contemplen la modelación, dado a sus valiosos aportes en la vida escolar y cotidiana, mostrando una significancia al presente estudio.

Con relación al modelado, Vorhölter & Schwarz (2020) sustentan que tiene como finalidad mejorar la percepción de los estudiantes hacia las matemáticas estableciendo un aprendizaje revelador. Por tanto, estos investigadores, consideran trascendental desarrollar estudios que permitan favorecer la modelación en las actividades escolares que aporten a la significación de las matemáticas. De igual forma, expresan en base a los resultados, que la mayoría de los estudiantes consideran que el modelado es más relevante para sus vidas en comparación con las matemáticas a las cuales están acostumbrados a trabajar en sus clases. También, los investigadores sostienen que el uso de problemas auténticos en la enseñanza de las matemáticas tiene una influencia directa en la construcción del significado personal.

[17] Vorhölter, K., & Schwarz, B. (2020). Fostering Students' Construction of Meaningfulness of Mathematics with Mathematical Modelling Problems. In Mathematical Modelling Education and Sense-making (pp. 323-333). *Springer, Cham.*

Es importante resaltar en la investigación de Vorhölter & Schwarz (2020) que un contexto basado en la realidad en un problema de modelado presenta un respaldo directo en la construcción de saberes matemáticos. Porque en este proceso se permite fundar significado en cada uno de los estudiantes, dado que es un requisito previo para nuevos aprendizajes.

1.3.7 Metacognitive strategies in group work in mathematical modelling activities–The students' perspective[18]

La presente tesis asume la importancia del reconocimiento de estrategias metacognitivas. Puesto que, permite conocer los alcances y oportunidades de mejora de las actividades que se implementan y que se pueden ir refinando durante el proceso investigativo. Igualmente, muestra el reconocimiento de las habilidades y dificultades en el proceso del modelado de los estudiantes. En esta medida, los autores Krüger et al. (2020) sustentan, que los estudiantes por medio del modelado reconocen la importancia del trabajo cooperativo. Porque es relevante para encontrar estrategias de planificación y así acercarse a la solución del problema. En este trabajo los miembros del grupo usan el mismo enfoque y pueden discutir preguntas durante el proceso de resolución de problemas. A su vez, establecen estrategias cognitivas mejorando significativamente su nivel metacognitivo.

Krüger et al. (2020) determinan que el planteamiento de estrategias metacognitivas permite monitorear las fases en el proceso del modelado. De esta manera, los estudiantes pueden hacer suposiciones, seleccionar el modelo, dar precisión al trabajo matemático y validar la solución del problema. Por supuesto, estas estrategias metacognitivas facilitan la transferencia de un problema real a un modelo matemático, logrando un conocimiento metacognitivo sobre habilidades para la solución de tareas y así fortalecer la construcción de conocimientos.

[18] Krüger, A., Vorhölter, K., & Kaiser, G. (2020). Metacognitive strategies in group work in mathematical modelling activities– The students' perspective. In Mathematical modelling education and sense-making (pp. 311-321). *Springer, Cham*.

1.3.8 Mathematical modelling with a solution plan: An intervention study about the development of grade 9 students' modelling competencies[19]

Las fases de modelado vuelven comprensible y manejable la modelación en la resolución de problemas. Debido a qué, cada una contempla un objetivo específico, ayudando a los estudiantes a organizar la información eficientemente, a comunicar sus ideas y resultados, así como a identificar errores y posibles mejoras para el éxito en el aprendizaje. En relación, con este trabajo de investigación se adopta el ciclo simplificado que permite conocer las relaciones de la MGA y la resolución de problemas.

El presente artículo evidencia resultados tangibles. Por su parte, Beckschulte (2020) concibe la competencia de modelado matemático, como la capacidad para llevar de manera autónoma e ingeniosa cada uno de los aspectos del proceso de modelación en un determinado contexto. Este autor, discurre que el modelado es una secuencia cíclica de subprocesos. Dicha secuencia, permite el desarrollo de subcompetencias que favorecen el éxito del proceso de modelación y el desarrollo de competencias cognitivas. Sin embargo, la investigadora considera importante vincular también competencias metacognitivas que permitan monitorear las dificultades y estrategias a la hora de resolver problemas del mundo real.

Atendiendo las evidencias de la investigación Beckschulte (2020) afirma que el desarrollo de tareas de modelación usando fases o ciclos de modelado presenta un impacto significativo en las competencias de los estudiantes en el desarrollo de problemas matemáticos en situaciones reales. Igualmente, permite analizar las limitaciones que se les presenta a los estudiantes durante todo el proceso de modelado.

1.3.13. Mathematical Modelling and Applications in Education[20]

[19] Beckschulte, C. (2020). Mathematical modelling with a solution plan: An intervention study about the development of grade 9 students' modelling competencies. In Mathematical Modelling Education and Sense-making (pp. 129-138). *Springer, Cham.*
[20] Kaiser, G. (2020). Mathematical modelling and applications in education. *Encyclopedia of mathematics education*, 553-561.

La modelación matemática permite la aplicación de conceptos y metodologías para la resolución de problemas del mundo real y cuando los estudiantes se enfrentan a situaciones cotidianas aumenta su interés y motivación hacia el aprendizaje. El recorrido que hace Kaiser (2020) sobre la modelación matemática en este artículo deja ver lo importante que es actualmente llevar a la escuela tareas desafiantes, significativas y auténticas. De este modo, la presente investigación se apropia de estas concepciones para fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje por medio del modelado en tareas que se apoya en contextos reales que permite la creación de sentido y significado matemático.

Kaiser (2020) considera que hay una relevancia en la promoción de aplicaciones y modelos matemáticos en las escuelas y actualmente se han extendido a todo el mundo. Igualmente, la resolución de problemas matemáticos del mundo real es uno de los objetivos centrales en la educación matemática a nivel global. Así mismo, sustenta que a través del tiempo la modelación matemática en la escuela se han desarrollado varias perspectivas a nivel mundial en la educación matemática.

Kaiser (2020) afirma que en las actividades de modelación debe llevarse un equilibrio permanente entre la mínima orientación del docente, pero la máxima independencia de los estudiantes. En cuanto a la investigación, exige que haya intervención del docente de manera individual y adaptativa, que permitan la dependencia de las actividades de modelado. Además, que cuente con un apoyo personalizado y temporal, donde se ofrezca a los estudiantes un soporte para la resolución de la tarea de diversos modos y de manera independiente.

1.3.13 Creativity in students' modelling competencies: conceptualization and measurement[21]

La presente tesis toma elementos de la investigación de Lu & Kaiser (2021) para abordar de manera precisa el uso de contextos auténticos llevando a cabo MGO en un campo extra-matemático. De esta

[21] Lu, X., & Kaiser, G. (2021). Creativity in students' modelling competencies: conceptualization and measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 1-25.

forma, se busca favorecer la percepción de la tarea y el proceso de creatividad de los estudiantes en la elaboración de modelos para el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas.

En relación con los hallazgos, Lu & Kaiser (2021) expresan que el desarrollo de las competencias de modelado matemático favorece la creatividad de los estudiantes, jugando un papel relevante para el aprendizaje. Además, determinan que la creatividad y el modelado son procesos fijados en la competencia cognitiva. En esta medida, la creatividad contribuirá significativamente a la comprensión integral del modelado matemático. Estos dos procesos favorecen indudablemente al planteamiento y resolución de problemas no rutinarios, generando nuevos conocimientos y habilidades.

Así mismo, Lu & Kaiser (2021) manifiestan que los estudiantes no obtuvieron un buen desempeño desde la perspectiva de la creatividad, en los tres aspectos (utilidad, fluidez y originalidad), de manera particular en la fluidez y la originalidad. Esto indica que, los estudiantes pocas veces abordan problemas matemáticos con múltiples o diversas formas de llegar a la solución. En cuanto a la utilidad y la originalidad, los investigadores afirman, que se puede mejorar si la tarea tiene relación con los estudiantes, es decir, si se abordan contextos auténticos, donde ellos poseen una mayor significación personal y la tarea no se percibe demasiado compleja.

1.3.14. Development in Mathematical Modeling. In Exploring Mathematical Modeling with Young Learners[22]

El proceso de modelado alienta a los estudiantes a contemplar diferentes caminos y estrategias para el abordaje de un problema. La exploración de variadas posibilidades evoca la creatividad porque les permite experimentar con ideas y soluciones no tradicionales. Por ende, en esta tesis se abren posibilidades para que los estudiantes sean transformadores y creativos en el modelado. El análisis

[22] Brady, C., & Lesh, R. (2021). Development in Mathematical Modeling. *In Exploring Mathematical Modeling with Young Learners* (pp. 95-110). *Springer, Cham.*

presentado por Brady & Lesh (2021) muestra un camino interesante en el uso del modelado con estudiantes de la secundaria y la forma en que se puede concebir caminos de motivación, innovación y creatividad por parte de los escolares.

Brady & Lesh (2021) sustentan que *"el modelado no debe ser pensado como un área temática; en su lugar, está arraigado en una postura hacia las matemáticas, sus relaciones con el trabajo en el aula y sus conexiones con los mundos consecuentes de los estudiantes"*[23]. En esta dirección, se deben organizar entornos accesibles para todos los estudiantes, en los cuales elaboren descripciones matemáticas para fundamentar su mundo y efectuar algún cambio en él. Además, Brady & Lesh (2021) consideran que se puede percibir el modelado como una toma de decisiones "estratégicas" y "lúdicas" acerca de cómo mirar el mundo. Es decir, buscar problemas, plantear problemas e introducir supuestos. Cuyo objetivo sea el de simplificar un problema, establecer conexiones a la propia experiencia y escribir el problema de diferentes maneras, estableciendo sus características y formas de representación.

1.3.15. Mathematical modelling and discrete mathematics: opportunities for modern mathematics teaching[24]

La modelación involucra la integración de conceptos y metodologías de múltiples disciplinas, desafiando a los estudiantes a relacionar ideas y saberes de diversas áreas, donde se proporcionan soluciones innovadoras. Esta concepción motiva en esta investigación a trabajar con estudiantes contenido avanzado de la matemática en secundaria, los autores de este artículo evidencian alcances importantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en temáticas de nivel superior.

[23] Brady, C., & Lesh, R. (2021). Development in Mathematical Modeling. *In Exploring Mathematical Modeling with Young Learners*. p.106. *Springer, Cham.*
[24] Greefrath, G., Siller, H. S., Vorhölter, K., & Kaiser, G. (2022). Mathematical modelling and discrete mathematics: opportunities for modern mathematics teaching. *ZDM–Mathematics Education*, 1-15.

Kaiser et al. (2022) discurren que los modelos discretos pueden vincularse en la enseñanza y aprendizaje, si los estudiantes disponen de competencias de modelado y, además, tienen conocimientos de grafos. Sin embargo, para aquellos que no los tienen es un buen comienzo y una oportunidad para conocer la matemática discreta, como un aporte al desarrollo del pensamiento matemático a través de la resolución de problemas en edades tempranas. Además, corroboran que se pueden desarrollar métodos de intervención en actividades de modelado teórico-gráfico porque ofrece un potencial para estimular la reflexión matemática, así como motivar a los estudiantes con el uso de experiencias del mundo real. También, ofrecen oportunidades de controlar procesos de solución por medio de ayudas metacognitivas que abren oportunidades para llegar a generalizaciones más abstractas.

Kaiser et al. (2022) afirman que la resolución de problemas donde se involucra las matemáticas discretas, son importantes como contenido de la educación matemática. Las ventajas para los estudiantes es que se presenta un contenido interesante, donde se desarrollan competencias relacionadas con el proceso.

1.4. Investigaciones sobre el proceso enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas a través de la modelación geométrica (MGA) en la escuela secundaria

1.4.1. Mathematics through the 5E Instructional Model and Mathematical Modelling: The Geometrical Objects[25]

La MGA en la resolución de problemas ayuda a los estudiantes a comprender conceptos geométricos abstractos permitiendo la comprensión general de las matemáticas y su capacidad para aplicarlos en diversos contextos. Este artículo reconoce la importancia del modelado para construir o robustecer conceptos matemáticos y la mejora de los desempeños de los estudiantes, criterios que dan argumentos positivos a esta investigación.

[25] Tezer, M., & Cumhur, M. (2017). Mathematics through the 5E instructional model and mathematical modelling: The geometrical objects. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(8), 4789-4804.

Los autores Tezer & Cumhur (2017) afirman que las actividades que se basan en el modelado proporcionan a los maestros herramientas significativas para dar oportunidades de aprendizaje a los estudiantes. A través de un ciclo de instrucción que tiene como etapas: enganchar, explorar, explicar, elaborar y evaluar) y exponen la importancia de relacionar eventos de la vida diaria en las lecciones de matemáticas para lograr una mayor comprensión y motivación en el aprendizaje de los estudiantes. Además, encuentran que la enseñanza dada por el MGO y el modelo instruccional 5E aumenta significativamente el rendimiento académico de los estudiantes, aporta al logro matemático, desarrolla habilidades para la resolución de problemas, mejora las percepciones visuales de los estudiantes sobre los objetos y el razonamiento espacial. También, facilita el aprendizaje de las matemáticas y su relación con la vida real.

1.4.2. Geometric modelling inspired by Da Vinci: Shaping and adding movement using technology and physical resources[26]

El material concreto y los recursos digitales permite a los estudiantes visualizar conceptos geométricos abstractos de forma concreta y llegar a una mejor comprensión de figuras geométricas en cuanto a propiedades y relaciones. Los resultados de la implementación Lieban & Lavicza (2017) dan argumentos relevantes a esta investigación. Por su parte, aseguran que a través del uso de material concreto de manipulación y de las herramientas digitales, los estudiantes tienen la oportunidad de examinar matemáticamente las ideas, mejorar las construcciones y fortalecer las relaciones geométricas. Es este sentido, la presente tesis adopta el uso de material concreto y el uso de un software como mediador del aprendizaje matemático

[26] Lieban, D., & Lavicza, Z. (2017). Geometric modelling inspired by Da Vinci: shaping and adding movement using technology and physical resources. *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10)*. p.993-999.

Lieban & Lavicza (2017) implementan el MGO basado en algunos proyectos de Leonardo da Vinci, en dos representaciones. La primera es virtual 3D (ordenador) y la segunda física (material concreto), con el objetivo de realizar un análisis sobre la función que cumple cada uno y las interacciones entre estos. Los autores evidencian que traer estos proyectos con ideas clásicas, pueden convertirse en una estrategia poderosa para aprender matemáticas, *"reconstruir modelos históricos es una de las muchas formas posibles de enseñar conceptos matemáticos y promover los procesos de pensamiento creativo de los estudiantes"*[27]. Por lo cual, el MGO permite que los estudiantes aumenten su autonomía y se involucren en los procesos de aprendizaje, contribuciones relevantes aspectos significativos en este trabajo de investigación.

1.4.3. Mathematical modelling with digital tools—a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software[28]

El uso de software en el modelado favorece el abordaje de problemas matemáticos facilitando procesos para su solución, contribuye a comprender conceptos geométricos de forma concreta y dinámica. Así como la resolución y creación de problemas, ofrece un entorno interactivo para explorar y experimentar con figuras y conocimientos geométricos. Los autores Greefrath, et al. (2018) declaran que no existen diferencias significativas entre los dos grupos con los cuales se llevó la investigación, encuentran que los estudiantes que trabajan tareas de modelado usando el software tienen igual desempeño que aquellos que lo hacen con material concreto.

Por otra parte, Greefrath, et al. (2018) concluyen que el software de geometría dinámica no necesariamente genera un impacto en el desarrollo de las competencias del modelado. Pero, puede

[27] Lieban, D., & Lavicza, Z. (2017). Geometric modelling inspired by Da Vinci: shaping and adding movement using technology and physical resources. *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10)*. p. 989.
[28] Greefrath, G., Hertleif, C., & Siller, H. (2018). Mathematical modelling with digital tools—a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *ZDM, 50(1-2),* 233-244.

facilitar el desarrollo de tareas complejas y auténticas que quizás no puedan hacerse netamente con material concreto. Además, reconocen la importancia del trabajo con material concreto para mejorar el desarrollo de competencias en la matematización de los estudiantes, presentando argumentos valiosos para esta investigación.

1.4.4. Geometric Modeling of Mesospace Objects: A Task, its Didactical Variables, and the Mathematics at Stake[29]

El uso de contextos reales provee un marco significativo para comprender y aplicar conceptos geométricos y desarrollar habilidades matemáticas para la resolución de problemas dando utilidad a las matemáticas a través de la relación con otras áreas del conocimiento. Este artículo da una visión general para el uso de los espacios y elementos de la escuela para llevar a cabo actividades propicias en el modelado, dando evidencias positivas para el uso de contextos auténticos en la presente investigación.

Por su parte, Herbst & Boileau (2018) a partir de los resultados obtenidos sostienen, que usar los conocimientos geométricos para modelar situaciones relacionadas con el pensamiento espacial, puede motivar de forma importante a los estudiantes a aprender geometría. De la misma manera, reconocen que la geometría puede proporcionar momentos para modelar el espacio tridimensional bajo problemas reales porque genera una motivación significativa en los estudiantes por el aprendizaje, brindando una oportunidad para la ejecución de estrategias en el abordaje de la resolución de problemas prácticos.

Herbst & Boileau (2018) afirman que la geometría en la escuela secundaria propone una ocasión para modelar matemáticamente el mundo real y el perfeccionamiento progresivo intelectual para predecir y elaborar representaciones geométricas en base a elementos cotidianos dando posibilidades para enfocar en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

[29] Herbst, P., & Boileau, N. (2018). Geometric modeling of mesospace objects: A task, its didactical variables, and the mathematics at stake. In Visualizing Mathematics (pp. 277-308). *Springer, Cham.*

1.4.5. Geometric Modeling Tasks and Opportunity to Learn Geometry: The Ranking Triangles Task Revisited[30]

Este artículo presenta la forma en la cual se puede dar una apropiación de diferentes materiales concretos dentro de una práctica de modelado en la escuela y la forma en que los estudiantes pueden vincularse a la resolución de problemas retadores para el desarrollo del pensamiento matemático. En este sentido, ofrecen una mirada favorable al objetivo de este proyecto investigativo. Por su parte, Herbst (2019) desarrolla actividades con material concreto y en pequeños grupos, se apoya en el ciclo de modelado de Blum y Leib (2007). Este ciclo, se basa en la comprensión de una situación problémica real, simplificación en un modelo real, estructuración de un modelo matemático y el análisis de resultados.

Herbst (2019) sostiene que el diseño del modelado se encuentra motivado *"[…] por la necesidad de saber lo que es verdadero en el mundo real, por la oportunidad de usar esa necesidad de saber, para desarrollar ideas sobre el conocimiento matemático"*[31]. Más aún, el MGO permite fortalecer el pensamiento matemático y provee una oportunidad de aprendizaje desde lo real, donde se usa no sólo para encontrar un valor matemático, si no también, para el descubrimiento de las nuevas matemáticas y el desarrollo de competencias del conocimiento abstracto y espontáneo de la geometría.

1.4.6. Doing Math Modelling Outdoors- A Special Math Class Activity designed with MathCityMap[32]

El modelado desarrolla en los estudiantes la capacidad de autonomía y de planificación de estrategias efectivas en la resolución de problemas. Además, visualiza diversos escenarios y modelos para contextualizar las matemáticas a situaciones reales aumentando el interés por el aprendizaje.

---

[30] Herbst, P. (2019). Geometric Modeling Tasks and Opportunity to Learn Geometry: The Ranking Triangles Task Revisited. *In Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development* (pp. 123-143). *Springer, Cham.*
[31] Herbst, P. (2019). Geometric Modeling Tasks and Opportunity to Learn Geometry: The Ranking Triangles Task Revisited. *In Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development* (pp. 141). *Springer, Cham.*
[32] Ludwig, M., & Jablonski, S. (2019). Doing Math Modelling Outdoors-A Special Math Class Activity designed with MathCityMap. *In HEAD'19. 5th International Conference on Higher Education Advances (pp. 901-909).* Editorial Universitat Politécnica de Valéncia.

El artículo de los autores Ludwig & Jablonski (2019) muestra la forma en que combinan la idea de un sendero matemático y las oportunidades tecnológicas actuales de los dispositivos móviles. Reconocen los aspectos importantes de usar la modelación geométrica en el aula generando motivación en este trabajo investigativo para vincular el proceso de modelado tanto en el aporte teórico como práctico.

En este sentido, afirman que la modelación matemática y geométrica no es fácil de enseñar. Por ende, se requiere de muy buenas tareas auténticas y realistas, que despierten el interés del estudiante en espacios fuera del aula. Incluso sostienen que el modelado le permite al estudiante el trabajo independiente y autónomo con un impacto positivo en el rendimiento, la experiencia para el aprendizaje y la comunicación.

Estos autores llegan a definir la competencia de modelación matemática y geométrica como *"la capacidad de identificar preguntas, variables, relaciones o supuestos relevantes en una situación dada del mundo real, traducirlos en matemáticas e interpretar y validar la solución resultant*e"[33]. Enunciado relevante que da a la presente investigación bases importantes para la construcción de la definición de MGA, la cual hace parte del marco teórico de esta investigación.

1.4.7. Measuring and investigating strategic knowledge about drawing to solve geometry modelling problems[34]

La creación de modelos para el aprendizaje de las matemáticas anima a los estudiantes a buscar soluciones innovadoras de problemas en situaciones que requieren originalidad e imaginación, además favorecen la construcción de su conocimiento a partir de la interiorización de conceptos matemáticos.

---

[33] Ludwig, M., & Jablonski, S. (2019). Doing Math Modelling Outdoors-A Spmodeladoecial Math Class Activity designed with MathCityMap. *In HEAD'19. 5th International Conference on Higher Education Advances.Editorial Universitat Politècnica de València*. p. 901.

[34] Rellensmann, J., Schukajlow, S., & Leopold, C. (2020). Measuring and investigating strategic knowledge about drawing to solve geometry modelling problems. *ZDM*, 52(1), 97-110.

Este artículo resalta la importancia de la precisión en la elaboración de modelos para mejorar el nivel de desempeño de los estudiantes. Esta tesis evidencia que los resultados obtenidos son significativos, por ende, busca dentro de las estrategias usar el modelado como eje central para el desarrollo del pensamiento. Rellensmann, et al. (2020) aseveran que el conocimiento estratégico se relaciona significativamente con las habilidades cognitivas. Así mismo, este tipo de conocimiento se articula con la precisión del dibujo, el cual permea el desempeño del modelado en lo intra-matemático.

Por otro lado, se reconoce que los estudiantes de secundaria con alto grado de rendimiento presentan un mejor conocimiento estratégico sobre el dibujo y, por lo tanto, mejor desempeño en el MGO. Donde, construyen dibujos con más precisión y resuelven problemas del modelado mejor que todos sus compañeros. De esta manera "*…el dibujo se considera particularmente poderoso para resolver problemas de modelado de geometría*"[35]. Hay que mencionar además que, el conocimiento del dibujo es fundamental para el modelado y el dominio de la geometría.

1.4.8. How to analyze the students' mathematization competencies in solving geometrical problems?[36]

La fase de matematización en el modelado hace referencia a la transformación que se presenta de una situación real a términos de la matemática, los estudiantes representan un problema de la vida real usando conceptos y relaciones matemáticas. Es importante llevar a cabo la construcción de modelos que le permitan comprender, estudiar y resolver problemas. Dado al interés que presenta esta tesis en involucrar el modelado y la resolución de problemas este artículo da nociones sobre las dificultades en

[35] Rellensmann, J., Schukajlow, S., & Leopold, C. (2020). Measuring and investigating strategic knowledge about drawing to solve geometry modelling problems. *ZDM*, 52(1). p.106.
[36] Suaebah, E., Mardiyana, M., & Saputro, D. (2020). How to analyze the students' mathematization competencies in solving geometrical problems? *In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 1469, No. 1, p. 012169). IOP Publishing*.

los que se afrontará el maestro y el estudiante en el proceso del modelado, generando una visión del proceso y como puede mediarse en el sistema de actividades.

Suaebah, et al. (2020) conciben la matematización en dos direcciones, la primera es la matematización horizontal, aquella que convierte un problema contextual en un modelo matemático y la segunda dirección es la vertical, se refiere al proceso de convertir problemas en un número de soluciones matemáticas. Luego de realizar un análisis detallado de sus resultados sostienen que el proceso de la matematización es cíclico. De igual manera, si un estudiante no entiende un problema se le dificulta modelar las matemáticas, si usan fórmulas incorrectas no pueden determinar un modelo matemático o geométrico correcto y si realizan cálculos de forma equivocada no pueden refinar e integrar ningún modelo.

Además, reconocen que, no es de ninguna manera fácil resolver problemas donde se involucran elementos geométricos. Las afirmaciones de los autores en relación con la matematización muestran claramente variables importantes en el proceso del modelado que pueden ser estudiadas en la tesis.

1.4.9. Experience of teaching geometric modeling at schools and universities[37]

La visualización es un proceso de suma relevancia para el modelado, tanto en un espacio bidimensional como tridimensional, debido a que, les permite a los estudiantes comprender conceptos geométricos y relaciones espaciales de forma efectiva. También, concede la exploración de diversas representaciones visuales en la búsqueda de soluciones creativas a problemas en un contexto del mundo real. Este artículo presenta resultados significativos, dando una mirada positiva sobre el modelado, proceso que se aborda en el aporte teórico y práctico de esta investigación.

Balyakin & Chempinsky (2020) afirman que es fundamental enseñar a los estudiantes el lenguaje gráfico desde edades tempranas, para ello se puede abordar el MGO en 2D como primera medida, para pasar

[37] Balyakin, A. & Chempinsky, L. (2020). Experience of teaching geometric modeling at schools and universities. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1691, No. 1, p. 012042). IOP Publishing.

al modelado en 3D. El modelado 3D se relaciona de manera directa con el mundo tridimensional conocido por los estudiantes, esto permitirá el desarrollo de habilidades de visualización. Por lo demás favorece la capacidad espacial, facilita el aprendizaje de la geometría y la aplicación del conocimiento asociado a la creación de cosas nuevas. De la misma forma estos dos autores afirman que el MGO involucra la solución de diversos problemas que impulsan el pensamiento visual, lógico, técnico, heurístico de los escolares y vincula provechosamente a otras disciplinas. Adicionalmente, establece conexiones sustanciales entre las artes visuales, la informática y otras áreas con la matemática.

1.4.9 Geometric Modeling: Determining the Largest Lake[38]

La construcción de modelos para la resolución de problemas son elementos prácticos e importantes para abordar problemas en contextos reales. Por su parte, permite a los estudiantes tomar decisiones para llevar tareas en el aula de clase bajo un propósito y utilidad de lo que aprende, enfrentándose a situaciones más complejas que son transferibles a otras áreas del conocimiento. El artículo propuesto por los autores Wickstrom & Roscoe (2020) evidencian aspectos importantes sobre la creación de sentido en los estudiantes. Aportando argumentos que son relevantes en esta tesis para la validación del modelo didáctico y el sistema de actividades.

En esta dirección, Wickstrom & Roscoe (2020) consideran que el modelado es una herramienta matemática influyente porque contribuye a que los estudiantes se conecten y apliquen los contenidos al mundo que les rodea. En esta dirección, los escenarios que pueden establecerse con el modelado conceden libertad a los estudiantes para dar sentido a una situación, permite la creatividad y la experiencia que no suelen darse con otro tipo de tareas. Los investigadores reconocen que el MGO desarrolla en los estudiantes la capacidad de aplicar las matemáticas de manera apropiada. De tal forma,

[38] Wickstrom, M. & Roscoe, M. (2020). Geometric Modeling: Determining the Largest Lake. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching* PK-12, 113(8), 643-650.

que se lleve a cabo la solución a problemas en escenarios reales. Este proceso, les implica interpretar las matemáticas, usar sus propios razonamientos y perspectivas para dar sentido a las matemáticas abordadas.

Wickstrom & Roscoe (2020) también afirman que, el modelado puede llegar a ser bastante desordenado cuando se lucha con preguntas demasiado complejas del mundo real. Sin embargo, establece una oportunidad a los estudiantes para el desarrollo de su creatividad, la conexión de las ideas y la aplicación de las matemáticas en escenarios auténticos.

1.4.10. Students' modelling processes when working with math trails[39]

El abordaje de problemas en contextos reales permite que los estudiantes reconozcan la relevancia de las matemáticas en la cotidianidad, dando motivación a los estudiantes por desarrollar habilidades matemáticas significativas donde se involucran diversas disciplinas.

El presente artículo da argumentos significativos a esta tesis para vincular problemas en contextos reales. Entre estos, Buchholtz (2021) sostiene que objetos y contextos reales brindan oportunidades para el aprendizaje de las matemáticas. Porque permite a los estudiantes obtener diversas experiencias en la aplicación del conocimiento matemático. Por otra parte, los autores admiten que las fases del modelado tienen un papel importante para la solución de un problema porque es allí donde se encuentra la transición entre la realidad y las matemáticas. Conjuntamente, porque intervienen ideas individuales y los conocimientos matemáticos previos.

Buchholtz (2021) reconoce la recopilación de datos como un paso razonable y explícito para la matematización, debido a que es el núcleo para una contextualización extendida hacia los objetos reales. En esta dirección, los problemas matemáticos en contextos reales son un complemento útil para las

[39] Buchholtz, N. (2021). Students' modelling processes when working with math trails. *Quadrante,* 30(1), 140-157.

lecciones en el aula y fuera de ella, brindando una oportunidad para aplicar lo aprendido en su vida cotidiana.

1.5. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas a través de la modelación matemática y geométrica en la escuela secundaria en Colombia

A continuación, se exponen de manera precisa algunas investigaciones desarrolladas en Colombia relacionadas con la resolución de problemas apoyadas en la modelación en la escuela secundaria.

1.5.1. Desarrollo de la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumen a través de la implementación de la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje.[40]

El modelado es considerado como una estrategia fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En esta medida, el presente trabajo de investigación tiene como objetivo vincular dicho proceso en el sistema de actividades.

Diversos autores se interesan por analizar sus alcances, en este sentido, Marín y Castro (2016) en este artículo presentan como propósito el reconocimiento de la incidencia de la modelación en los procesos de enseñanza y aprendizaje, para el desarrollo de la estimación de cantidades continuas en el volumen ocupado. En este caso, el modelado se aborda atendiendo la resolución de problemas retadores en contextos reales, mediante el uso de diferentes materiales concretos. Pero también, apoyados en el uso de la tecnología a través de software.

Marín y Castro (2016) encuentran que el modelado admite a los estudiantes acomodar conocimientos a nuevas construcciones mentales y teóricas, así como *"[…] la capacidad de pasar de "modelos de" a "modelos para" demuestra que la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje permite la*

[40] Marín, Y. y Castro, L. (2016). Desarrollo de la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumen a través de la implementación de la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática,* (46), p.139-158.

exploración de diversas formas de acercarse a un fenómeno” [41]. Por consiguiente, el modelado puede ser vinculado a eventos naturales propios de las vivencias de los estudiantes.

1.5.2. Art and Geometry of Plants: Experience in Mathematical Modelling[42]

El MGO concede visualizar conceptos abstractos y relaciones en el espacio, en el cual los estudiantes aplican conocimientos geométricos en situaciones reales dando sentido y utilidad a las matemáticas, favoreciendo el aprendizaje activo y experimental. Este artículo evidencia factores importantes cuando se trabaja el modelado en la enseñanza y aprendizaje, proporcionando argumentos válidos para la vinculación en esta tesis.

Por su parte, Zapata, et al. (2017) sostienen que, tanto el modelado de las formas, como, el modelado relacionado con las magnitudes geométricas da pautas para aprender a construir modelos geométricos. Porque permite a los estudiantes comprender que las matemáticas son aplicables y que favorecen el análisis de fenómenos de la naturaleza. Adicionalmente, los estudiantes identifican las diferencias entre la enseñanza tradicional y la desarrollada con la modelación y consideran que la modelación permite mejorar la comprensión de las matemáticas, en virtud de que, son apoyadas en el hacer y sus intereses.

También, se reconoce que el uso de la tecnología juega un papel relevante para realizar representaciones formales de objetos geométricos y las relaciones matemáticas que allí se generan. Por consiguiente, atrae a los estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas de forma intencional y creativa.

Conclusiones del capítulo 1

[41] Marín, Y. y Castro, L. (2016). Desarrollo de la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumen a través de la implementación de la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática,* (46), p.149.
[42] Zapata-Grajales, F. N., Cano-Velásquez, N. A., & Villa-Ochoa, J. A. (2017). Art and Geometry of Plants: Experience in Mathematical Modelling through Projects. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(2), 585-603.

La revisión de la literatura muestra investigaciones teóricas y prácticas, que se relacionan directamente con la resolución de problemas y el uso del modelado matemático en la escuela, enfatizando en la implementación de estrategias para el abordaje de problemas retadores en el aula y la MGA.

Los resultados de las investigaciones valoradas en el estado del arte muestran una visión positiva del uso del modelado, la resolución de problemas, la visualización matemática, la creación de sentido y significado en los procesos de enseñanza y aprendizaje y de la colisión con el contenido matemático. Los argumentos presentados en los artículos por los investigadores validan en primera medida y se tienen en cuenta en la elaboración del modelo didáctico y la creación del sistema de actividades.

La triangulación de los resultados del estado del arte de los autores Tezer & Cumhur (2017), Lieban & Lavicza (2017), Greefrath, et al. (2018), Herbst & Boileau (2018), Herbst (2019), Ludwig & Jablonski (2019), Rellensmann, et al. (2020), Suaebah, et al. (2020), Balyakin & Chempinsky (2020), Wickstrom & Roscoe (2020) y Buchholtz (2021), las temáticas en congresos y reuniones ICME (2021), PME (2018-2019), RELME (2018-2023), CERME (2019), ICMI (2018), CIAEM (2015-2023), SEIEM (2018-2019) y CIBEM (2017), los resultados de las entrevistas y encuestas, además de la experiencia de la investigadora, evidencian tendencias actuales del proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas haciendo uso del modelado. Estas tendencias son: desarrollo de competencias del MGO, estimulación de habilidades en la resolución de problemas en un contexto real y el reconocimiento de cómo los recursos físicos y digitales contribuyen al MGO.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

Este capítulo presenta dos vértices principales denominados fundamentos y referentes. Dentro de los fundamentos se encuentran los filosóficos, psicológicos, didácticos y del pensamiento matemático, la visualización matemática y los de contenido. En los referentes se encuentran los relacionados con la resolución de problemas, la modelación matemática, la modelación geométrica y el Sense Making, los cuales se articulan permitiendo la comprensión del desarrollo de esta propuesta de investigación.

2.1. Fundamentos filosóficos, psicológicos y didácticos

Fundamentos filosóficos. La presente investigación considera las posiciones de Davis y Hersh (1988), las cuales reconocen de manera positiva la construcción del conocimiento matemático a partir del trabajo en comunidad, activo y no rutinario. Por tanto, se construye el conocimiento matemático por medio de la experiencia. La cual, se consolida en redes de motivación e interés del sujeto a partir de razonamientos y particularidades de las matemáticas que él domina, asumiendo el intercambio de ideas en comunidad para un aprendizaje más significativo.

De igual modo, Davis y Hersh (1988) sostienen que las instituciones educativas establecen procesos de aprendizaje individualizados y rutinarios. Es así como, en estas prácticas no se construyen significados robustos de conceptos, porque solo sirven para activar la memorización. Los docentes creen que, sin ese tipo de prácticas repetitivas no podría construirse ningún tipo de concepto, considerando la práctica social algo alejada de los procesos de aprendizaje, obviando la importancia del intercambio de ideas, la comprensión común y el abordaje de problemas retadores como mediador del conocimiento.

Fundamentos psicológicos. Esta investigación aborda los trabajos de Piaget (1980) para llegar a la comprensión de cómo se construye el conocimiento. Por ende, se resaltan las diferentes cuatro etapas por las cuales pasa un individuo en el transcurrir de la vida para alcanzar su desarrollo cognoscitivo: sensoriomotora, preoperacional, de las operaciones concretas y de las operaciones formales. En este sentido, dicho desarrollo consiste en cambios cualitativos de los hechos como de las habilidades, así como de las transformaciones sustanciales de cómo se organiza el conocimiento. Entonces, se sigue una secuencia invariante basada en la interacción que se da entre la maduración del individuo y la influencia de su entorno, a medida que se van progresando en las etapas, se va mejorando la capacidad para emplear esquemas complejos y abstractos que permite instituir el conocimiento.

Para la construcción del conocimiento, Piaget (1980) establece los principios de organización y adaptación, en ellos se pasa de esquemas mentales a sistemas más complejos, de asimilación y acomodación donde la nueva información se conecta con la ya existente produciendo cambios en el conocimiento y los mecanismos de desarrollo dados por estructuras físicas heredadas, experiencias en el ambiente, de transmisión social y el equilibrio.

Por tanto, el aprendizaje se da cuando se actúa en la realidad y se transforma, *"si la experiencia física o social entra en conflicto con los conocimientos previos, las estructuras cognitivas se reacomodan para incorporar la nueva experiencia, es lo que se considera como aprendizaje"*[43]. En la enseñanza se debe asegurar que los conocimientos que se desean construir en los estudiantes sean integrados a su sistema de pensamiento, teniendo en cuenta la edad evolutiva.

Esta tesis se centra en el estadio de las operaciones formales que se da a partir de los 12 años, donde se favorece la transición de lo real a lo posible. Al mismo tiempo, se empieza a formar un sistema coherente de lógica formal y se alcanza una capacidad de pensar abstracta y reflexiva.

Fundamentos didácticos. Desde la didáctica la presente investigación comparte los criterios de Alsina (2009), quien recoge las ideas principales de la Educación Matemática Realista (EMR) y retoma los planteamientos del libro Revisiting Mathematics Education de Freudenthal (1991) como autor fundador

---

[43] Piaget, J. (1980). *Teoría del desarrollo cognitivo de Piaget*. Creative Commons Attribution-Share Alike, p. 13.

de esta teoría. Alsina (2009) reconoce que la EMR nace como una nueva alternativa a la enseñanza de la matemática mecanicista. Por medio del uso de contextos como apoyo para favorecer la evolución entre lo concreto y lo abstracto, el uso de modelos como eje fundamental del aprendizaje, el uso libre de construcciones y creaciones por parte de los estudiantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje y la concatenación entre ejes del currículum de las matemáticas.

Alsina (2009) interpreta y reúne los seis principios de la EMR de la siguiente manera: el principio de actividad que reconoce la matemática como una actividad humana cuyo propósito es matematizar el mundo que lo envuelve y la resolución de problemas, el principio de realidad reconoce que la matemática se aprende haciendo matemáticas en contextos reales, el principio de niveles considera que los estudiantes atraviesan diversos niveles de comprensión, bajo la esquematización de modelos, la exploración, la reflexión y generalización.

La EMR sustenta el intercambio entre estudiantes y docente, los estudiantes reinventan las matemáticas por medio de trabajo guiado, evitando la transmisión de la matemática ya construida. Por consiguiente, esta investigación asume que la EMR porque tiene elementos que pueden motivar a los estudiantes, da la oportunidad de comprender el sentido de las matemáticas y contribuye a que los estudiantes reconozcan el modo en que puede emplearse las matemáticas en la sociedad, en su cotidianidad, su educación y en su profesionalización, aumentando el interés por la matemática y las ciencias, así como despertar la creatividad.

2.5. Fundamentos de la visualización Matemática

Para el diccionario de la RAE (2014) visualizar significa "*Formar en la mente una imagen visual de un concepto abstracto. Imaginar con rasgos visibles algo que no se tiene a la vista*"[44]. En este sentido, la

[44] Real Academia Española, (2014). *Diccionario de la Lengua Española* [DEL] edición 23. Ed. Espasa. p.1732.

visualización puede entenderse como la acción y el alcance de visualizar. En esta tesis se hace énfasis en la visualización matemática, en la cual investigadores como Hershkowitz (1990), Zimmermann y Cunningham (1991), Arcavi (2003), Chih (2015), Presmeg (2006) han aportado diversas definiciones. Conjuntamente, han investigado sobre la visualización y su incidencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el aula.

Zimmermann y Cunningham (1991) y Presmeg (2006) consideran que la visualización debe ser vinculada en todos los modos del pensamiento matemático y formas de representación, desarrollando habilidades para reproducir ideas de forma simbólica, numérica y gráfica. Es así como, la visualización implica una comprensión que proviene de la intuición a través de imágenes formadas por la mente. Para Hershkowitz (1990) la visualización es *"[…] la habilidad para representar, transformar, generalizar, comunicar, documentar y reflexionar sobre información visual"*[45].

Para Arcavi (2003) la "*Visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar la comprensión"*[46]. Por consiguiente, esta investigación admite esta definición considerándola apropiada en el trazado y el desarrollo de las actividades que se llevan al aula, debido a que, se instituye como un recurso para el discernimiento de conceptos matemáticos y para exponer ideas *matemáticas (Arcavi 2003).*

[45] Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition*. Cambridge, G.B. (p. 80).
[46] Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. 52(3). p. 217.

Por otra parte, Rojas (2009) reconoce la existencia de ciertos rasgos característicos sobre la visualización matemática a partir de las diversas definiciones, las cuales se comparten en la presente investigación de forma simplificada, entre estas se tiene que:

- Las imágenes mentales pueden corresponderse entre sí y generar una invención de relaciones nuevas entre los objetos matemáticos, involucrando el pensamiento matemático.
- Se reconoce como un proceso representable que concede comunicar información de la actividad matemática, manifestando la interacción que se da entre los fenómenos reales, abstractos y transfiriendo la forma mental o física a conceptos, procesos y problemas geométricos.

En relación De Guzmán (1996) sostiene que una imagen visual en el contexto educativo puede caracterizarse porque es:

- Centro donde emergen los conceptos y métodos del campo matemático, y estimuladora de problemas de interés que tienen relación con objetos de la matemática.
- Generatriz de conexiones de las formas ocultas, capaces de provocar confiablemente la resolución de problemas matemáticos y transmisor momentáneo de las ideas geométricas, favoreciendo la actividad en un entorno de problemas geométricos.

En esta dirección, la visualización es esencial para el proceso de resolución de problemas donde se involucra la MGA. Algunas de las potencialidades que la visualización tributa a este proceso se tiene:

- Propicia la construcción y el uso de representaciones e imágenes mediante el proceso de resolución de problemas mediado por la MGA.
- Cimenta significados y sentido de los objetos geométricos básicos para el proceso de resolución de problemas, facilitando el uso de diversas estrategias heurísticas durante el proceso de resolución de problemas.

- Promueve la revisión de conceptos previos a través de representaciones pictóricas, esquemas y representaciones en la mente, necesarios durante el proceso de resolución de problemas.
- Desarrolla procesos y capacidades para llevar a cabo determinadas actividades y comunicarlas (relaciones entre lo real y geométrico).

2.2. Referentes sobre la teoría de la resolución de problemas. Problemas retadores

La resolución de problemas se ha fortalecido en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el aula en el transcurso de los años, convirtiéndose en una metodología de trabajo en varios países del mundo. En este sentido, para Stanic y Kilpatrick (1988) los problemas han ocupado un lugar fundamental en el currículo matemático en la escuela, aunque los términos "problema" y "resolución de problemas" se han asumido con diversos significados. Entre estos, los autores señalan los siguientes: *"Resolver problemas como contexto, como habilidad y para hacer matemáticas"* [47]. Para Krulik y Rudnik (1987) un problema es *"una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma"*[48].

En cuanto a un problema retador Sigarreta et al. (2006) aseguran que existen ciertos juicios que lo determinan. Entre estos, su resultado no puede ser fácilmente inteligible, el resolutor debe verlo como un problema y debe contar con los saberes y habilidades necesarias para alcanzar una solución, *"[…]* buscando de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido"[49].

[47] Vilanova, S., Rocerau, M., Valdez, G., Oliver, M., Vecino, S., Medina, P., & Álvarez, E. (2001). La educación matemática: el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. *Revista Iberoamericana de educación*, 4(1), p.47- 48.
[48] Krulik, S. y Rudnik, J. (1987). Problem solving: a handbook for teachers. Boston: Allyn and Bacon, p. 4.
[49] Polya, G. (1981). Mathematical Discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving, Combined Edition. New York: John Wiley & Sons, p. 117.

Para Falk (1980) los problemas realmente retadores instituyen *"una situación que estimula el pensamiento, que sea interesante para el alumno, y que la solución no sea inmediata"*[50]. Para Pérez (2004) los problemas retadores *"[…] invitan al estudiante a pensar autónomamente, a indagar, a cuestionar, a razonar y a explicar su razonamiento"* [51].

Pochulu y Rodríguez (2012) afirman que las definiciones de problemas y problemas retadores poseen rasgos comunes, entre estos se tiene que: *"Existe un sujeto que ha de resolverlo, punto de inicio y una meta por lograr, un cierto bloqueo que impide acceder a la meta fácilmente y estimulan el pensamiento, son interesantes para el estudiante y la solución no es inmediata"*[52].

A partir de las definiciones de problemas retadores abordadas, Krulik y Rudnik (1987), Falk (1980), Díaz y Poblete (1998), Pérez (2004), Sigarreta et al. (2006), Pochulu y Rodríguez (2012). Los problemas retadores son aquellos que: deben integrar conceptos coherentes y hacer vínculos con otros pensamientos de las matemáticas y que para encontrar su solución obliga a los estudiantes a construir redes o mapas conceptuales que favorezcan el aprendizaje, además de profundizar su comprensión de las matemáticas.

La presente investigación asume la resolución de problemas retadores como una metodología que propicia la construcción robusta del contenido matemático en estudiantes de secundaria. Este trabajo investigativo asume las fases de resolución de Mason, Burton y Stacey (2010), las cuales son:

El abordaje: en esta fase se debe comprender el problema hasta llegar a una familiarización completa. El uso de la heurística es fundamental para encontrar la vía de solución. En esta medida, el docente puede establecer preguntas heurísticas así: ¿Cómo se puede empezar a abordar el problema? ¿Cómo

[50] Falk, M. (1980). *La enseñanza a través de problemas.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño, p. 16.
[51] Pérez, F. (2004). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.
[52] Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2012). *Educación Matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Villa María, Argentina: Editorial Universitaria Villa María, p. 155

puedo convertir un problema de la vida real en un problema matemático? ¿Qué tipo de incógnitas y datos pueden ser útiles para la construcción del modelo?

El ataque: este es el momento donde se pone en juego saberes, experiencias, razonamientos, visualización y otras habilidades para establecer conjeturas, interpretar y buscar una solución. El docente puede hacer las siguientes preguntas: ¿Cómo la solución matemática establecida por el modelo toma significado en lo real? ¿De qué manera puedo usar los resultados obtenidos para dar solución al problema desde las matemáticas al mundo real? (analogía).

La revisión: esta etapa permite que los estudiantes interpreten, comprueben, reflexionen y establezcan una solución en un contexto a uno más general. El docente puede guiar a los estudiantes con preguntas para el modelado así: ¿Cómo el modelo favorece la solución del problema? ¿Puedo aplicar este modelo a otros problemas? ¿Qué diferencias encuentro entre el modelo y el de mis pares? ¿La solución que estoy planteando al problema de la vida real tiene coherencia?

La presente investigación asume la resolución de problemas retadores como una metodología que propicia la construcción robusta del contenido matemático en estudiantes de secundaria. La resolución de problemas y la MGA están estrechamente asociadas. Por ende, la MGA hace parte del proceso de resolución de problemas, pues se hace necesario representar conceptos, estructuras y las relaciones matemáticas que permiten caracterizar o modelar una situación real. Para llevar a cabo este proceso (MGA) es indispensable hacer uso de la resolución de problemas. De tal forma que, su unificación sea un elemento potente para el abordaje de situaciones intra-matemáticas y extra-matemáticas, que propicien el desarrollo del pensamiento matemático. En esta medida la presente tesis involucra el MGO para el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas dado el complemento que se establece entre estos dos procesos.

2.3. Fundamentos sobre la modelación matemática y modelación geométrica

A continuación, se presenta una mirada del concepto de modelación matemática y se concibe el de MGA.

2.3.1 Referentes de la modelación matemática

La Real academia española [RAE] (2014) define el término modelo como un "*esquema teórico, generalmente en forma matemática, de un sistema o de una realidad compleja, que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento*"[53]. En esta dirección, un modelo puede considerarse como una representación que aporta significativamente a la comprensión de lo que se pretende solucionar. La tesis destaca autores como Lesh y Doerr (2003) quienes consideran que un modelo *"…permite idealizar, especificar y matematizar la situación del mundo real"*[54] y para Stillman (2015) un modelo *"debe construir, idealizar, especificar y matematizar la situación del mundo real"*[55].

Con el objetivo de abordar la definición de modelación matemática, se consideran algunas concepciones en relación con el concepto modelar. Así, para Stillman (2015) modelar *"es un proceso de desarrollo de descripciones representacionales para propósitos específicos en situaciones específicas"*[56]. En efecto, se resalta que modelar es un proceso que debe darse para llegar a representaciones que permitan describir una situación y llegar a conceptos que propicien respuesta a un determinado problema.

En la literatura revisada se evidencia que cuando se habla de modelación matemática no existe un significado análogo y las maneras de vincularlo en los procesos de enseñanza y aprendizaje son variados. Por ejemplo, para Bliss y Libertini (2020) la modelación matemática "es el proceso que usa las matemáticas para representar, analizar*, hacer predicciones, o bien, brindar una percepción de fenómenos*

[53] Real Academia Española, (2021). *Diccionario de la Lengua Española* [DEL] edición 23. Ed. Espasa. p.1402.
[54] Lesh, R. & Doerr, H. (2003). Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching. *Lawrence Erlbaum Associates Publishers*.p.325
[55] Stillman, G. (2015). Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt? In Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education. *Springer, Cham*.p. 792.
[56] Stillman, G. (2015). Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt? In Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education. *Springer, Cham*.p. 793.

pertenecientes al mundo real"[57]. En particular para Stillman (2015) el modelado es entendido como *"una práctica muy situada, que involucra el desarrollo conceptual local que luego necesita ser refinado y extendido a una variedad de situaciones*"[58]. Por su parte, Niss, Blum & Galbraith (2007) plantean que el modelado matemático involucra el desarrollo de la descripción simplificada del mundo extramatemático vinculando al mundo matemático.

Atendiendo los resultados investigativos de Bliss y Libertini (2020), Stillman (2015) y Niss, Blum & Galbraith (2007) el modelado es el medio para relacionar la matemática y la realidad, y despertar el interés en el estudiante por conocer temas matemáticos en un contexto específico. De este modo, la modelación puede ser vista como una estrategia en el quehacer docente de matemáticas en la escuela. Por tal razón, el modelado es importante para el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en la escuela, debido a sus conexiones con la realidad.

2.3.2. Elementos teóricos de la modelación geométrica

Reconociendo que la MGA es intrínseca a la modelación matemática, se abordan algunas definiciones dadas por autores que han involucrado la MGA en la práctica educativa. Para Zapata, Cano, & Villa (2017) el modelado en geometría *"puede considerarse como un proceso en el cual, el conocimiento de la geometría se utiliza para representar objetos de la realidad*"[59.]

En el caso de Herbst & Boileau (2018) reconocen la modelación geométrica como "la representación de experiencias con el espacio y la forma, utilizando *"un sistema semiótico que ofrece sus propios*

[57] Bliss, K. y Libertini, J. (2020). Lineamientos para la evaluación e instrucción en la educación en modelación matemática. *Gaimme*. *Society for industrial and applied mathematics (SIAM)*. p.6.
[58] Lesh, R. & Doerr, H. (2003). Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching. *Lawrence Erlbaum Associates Publishers*.p. 326.
[59] Zapata, F., Cano, N. & Villa, J. (2017). Art and geometry of plants: Experience in mathematical modelling through projects. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(2), 594.

mecanismos para hacer inferencias"[60]. En el caso de Ludwig et al. (2019) es la capacidad que permite resolver preguntas desde el entorno, transferirlas a las matemáticas y finalmente validarlas e interpretarlas en base a una situación de la realidad dada. Además, Yamamoto (2021) la describe como *"el contexto del mundo real abstrayéndose en las formas de los objetos que podemos ver y tocar, es el primer lenguaje de comunicación de figuras y cualquier forma de representación geométrica*"[61].

En este sentido, los investigadores resaltan la "representación" como un eje fundamental de la modelación y enfatizan en la importancia que esta tiene para la resolución de problemas. A partir del estudio de la literatura y bajo los propósitos de este trabajo de investigación, la MGA se establece como: **"**un proceso intencional de representación, donde se utilizan conocimientos y recursos para llevar a cabo el análisis, formulación y elaboración de un modelo, el cual, brinda elementos para hacer inferencias, que favorecen la solución de un problema en un contexto geométrico". A continuación, se expone una clasificación sobre la MGA según el proceso cognitivo y el campo a modelar (ver Tabla 1).

Tabla 1. *Procesos cognitivos y campos para modelar*

		CAMPO PARA MODELAR (Objeto de modelación)	
		INTRAMATEMÁTICO	**EXTRAMATEMÁTICO**
SEGÚN EL PROCESO COGNITIVO	**INTENCIONAL**	Los estudiantes poseen dominio de determinados conocimientos de geometría. Aplican recursos de geometría apoyados en la exploración, la visualización matemática, la manipulación geométrica, la conjeturación, y la heurística, en la resolución de problemas.	Los conocimientos geométricos en los estudiantes son aplicados a situaciones del contexto y a la construcción de nuevos conceptos. Se apoyan en herramientas como la visualización matemática, la manipulación geométrica y la heurística, donde modelan con recursos analíticos y de interpretación geométrica, para alcanzar la solución a un problema.
	FORTUITO	Los estudiantes llegan de forma inesperada, durante la vía o camino de solución del problema. La lógica puede	Este proceso puede ser posible en el aula en la resolución de problemas de contexto, porque los estudiantes llegan

[60] Herbst, P., & Boileau, N. (2018). Geometric modeling of mesospace objects: A task, its didactical variables, and the mathematics at stake. *In* Visualizing Mathematics *Springer, Cham*. p. 280.
[61] Entrevista Yamamoto Yuriko (2020). Ver capítulo cuatro.

	conducir a una expresión, que permite un cambio de variable, para conseguir una expresión equivalente a la inicial.	por casualidad y sin reconocerlo hacen uso del modelado.

Elaboración propia

El proceso de MGA que se trabaja en este estudio tiene relación con un campo de modelado extra-matemático, de forma intencional, pero no se descarta el campo fortuito extramatemático. En ambos campos, los estudiantes hacen uso de sus habilidades y conocimientos geométricos, para abordar un problema retador, con el propósito de vincular situaciones cercanas o simuladas en contextos auténticos para favorecer el aprendizaje.

2.3.3. Cognición y metacognición en la modelación matemática

La modelación matemática trae inmersos dos procesos muy significativos en la educación matemática: la cognición y la metacognición. En cuanto a la cognición como proceso se encarga de la construcción, el procesamiento de la información que permite la cimentación del conocimiento.

Para González y León (2013) la cognición se activa en aquellos procesos que permiten al individuo apropiarse de la realidad, siendo el caso de la resolución de problemas en contextos auténticos dado a su demanda cognitiva. De esta manera, puede identificarse según Stillman (1996) con la cantidad de información necesaria para alcanzar una solución y los métodos que deben combinarse para producir resultado provisional o final del problema.

Por otra parte, la metacognición según Schneider & Artelt (2010) hace referencia al conocimiento que tienen los individuos de sus propias habilidades de procesamiento de información, de la naturaleza de las tareas cognitivas y las estrategias que se llevan a cabo para el desarrollo de dichas tareas. Además de habilidades ejecutivas que se coordinan con el monitoreo y autorregulación de sus propias actividades cognitivas.

De modo similar, Schoenfeld (1987) afirma que la metacognición tiene la capacidad de aumentar el significado del aprendizaje de los estudiantes en el aula. Por su parte, los estudiantes aprenden a pensar matemáticamente como parte integral de su cotidianidad, a través de conexiones entre conceptos matemáticos y contextos. Dentro de las contribuciones significativas de la metacognición está la construcción de conocimiento en base a sus procesos de pensamiento, el monitoreo y la autorregulación (ver Figura 2).

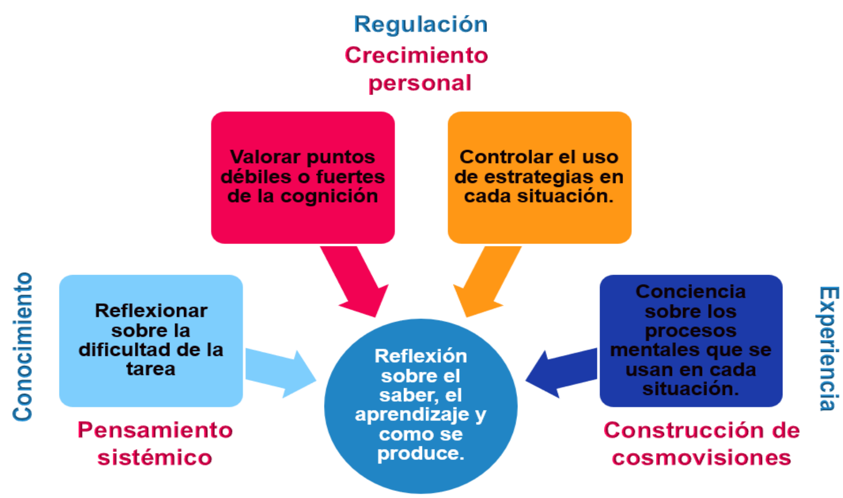


Figura 2. Metacognición en la construcción de conocimiento. Elaboración propia.

Este trabajo investigativo se cimenta en las concepciones de Kaiser (2020) para llevar a cabo estudios del proceso metacognitivo por parte de los estudiantes en el modelado. Por tanto, se analizan las siguientes estrategias metacognitivas de los estudiantes: *estrategias de planificación* son las que usan los estudiantes para planificar el proceso de solución del problema, donde reconocen que tareas deben desarrollar con los miembros del grupo, las *estrategias de seguimiento* son las implementadas por los estudiantes para regular el proceso del trabajo que se da en el ciclo de modelado, identificando las barreras cognitivas, buscando ayuda del docente, sus pares o búsqueda en fuentes de información y las *estrategias de evaluación* son aquellas que emplean los estudiantes en el trabajo, con el propósito de mejorar la modelación, tanto en el trabajo grupal y personal, para conocer aciertos y oportunidades de mejora.

Esta tesis adopta el “enfoque holístico” considerado por Stillman, Kaiser y Lampen (2020), donde el modelador trabaja en grupo con problemas de modelado completo y se evalúa el modelo como un todo, adoptando el ciclo de modelado simplificado propuestos por Stillman y Brown (2017) (ver Figura 3).

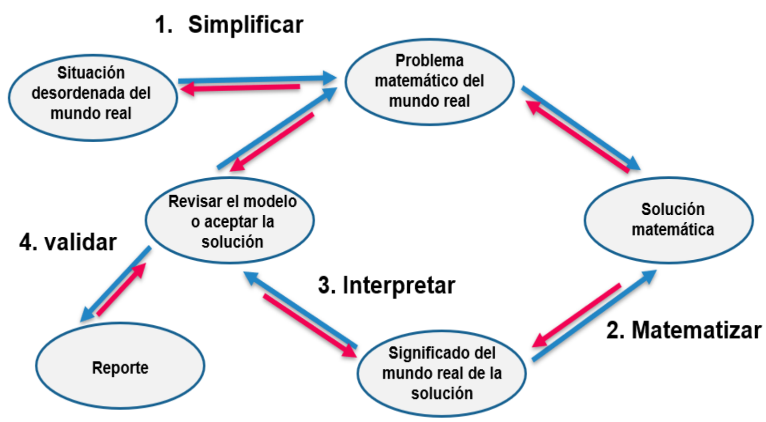


Figura 3.Ciclo de modelado simplificado Stillman y Brown (2017). p. 358.

En este ciclo se proporciona a los modeladores una manera retadora de solucionar problemas del mundo real. Se presentan fases claves, que van desde la concepción de una situación desordenada del mundo real, en la cual se identifica un problema y termina con una exposición final sobre la actividad de modelación y la resolución del problema. Por ende, las flechas de color azul muestran el proceso de la actividad cognitiva y las azules el proceso metacognitivo.

Asimismo, se conciben las competencias del ciclo de modelado de la siguiente manera en este estudio:

- **Simplificar:** los estudiantes idean modelos y eligen matemáticamente la manera de dar representación de este.

- **Matematizar:** los estudiantes usan conocimientos geométricos y de estrategias heurísticas para solucionar un problema matemático.
- **Interpretar:** los estudiantes relacionan los resultados matemáticos con un problema extra-matemático, de tal manera que puedan dar generalización en base a situaciones específicas.
- **Validar:** los estudiantes analizan sus soluciones en relación con sus pares y reflexionan sobre los aciertos o las oportunidades de mejora y reconocen que otras soluciones al problema pueden ser posibles.

2.4. Fundamentos del Pensamiento Matemático en el contexto de la resolución de problemas

El desarrollo del pensamiento matemático ha tomado interés en toda la comunidad académica, que busca sin duda, un avance en las habilidades matemáticas de los individuos. En este sentido, Sfard (1991) desde la perspectiva biológica explica que desarrollar las habilidades para aprender matemáticas, implica un esfuerzo continuo. Este trabajo vincula procesos cerebrales simples, como la atención, la memorización o procesos mentales más complejos, como organizar ideas, comparar, analizar, razonar, generalizar, seguir pasos, asumir reglas y tomar decisiones.

Por su parte, para Schoenfeld (2016) aprender a pensar matemáticamente tiene dos tipos de significados. El primero hace relación a la valoración que debe darse a los procesos de matematización, abstracción y habilidad para aplicarlos. El segundo aborda el desarrollo de competencias para usar herramientas con el objetivo de comprender. Por eso, ambos tipos se dirigen a la creación de sentido matemático, para percibir y usar las matemáticas. Es así como, "*el conocimiento matemático de un individuo es el conjunto de hechos y procedimientos matemáticos que puede usar de manera confiable y correcta*"[62].

[62] Schoenfeld, A. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of Education*. p. 7.

De Guzmán (1993) expone algunas razones, por las cuales considera importante la resolución de problemas para el desarrollo del pensamiento matemático. Entre estas razones se tienen la autonomía, el aporte que ofrece a los procesos efectivos de adaptación a los cambios, el trabajo autorregulador y creativo. Además, mantiene un valor no restringido al mundo de las matemáticas. Por consiguiente, "*los hábitos mentales de resolución de problemas preparan a las personas para problemas reales, situaciones que requieren esfuerzo y pensamiento"*[63].

De esta manera, la práctica de resolución de problemas permite desarrollar estrategias de solución coherente. Al mismo tiempo, favorece la aplicación a problemas intramatemáticos y extramatemáticos que conllevan al desarrollo de este pensamiento. De modo que *"[…] el pensamiento matemático en sí es un proceso que pertenece a una persona que realiza actividades de pensamiento dentro o fuera de las matemáticas"*[64].

Por su parte, Ersoy (2012) sostiene que el desarrollo del pensamiento matemático comienza cuando un individuo trata de resolver problemas, correlacionando conceptos para llegar a una solución. En este proceso, interviene de manera asertiva, la selección de estrategias, la experiencia del estudiante y su conocimiento matemático. Entre tanto, Ayllón et al. (2016) aseguran que, tanto la resolución como el planteamiento son herramientas potentes que muestran el pensamiento matemático y el nivel creativo. De ahí que, "*el pensamiento matemático es una forma ordinaria de pensar y resolver problemas que juega un papel especialmente importante en las matemáticas*[65]*"*.

El pensamiento matemático se amplía y se favorece con el proceso de resolución de problemas donde se involucra la MGA. Wickstrom & Roscoe (2020) aseguran que, tanto la MGA como la resolución de

[63] Rigelman, N. (2007). Fostering mathematical thinking and problem solving: The teacher's role. *Teaching Children Mathematics*. p. 311.
[64] Delima, N. (2017). A relationship between problem solving ability and students' mathematical thinking. *Infinity Journal*.p.25.
[65] Watson, A. (2001). Instances of Mathematical Thinking Among Low Attaining Students in an Ordinary Secondary Classroom. *The Journal of Mathematical Behavior*.p.469.

problemas, permite a los estudiantes explorar su creatividad y la experiencia matemática. Por su parte, Sozcu et al. (2013) considera que afianzar los dos procesos conecta los contenidos matemáticos. Porque mejora las habilidades en la construcción de conceptos que consolida un pensamiento matemático sólido.

Balyakin & Chempinsky (2020) reconocen que el MGO mejora el pensamiento visual y lógico. Así como, las habilidades heurísticas, que permean el robustecimiento del pensamiento matemático de los escolares. Para Herbst (2019) el pensamiento matemático se fortalece con el MGO, dado que, provee de oportunidades de aprendizaje, porque se abordan problemas retadores, que van desde lo real hacia lo matemático.

En este estudio investigativo se resalta la estrecha relación entre la MGA y la resolución de problemas, porque, su complemento aporta significativamente al desarrollo del pensamiento matemático, mejorando habilidades, favoreciendo la curiosidad y el interés por el aprendizaje de las matemáticas.

2.6. Referentes teóricos sobre el Sense Making

En diversos campos y abordado por diversos autores ha venido emergiendo el Sense Making, tanto en las organizaciones, la comunicación, la educación, entre otras. Es importante destacar que en la educación matemática ha ganado gran relación con el modelado matemático y la investigación.

Por su parte, Ancona (2012) concibe el Sense Making como la creación de sentido que implica la construcción de entendimientos y significados plausibles. Siendo una actividad muy útil que requiere moverse entre la heurística y la generalización. De esta manera, crear sentido puede verse como un proceso, en el cual una persona da sentido a la experiencia y le permite alcanzar conocimientos disciplinares. Para Odden & Russ (2019) el Sense Making en la educación permite a los estudiantes enmarcar su actividad como una creación de sentido viendo su tarea como la construcción de nuevos saberes. Además, les permite descubrir nuevas oportunidades de aprendizaje utilizando sus ideas, intuiciones y experiencias propias.

El uso actual del término Sense Making en la educación matemática se dirige a desarrollar la comprensión de una situación, contexto o significado a partir de los conocimientos ya construidos. "*En cuanto al modelado matemático esta creación de sentido puede presentarse en el contexto de una tarea o aplicación, dándole significado a una situación del mundo real"*[66]. Es así como, la creación de sentido y el modelado tienen un mismo propósito, construir nuevos conceptos y la comunicación de nuevas ideas. Por lo tanto, "*al clasificar y dar sentido a las ideas conceptuales locales en los problemas de modelado, se desarrollan las ideas fundamentales más grandes*"[67].

Por su parte, Abel et al. (2020) consideran que el modelado en el proceso metacognitivo puede verse como una actividad que crea sentido, porque cumple las siguientes características:

- **Se basa en la construcción de identidad:** los estudiantes toman diversas posturas intuitivas e inconscientes basadas en valores, actitudes y creencias.
- **Es retrospectivo:** permite la reflexión en las tareas de modelado del mundo real, donde se vinculan múltiples soluciones permitiendo estimular estilos de pensamiento
- **Implica promulgación:** los estudiantes pueden crear objetos con sus palabras o acciones, mientras modelan dando forma a su entorno de aprendizaje.
- **Es un proceso social:** los estudiantes se perciben en las actividades de modelado, dado que se desarrollan en grupo de estudiantes fomentando el aprendizaje social.
- **En curso:** se da continuamente durante los ciclos de modelado antes de que se tenga la comprensión completa del problema, dado que las competencias y habilidades de los estudiantes están en permanente evolución.

[66] Stillman, G., Kaiser, G., & Lampen, C. (2020). Mathematical modelling education and sense-making. *Springer.* p.16.
[67] Biccard, P. (2020). Sense-making in Modelling Tasks: What Can We Learn from Other Domains? In Mathematical Modelling Education and Sense-making. p. 227. *Springer, Cham.*

- **Se centra en, y por, señales extraídas:** los estudiantes llevan a cabo un proceso consciente, por mecanismos intuitivos subconscientes dirigido por un esfuerzo metacognitivo, donde se dan conexiones y se interpretan significados.
- **Tiene plausibilidad y precisión:** En los primeros ciclos los estudiantes trabajan con sus ideas, representaciones y métodos plausibles, luego se dirige a la precisión de la solución del problema, donde se discuten ideas que crean sentido.

Schoenfeld (2019) sostiene que el modelado brinda a los estudiantes potencialidades que son contempladas en el marco para la comprensión robusta (TRU), las cuales permiten desarrollar sentido en las matemáticas, entre ellas se tienen:

- **Agencia:** los estudiantes tienen la disposición y son capaces de interactuar con el contenido.
- **Propiedad:** los estudiantes hacen suyo el contenido y van más allá en sus aprendizajes, participan activamente en la creación de su conocimiento
- **Identidad:** se ven a sí mismos como personas matemáticas. Para los estudiantes las matemáticas son fuente de satisfacción.

En cuanto a la enseñanza de las matemáticas, Schoenfeld (2019) afirma que el modelado ofrece la creación de sentido tanto individual como colectivo, matematizar es un buen punto de partida para construir ideas e identidad matemática. De esta forma, *"las actividades de modelado provocan una actividad subjetiva, proporcionando una "abordaje" personal a las matemáticas que no es proporcionada por actividades más comunes en el aula"*[68].

2.7. Fundamento de los contenidos matemáticos

[68] Schoenfeld, A. (2019). The What and the Why of Modeling. In Affect in Mathematical Modeling.p.96. *Springer, Cham*.

En este epígrafe se presentan los conceptos, que se abordan en las diferentes actividades de trabajo con los estudiantes de secundaria del grado octavo. Se definen algunos conceptos relevantes como grafo, camino y ciclo hamiltoniano, el teorema de la galería de arte, el teorema de viviani, diagrama de Voronoi y el teorema de las alfombras, continuación:

Grafo. Es una estructura matemática, que consta de puntos denominados vértices y de aristas (líneas) que los enlaza entre sí. Es decir, un grafo "*es un par G = (V, E) de conjuntos tales que* $E \subseteq [V]^2$*; así, los elementos de E son subconjuntos de 2 elementos de V, donde* $V \cap E = \emptyset$*.*"[69]. Los elementos de V son los vértices del grafo G y los elementos de E son las aristas (ver Figura 4).

Sea, $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y $E = \{v_1v_2, v_2v_5, v_2v_5, v_5v_4, v_3v_4\}$

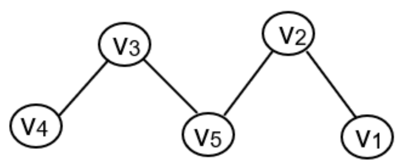


Figura 4. Representación de un grafo

Camino hamiltoniano. Un camino hamiltoniano en un grafo es el camino que se proyecta (sucesión de aristas adyacentes) pasando por todos los vértices del grafo tan solo una vez, puede empezar y terminar en cualquiera de los vértices. En este sentido, *"un grafo G es un camino simple que contiene cada vértice de G"*[70] (ver Figura 5). Sea el grafo G, $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y $A = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_2, v_5v_1\}$, un camino hamiltoniano que pasa por los siguientes vértices $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

[69] Diestel, R. (2017). Extremal Graph Theory. In Graph theory. *Springer, Berlin, Heidelberg*.p.21.
[70] Marcus, D. (2008). *Graph theory: a problem-oriented approach*. Maa.p.30.

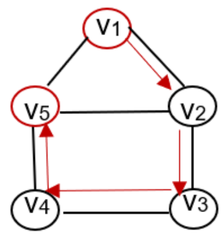


Figura 5.Representación de un camino hamiltoniano

Ciclo hamiltoniano. Un ciclo hamiltoniano en un grafo es un camino cerrado cuya sucesión de aristas adyacentes pasa por todos y cada uno de sus vértices solo una vez, e inicia y termina en el mismo vértice (ver Figura 6). Sea el grafo G, V = {v v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_3v_5, v_4v_6, v_5v_6,} un ciclo hamiltoniano {v_1, v_2, v_4, v_6, v_5, v_3, v_1}.

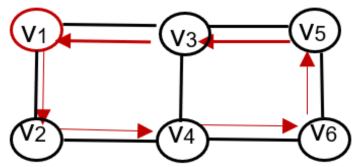


Figura 6. Representación de un ciclo hamiltoniano

Teorema de la galería de arte de Chvátal. El teorema propuesto por Chvátal, expone lo siguiente *"en un polígono simple con [n/3], cuántas cámaras son necesarias y siempre suficiente para que cada punto del polígono sea visible al menos desde una de las cámaras"*[71].

Teorema de Viviani. El teorema de Viviani expone que, en un triángulo equilátero, la suma de las tres distancias entre cualquier punto interior y los lados del triángulo tiene un valor independiente de la posición de ese punto y es igual a la altura del triángulo. Es decir, *"que dado un triángulo equilátero y un punto P en su interior, entonces la suma de las distancias de P a los lados del triángulo es igual a la altura del triángulo"*[72] (ver Figura 7).

[71] Chvátal, V. (1975). A combinatorial theorem in plane geometry. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, *18*(1). p. 40.
[72] Barrantes, H. (2019). Simetría y transformaciones geométricas en el plano, algunas ideas para su enseñanza. *Cuadernos*, *18*. p. 238.

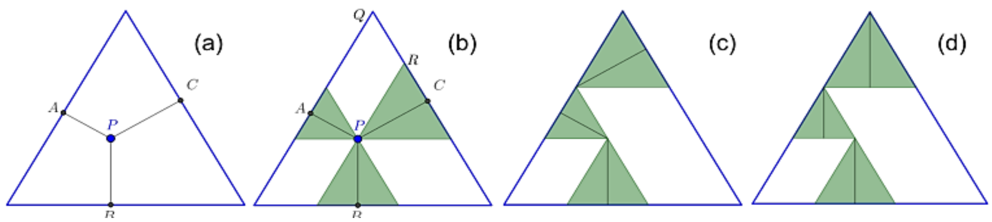


Figura 7.Demostración visual del teorema de Viviani Barrantes (2019). p. 239.

Diagrama de Voronoi. El diagrama de Voronoi es una estructura geométrica que permite la construcción de una sección del plano euclidiano. Consiste en dividir el espacio en tantas regiones como puntos u objetos se tienen, de tal manera que a cada punto se le asigna la región formada por todo lo más próximo a él, sin excluir a los demás. En tanto, "*una región de Voronoi VR (p, S) de p consiste en todos los puntos del plano al que p está más cerca que cualquier otro punto de S"*[73]. Se presenta un diagrama de Voronoi de once puntos (ver Figura 8).

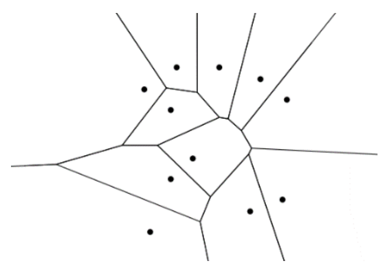


Figura 8.Diagrama de Voronoi de once puntos Klein (2005). p. 212

Teorema de la Alfombra. Es una expresión que se utiliza como una estrategia para resolver problemas. El cual, busca descomponer un problema complejo en partes pequeñas para su comprensión. En esta investigación se aborda el siguiente *"si dos alfombras cubren cierto piso y se mueven llevando una sobre parte de la otra, la superficie superpuesta es igual a la suma de las superficies que no cubre ninguna de las dos alfombras*"[74]

Conclusiones del capítulo 2

[73] Klein, R. (2005). Voronoi-Diagramme. *Algorithmische Geometrie: Grundlagen, Methoden, Anwendungen*, 209-268.
[74] Ferrero, M. y Jiménez, R. (2023). Estímulo del talento matemático. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán.pp.6.

En este capítulo se presentan los referentes que soportan al marco teórico, que son primordiales para el desarrollo de este estudio. Entre ellos se encuentran:

- Falk (1980), Díaz y Poblete (1998), Pérez (2004), Peña y Sánchez (2018), Morales et al. (2019) plantean definiciones sobre problemas retadores, las cuales constituyen referentes para la elaboración de la propuesta de problemas en el sistema de actividades. Igualmente, se presentan las fases de resolución de problemas de Mason, Burton y Stacey (2010) y la manera en que se asumen en esta investigación.
- En la modelación matemática se consideran las posiciones de Lesh y Doerr (2003), Niss, Blum y Galbraiyh (2007), Stillman (2015), Brady y Lesh (2021), entre otros. También se enfoca la modelación matemática desde la mirada del maestro y el estudiante en el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Los referentes teóricos sobre la MGA abordados por los investigadores Zapata, Cano y Villa (2017), Herbst y Boileau (2018), Ludwig et al. (2019) y Baldín (2021) entre otros, tributan elementos para la construcción del concepto de MGA que se aporta en el presente estudio.
- En la visualización matemática se asumen los referentes de Hershkowitz (1990), Zimmermann y Cunningham (1991), Chih (2015), Presmeg (2006), en particular de Arcavi (2003) y se resalta la manera en cómo puede ser vinculada en los modos de pensamiento matemático y de representación. La creación de sentido y significado matemático expresada por Anacona (2012), Odden y Russ (2019), Shoenfeld (2019), Stilman, Kaiser y Lamped (2020) y Biccard (2020) es un proceso cognitivo ligado a la resolución de problemas para propiciar la motivación de los estudiantes.
- Los conceptos fundamentales de los contenidos matemáticos se toman de Diestel (2017), Marcus (2008), Chvátal (1975), Barrantes (2019), Klein (2005) y Ferrero y Jiménez (2023). Estos contenidos, aunque no son propios de la enseñanza de la secundaria, se consideran importantes para el desarrollo del pensamiento matemático en este nivel.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

La solución a cualquier problema de investigación se concreta a través de la metodología de la investigación. En este capítulo se expone el tipo, enfoque y diseño de la investigación. Además, se presenta el alcance, la unidad de análisis, los métodos empíricos, las técnicas e instrumentos y las fases.

3.1. Tipo o enfoque de investigación

Esta investigación se fundamenta en un paradigma cualitativo, con un enfoque cualitativo. Los estudios cualitativos tienen como propósito *"examinar la forma en que los individuos perciben y experimentan los fenómenos que los rodean, profundizando en sus puntos de vista, interpretaciones y significados"*[75].

Este estudio está centrado en los sujetos de forma integral y completa, abarca un proceso de indagación inductivo, de interacción con los participantes y bajo el análisis de los datos descriptivos recolectados, a raíz del avance de los acontecimientos. En esta medida, se formulan preguntas científicas que direccionan la investigación, de tal manera que sean resueltas en base al razonamiento interpretativo de la información. Dicha información se obtiene, de manera simbólica, verbal, audiovisual y de texto, a través de la implementación de instrumentos (encuestas, observación, entre otras), los cuales, se refinan según como la investigación haya avanzado en base a la reflexión sobre el alcance de los resultados de los estudiantes tanto positivos como negativos.

Por otra parte, se pretende construir la realidad tal como se observa, de manera objetiva durante todo el proceso investigativo, sin el ánimo de alterar ni imponer, donde se pueda apropiar de una realidad epistémica en relación con los individuos partícipes (Quecedo y Castaño, 2002). La presente investigación tiene características de rigurosidad científica, busca resolver el problema con validez y confiabilidad, por medio de un detallado análisis de profundidad y de consenso intersubjetivo. El

[75]Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación (Vol. 3).* México: McGraw-Hill, p. 358.

investigador, bajo esta dirección busca una interpretación y sentires compartidos del fenómeno que se estudia.

En relación con el diseño se toma como eje primordial la acción participativa, que según Minerva (2006) es considerada como *"[…] un proceso de reflexión-acción-cambio-reflexión, por y para el mejoramiento de la práctica del docente, mediante la participación de éste, dirigido a superar los problemas y las necesidades del aula, la escuela y la comunidad"*[76]. Este trabajo evidencia una planeación organizada, en relación con las acciones que van a desarrollar los participantes, cuyo objetivo es cambiar la realidad, ofreciendo una oportunidad para mejorar y fortalecer la construcción del saber matemático en los estudiantes que participan. Así como, transformar y enriquecer el quehacer del docente. Para que, de esta forma, los participantes forjen un acentuado cambio social (Hernández, Fernández y Baptista, 2014).

Durante el proceso de este estudio *se "indaga al mismo tiempo que se interviene"*[77]. La investigadora se incorpora e indaga a medida que se avanza, con el propósito de generar un cambio, haciendo conciencia en los estudiantes sobre las necesidades de mejora, para propender en una transformación relevante en el aprendizaje de la resolución de problemas mediados por la MGA.

3.2. Alcance del estudio

El propósito principal de esta investigación se encamina al desarrollo del pensamiento matemático a través de problemas retadores. Para ello, se lleva a cabo un sistema de actividades basado en un modelo didáctico, las cuales son planeadas, estructuradas, e implementadas en varias sesiones de intervención en el aula. También, se fortalecen estrategias didácticas educativas para contribuir al desarrollo de habilidades y desempeños en este nivel educativo, creando las bases conceptuales para grados superiores. Por otro lado, con respecto a la práctica docente se brinda un modelo didáctico, que incide de

[76] Minerva, F. (2006). *El proceso de investigación científica*. Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia, p. 116.
[77] Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación (Vol. 3).* México: McGraw-Hill, p. 496.

forma directa en la optimización del ambiente de aula y el quehacer pedagógico en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

La implementación de esta propuesta puede ser llevada a cualquier establecimiento educativo (oficial o privado), en modalidad rural o urbana, en aula regular, multigrado e inclusiva.

3.3. Población y muestra (Unidad de análisis)

La población en este estudio son estudiantes de secundaria de la Institución Educativa Departamental Nuestra Señora de la Salud del municipio de Supatá, ubicado al noroccidente del departamento de Cundinamarca. La muestra seleccionada es de carácter no probabilístico por conveniencia, atendiendo características específicas del grupo y el problema de investigación que se aborda, además de la condescendencia y oportunidad de acercamiento por parte de la investigadora. En este sentido, se trabaja con 30 estudiantes del grado octavo de la sede de bachillerato, con edades entre los 13 y 15 años.

3.4. Métodos teóricos, empíricos y técnicas e instrumentos utilizados

Durante el proceso investigativo se aplican los siguientes métodos teóricos:

- Análisis de fuentes, para constatar el estado del arte y sentar las bases teóricas que sustentan la investigación.
- Histórico–lógico, para estudiar la evolución y desarrollo que ha tenido el problema de investigación.
- Análisis y síntesis, para estudiar los diferentes aspectos que integran la MGA para el proceso de resolución de problemas retadores. En la elaboración del estado del arte, los resultados y las conclusiones de la investigación.
- Enfoque sistémico y de modelación, para la construcción del modelo didáctico y el sistema de actividades. Además, para el análisis de la relación sistémica de los elementos que integran el modelo didáctico.

En el proceso de investigación se aplican los siguientes métodos e instrumentos para la recolección de la información:

- **Encuesta a docentes:** esta encuesta se implementa con docentes del área de matemáticas que tienen 20 años o más de experiencia. El objetivo de la encuesta es diagnosticar la situación actual del proceso de resolución de problemas con estudiantes de básica secundaria en las aulas y validar la existencia de oportunidades de mejora que se pretende abordar.
- **Entrevistas a especialistas:** se lleva a cabo una serie de entrevistas a investigadores que cuentan con una amplia trayectoria en educación matemática. La entrevista tiene el propósito de corroborar el escenario actual de la resolución de problemas con estudiantes de básica secundaria en las aulas y de esta manera consolidar el problema.
- **Método Delphi:** esta técnica se adelanta para obtener un consenso de alto grado de confiabilidad, a partir de la convergencia de las respuestas de las encuestas a los expertos. Se desarrolla encontrando las frecuencias absolutas, relativas y acumuladas, para hallar los puntos de corte y así encontrar un criterio de alto nivel de objetividad, determinando la problemática que se va a intervenir.
- **Test inicial:** se aplica antes de llevar a cabo las actividades concernientes al sistema de actividades**,** con el objetivo de conocer el alcance de las habilidades de los estudiantes. Estos resultados permiten centrar de forma concreta y acertada las actividades que se desarrollan durante la práctica.
- **Bitácora:** se usa un diario para hacer registros en cada una de las intervenciones en aula a considerar, con el objetivo de estudiar aspectos referentes al desarrollo de la investigación.
- **Observación Participante:** se implementa con el propósito de tener una perspectiva concreta de la unidad de análisis, para que sea más precisa la forma de comprender la situación que se aborda y el cambio que se genera a partir de la intervención.

- **Encuestas de satisfacción (estudiante):** este instrumento permite identificar las percepciones con respecto a la implementación de las actividades y sus alcances logrados, en relación con sus saberes construidos o reforzados, se desarrolla en un formato con preguntas cerradas y algunas abiertas, es de carácter anónima.
- **Análisis de videos:** las actividades en aula son grabadas con la intención de hacer un análisis detallado de cada uno de los elementos que se quieren identificar (percepciones, dificultades, entre otras). Con este instrumento se pretende captar algunos momentos de la práctica que pueden pasarse por alto en la observación directa del participante.
- **Rubricas de evaluación:** en ellas se establecen criterios para cada una de las actividades, de tal forma que pueda evaluar de manera objetiva y crítica el aprendizaje construido y las habilidades desarrolladas en el proceso.
- **Prueba no paramétrica de Wilconxon:** el propósito es comparar los resultados antes y después de la implementación del sistema de actividades para determinar si existen cambios significativos en el proceso de aprendizaje de los estudiantes y así obtener argumentos en la validación del modelo didáctico.

3.5. Fases de la investigación

El desarrollo de esta investigación se fundamenta en cuatro fases, cada una de ellas con tareas específicas, orientadas al avance continuo y detallado, estas son:

Fase 1. Exploratoria: tiene como objetivo consolidar el sustento teórico y metodológico en los cuales se basa el estudio; se analiza de manera profunda y detallada investigaciones que aportan de forma significativa en el afianzamiento de la propuesta, así como encuestas a expertos y entrevistas a especialistas. Además, se planea e implementa una actividad práctica exploratoria.

Fase 2. Diseño: el propósito es elaborar actividades que permitan realizar un estudio piloto, para llevar a cabo un análisis minucioso en búsqueda de irregularidades, de tal forma que puedan ser modificadas, con el ánimo de adelantar bases para la elaboración del modelo didáctico. Además, se determina el tipo y enfoque investigativo, el alcance, la unidad de análisis, los métodos, técnicas e instrumentos.

Fase 3. Trabajo de Campo: en esta etapa se aplican actividades exploratorias y se implementa las actividades, se valida el modelo didáctico y el sistema de actividades.

Fase 4. Análisis de resultados. Informativa: se consolida la implementación del aporte teórico y práctico. Asimismo, se revisan detalladamente los resultados obtenidos luego de ser analizados todos y cada uno de los instrumentos aplicados, se redactan y se incluyen en el trabajo escrito.

Conclusiones del capítulo 3

La investigación se fundamenta en un paradigma de investigación cualitativo, delimitado por un enfoque cualitativo y un diseño de investigación acción. Su unidad de análisis está dada por un grupo de 30 estudiantes de secundaria de la institución Nuestra Señora de la Salud del municipio Supatá en Cundinamarca.

Se presentan los métodos (Análisis de fuentes, Histórico–lógico, Análisis y síntesis y Enfoque sistémico y de modelación), técnicas e instrumentos (encuesta a docentes, entrevistas a especialistas, método Delphi, test inicial, bitácora, observación participante, encuestas de satisfacción (estudiante), video y audio, rúbricas de evaluación y Prueba no paramétrica de Wilconxon) que se usan durante todo el proceso investigativo, además se explican las fases: exploratoria, diseño, trabajo de campo, análisis y presentación de resultados, los cuales guían el desarrollo de este estudio.

CAPÍTULO 4. MODELO DIDÁCTICO PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS RETADORES MEDIADO POR LA MODELACIÓN GEOMÉTRICA

En este capítulo se abordan algunos referentes sobre el término modelo didáctico y se presenta un modelo didáctico para la resolución de problemas retadores mediado por la MGA.

4.1. Referentes sobre modelo didáctico

Un modelo didáctico es interpretado como "*una herramienta teórico-práctica con la que se pretende transformar una realidad educativa, orientada hacia los protagonistas del hecho pedagógico como lo son estudiantes y docentes*"[78]. Para Cronos (1994) un modelo didáctico "*[…] puede regular la producción del conocimiento y el aprendizaje en el contexto escolar, y que, por tanto, contribuye a organizar mejor la planificación y la acción práctica de la enseñanza*"[79]. De este modo, esta investigación reconoce un modelo didáctico como un sistema de componentes que favorecen el proceso de enseñanza y aprendizaje, a partir de la realidad educativa, fundamentándose en la práctica para alcanzar los objetivos, considerando el contexto escolar y la planificación de la actividad pedagógica.

4.2. Modelo didáctico

A continuación, se hacen explícitas las limitaciones que demuestran la necesidad del modelo didáctico, a partir de la triangulación de los resultados obtenidos por medio de entrevistas a expertos, encuestas a docentes, la revisión de la literatura, un estudio exploratorio y la experiencia de la investigadora.

Caracterización. Para determinar las particularidades relevantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje se tienen en cuenta los siguientes resultados, en cuanto a:

---

[78] Romero, N. & Moncada, J. (2007). Modelo didáctico para la enseñanza de la educación ambiental en la Educación Superior Venezolana. *Revista de Pedagogía*, 28(83). p.444.
[79] Cronos (1994). Proyecto de enseñanza de las Ciencias Sociales: el modelo didáctico: Enseñar y aprender Ciencias Sociales. Algunas propuestas de Modelos Didácticos. Madrid, Mare Nostrum ediciones, col. Forum Didáctico.p.141.

Docentes.

- Abordan la resolución de problemas no como una estrategia primordial en el proceso de enseñanza y aprendizaje, usualmente proponen pequeños espacios para la vinculación en el aula.
- Usan pocos recursos didácticos y tecnológicos en el proceso de enseñanza y aprendizaje en la resolución de problemas, además lo hacen con muy baja periodicidad y sin un objetivo de aprendizaje claro.
- El uso de la MGA como mediadora de la resolución de problemas en el aula presenta una baja asiduidad, se utiliza para la comprensión de algunos conceptos o la resolución de problemas rutinarios como una forma simple de representación.
- Presentan barreras para el planteamiento de actividades de aula que fomenten la resolución de problemas retadores y la MGA, porque desconocen las características importantes de un problema retador.

Concepción del proceso enseñanza y aprendizaje.

- El escaso conocimiento acerca de la MGA conlleva a que el uso de ésta no intervenga en el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Dado que la modelación no es un mediador constante en el proceso de resolución de problemas en el aula, se requiere tiempos extensos al intentar dar solución a un problema retador.

Contenidos y métodos.

- Los contenidos matemáticos en el aula son aislados unos de otros. Por ende, las actividades de aula son tradicionales con escasas didácticas innovadoras y de modelado.

- Se evidencia la memorización y el uso de fórmulas, disminuyendo posibilidades para el desarrollo de habilidades de resolución y creación de problemas retadores. Debilitando la creatividad y favoreciendo la mecanización de la matemática.

Organización de la clase.

- El estudiante es un agente pasivo dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje, tiende a tomar nota de los registros del docente y a dar solución a ejercicios matemáticos rutinarios similares a los resueltos por el docente.

- El interés principal de la enseñanza de la matemática es abarcar contenidos en espacios cortos, impidiendo el desarrollo de procesos cognitivos y metacognitivos en la modelación.

- En las actividades desarrolladas no se contemplan problemas matemáticos con múltiples maneras de llegar a una solución, dado que no se proponen problemas que abarquen interdisciplinariedad y el desarrollo de habilidades para llegar a la generalización.

- Son escasos los espacios que se dan en la clase para que el estudiante pueda validar la solución de un problema matemático en socialización con sus pares.

Evaluación.

- La evaluación es limitada, se enfoca a la resolución de problemas rutinarios similares a los vistos en el desarrollo de la clase.

- Los procesos cognitivos y metacognitivos que se dan con el MGO no son evidencia en la evaluación del aprendizaje, dado a los escasos espacios de modelación que se generan en el aula.

Estudiantes.

- Se les dificulta la interpretación de un problema al relacionar el lenguaje verbal y el lenguaje matemático. Por ende, el rigor es escaso para argumentar y validar la resolución a un problema matemático.

- Escaso dominio de sus conocimientos previos para usarlos en el abordaje de un problema, demostrando pocas destrezas para identificar la información y las variables que se presenta en un problema.

Tendencias. Dado los resultados de la revisión de diversas investigaciones a nivel mundial con respecto a la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas donde se involucra la MGA, se dan conocer las siguientes tendencias, en relación con las dificultades que presentan.

- Escasos aportes a la Educación Matemática realista en el campo didáctico influyen en la práctica pedagógica del docente y el proceso de aprendizaje del estudiante en contextos reales auténticos.

- Se carece del uso de metodologías que propicien motivación, innovación, creatividad y la resolución de problemas retadores, donde se favorezca la creación de sentido matemático y la integración de otras disciplinas.

- Limitado uso de recursos y estrategias didácticas dentro de la práctica pedagógica, encaminados al fortalecimiento de habilidades para la resolución de problemas retadores mediados por la MGA.

- Escaso seguimiento al proceso cognitivo y a la evaluación formativa en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, restringiendo el uso del MGO como un mediador para el desarrollo de habilidades matemáticas.

Factores. Se evidencian elementos que inciden en el contexto de la MGA que limitan significativamente su aporte al desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes.

- Limitados procesos de MGA en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la educación primaria y secundaria. Debido al uso frecuente de metodologías tradicionales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, que no favorecen la creación de sentido en los estudiantes.

- Escasos conocimientos sobre un problema retador donde se usan contextos reales auténticos cercanos al estudiante, debido al recelo que se presenta al cambio de escenarios, recursos y estrategias en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

- Insuficiente dominio de la modelación en la práctica educativa, limitando al estudiante a la apropiación de la matemática en un problema real para dar significado.

Necesidad*.* Atendiendo a la revisión de la literatura y las entrevistas a expertos, se evidencia la escasa existencia de modelos didácticos que se enfoquen a desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes, donde se aborde la MGA como dinamizador de la enseñanza y aprendizaje de la resolución problemas en contextos auténticos. Por ende, se reconoce la necesidad de proponer un modelo didáctico en base a lo siguiente.

Por su parte, Romero & Moncada (2007) sostienen que *"un modelo didáctico es una herramienta con la que se pretende transformar una realidad educativa"*[80]*,* en este sentido a partir de la caracterización de la realidad educativa se hace necesario el planteamiento de un modelo didáctico. El cual, permite intervenir hacia la mejora de las dificultades encontradas en el proceso de enseñanza y aprendizaje, dando una transformación en los dos protagonistas del hecho educativo, tanto en docentes como en estudiantes. El

[80] Romero, N., & Moncada, J. (2007). Modelo didáctico para la enseñanza de la educación ambiental en la Educación Superior Venezolana. *Revista de pedagogía*, *28*(83). p. 455.

papel de ambos se debe forjar desde la participación y la dinámica, uno como constructor del conocimiento matemático y el otro como guía en la construcción robusta de este pensamiento.

Por su parte, para Pineda & Delgado (2020) "un modelo didáctico es un potente instrumento intelectual para abordar los problemas educativos*, ayudándonos a establecer el necesario vínculo entre el análisis teórico y la intervención práctica*[81]*"*, la conexión entre lo teórico y lo práctico no puede darse en la educación tradicional. Por tanto, es importante establecer una herramienta que contemple ambos procesos en la educación matemática.

A partir de lo expuesto anteriormente, nace la oportunidad de proponer un modelo integrador que busque el favorecimiento del quehacer pedagógico, así como las formas de concebir el saber matemático a partir de las experiencias que concreten la teoría y la práctica. En este sentido, un individuo construye su conocimiento si participa de manera activa en el aprendizaje a través de la interrelación de sus experiencias y de sus aprendizajes previos, en la búsqueda de lo que le es relevante, lo estimule y lo satisfaga (Pineda & Delgado, 2020).

Bressan et al. (2016) consideran que lo más importante de la matemática realista es que la enseñanza de la matemática debe estar interconectada con la realidad, estar cerca a los estudiantes y ser notable para la sociedad. En esta dirección, se necesita un modelo didáctico que integre contextos auténticos próximos a los estudiantes. Que, por su parte, favorezca la creación de sentido matemático y que influya en el desarrollo del pensamiento matemático.

Otro punto es que, el modelo didáctico debe ser un prototipo que guía la planeación práctica del docente hacia nuevas estrategias diligentes y participativas, dejando de lado el aprendizaje rutinario, memorístico de las matemáticas y alejado de la realidad. Por ende, la enseñanza de las matemáticas debe concebir

---

[81]Pineda, J. & Fraile, F. (2020). El modelo didáctico como articulador del sistema-aula: un estudio de caso en educación secundaria. *Estudios pedagógicos (Valdivia), 46(1).* p.288.

la forma de reinvención guiada, el docente como guía y organizador de la interacción entre pares (Freudenthal, 1991).

En relación con lo mencionado, se hace necesario presentar un modelo didáctico que:

- Fortalezca el desarrollo de habilidades para la comprensión y contextualización de un problema retador en un contexto real auténtico, a través de robustos conocimientos de la MGA.

- Desarrolle el pensamiento matemático por medio de actividades mediadoras del aprendizaje dirigidas a la resolución de problemas retadores, donde el estudiante sea un agente activo del proceso.

- Fomente la creación de sentido matemático mediante procesos cognitivos y metacognitivos en el aprendizaje y se favorezca la interrelación de los contenidos matemáticos de manera didáctica, dinámica, con rigor y dirigidos a la generalización.

- Se robustezcan procesos de visualización para interpretar y reflexionar acerca de imágenes y que permitan la articulación entre las representaciones, los contextos auténticos y las matemáticas.

- Tribute al uso de experiencias sociales en colisión con los conocimientos previos del estudiante, para que en las estructuras cognitivas se adapten y se construyan aprendizajes matemáticos nuevos.

Fundamentos del Modelo. En este apartado se hacen explícitos los fundamentos que sustentan el modelo didáctico.

Fundamentos Filosóficos. El saber matemático se consolida de diversas maneras, una de ellas según Davis y Hersh (1988), Lakatos (1978) es la experiencia porque robustece redes de motivación e interés en el estudiante, partiendo de los razonamientos y atributos de las matemáticas que él domina. Es así como, la experiencia matemática emerge a partir del intercambio de ideas, que puede darse en comunidad y convertirse en un aprendizaje significativo, desarrollando habilidades matemáticas superiores. Por tanto, es importante que la construcción del conocimiento matemático se lleve a cabo desde la colectividad, de forma dinámica e innovadora, soportada en la comprensión común y la interacción.

Fundamentos Psicológicos. El desarrollo cognitivo se da por etapas en el lapso de la vida del individuo. Para Piaget (1980) este proceso se presenta en cuatro etapas, la sensoriomotora, preoperacional, de las operaciones concretas y de las operaciones formales. Las cuales, hacen una transición hasta llegar a lo complejo y abstracto en una sucesión invariante, que se funda entre la maduración del individuo y la influencia de su entorno.

De esta manera, el desarrollo del conocimiento se da cuando el sujeto realiza un equilibrio interno de acomodación y el ambiente en el cual se desenvuelve, asociando experiencias, de manera armónica entre el contexto que lo rodea y las estructuras internas de su pensamiento. Por tanto, el aprendizaje se da si la práctica social entra en colisión con los saberes previos, además de las estructuras cognitivas que se reajustan para incorporar una nueva práctica.

Fundamentos Pedagógicos-Didácticos. Para el aprendizaje de las matemáticas es fundamental el uso de situaciones de la cotidianidad o problemas contextuales auténticos, que puedan matematizarse y resolverse a través de modelos, que median lo concreto y lo abstracto. De esta manera cobra relevancia la matemática realista en el aprendizaje y en el desarrollo de habilidades matemáticas.

Alsina (2009) en base a las ideas de Freudenthal (1991), reconoce que la educación matemática realista (EMR) juega un papel fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje, dado que, el uso de contextos reales, de modelos, de construcciones y creaciones libres favorecen la cimentación del saber matemático. En este sentido, se concibe la matemática como una actividad del ser humano donde se explora, se interacciona, se reflexiona y se generaliza, donde el individuo pasa por lo intuitivo e informal hasta llegar a la formalidad, mediante una actividad social y, además, el contenido matemático se interconecta como un todo.

Fundamentos de la Educación Matemática. Se asumen los referentes teóricos actuales sobre la resolución de problemas, la visualización matemática, la modelación geométrica, los contenidos matemáticos y el Sense Making.

Objetivo y finalidad del modelo didáctico. El modelo didáctico tiene como propósito favorecer los vínculos teóricos y prácticos en el quehacer didáctico, condescendiendo en una transformación significativa en el aula, en cuanto a la planificación y la acción práctica que permita el desarrollo robusto del pensamiento matemático a través de la resolución de problemas apoyado en la modelación.

La finalidad de este modelo didáctico reside en:

- Favorecer las habilidades de MGA como mediadora de la resolución de problemas reales matemáticos y atribución de significados a los objetos matemáticos.
- Fortalecer el Sense Making para que propicie motivación, sentido y significado hacia el estudio de las matemáticas, consolidando procesos cognitivos y metacognitivos en los estudiantes.
- Robustecer habilidades de visualización matemática que permita el desarrollo de ideas, de razonamiento, comprensión y la construcción de modelos para la resolución de problemas retadores y la consolidación de conceptos matemáticos.
- Potenciar el quehacer didáctico de los docentes dentro su práctica educativa, que permita el diseño y aplicación de actividades retadoras para los estudiantes con miras al desarrollo robusto del saber matemático.

- Utilizar asistentes matemáticos y softwares educativos en el proceso de enseñanza y aprendizaje para la comprensión de los significados de los objetos matemáticos y como herramienta para la simulación, modelación y la resolución de problemas.

Contribuir al desarrollo del pensamiento matemático a través de actividades apoyadas en la resolución de problemas retadores mediados por la MGA en contextos auténticos.

Estructura del modelo didáctico. El modelo didáctico consta en su estructura tentativa de tres partes. A continuación, se presenta la estructura del modelo didáctico y se hacen explícitos componentes que se abordan en cada una de sus partes.

Primera fase: Identificación.

A continuación, se presenta la fase inicial del modelo didáctico. Esta fase tiene como objetivo esencial establecer una identificación de fortalezas y oportunidades de mejora a partir de dos antecedentes, el primero va dirigido a reconocer la realidad educativa en el proceso de enseñanza y aprendizaje desde los actores principales el docente y el estudiante, fundamentados en la Educación Matemática realista bajo tres principios:

- *Realidad:* cómo y cuándo los actores hacen matemáticas usando de contextos reales auténticos o simulados para la solución de problemas en el aula, además de identificar si la resolución de problemas es un eje dinamizador del desarrollo del pensamiento matemático en el aula.
- *Interacción:* identificar características de la actividad social que debe darse en el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- *Interconexión:* conocer como el contenido matemático es articulado y concebido como un todo.

El segundo antecedente es el reconocimiento de la necesidad educativa, luego de encontrar los puntos fuertes y débiles de todo el proceso de enseñanza y aprendizaje, se debe proponer la oportunidad de mejora que debe perseguirse (ver Figura 9).

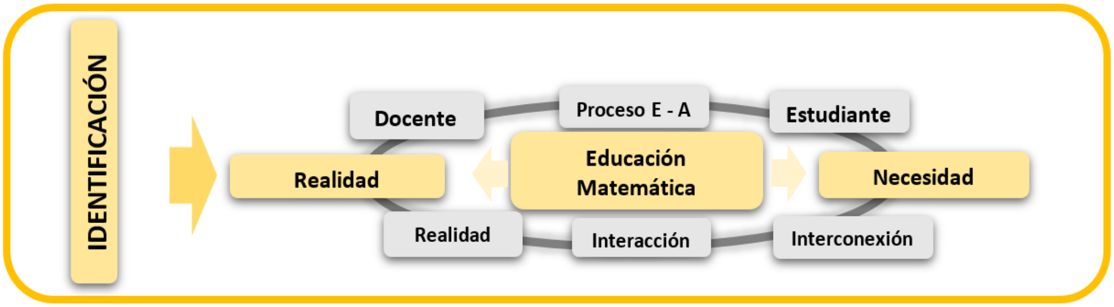


Figura 9.Identificación como primera parte del modelo

Segunda fase: Resolución.

Esta etapa está compuesta por los siguientes referentes: principio del carácter transversal de la visualización matemática como elemento rector. Además, de la resolución de problemas, la MGA como ejes didácticos, el Sense Making y el contenido matemático como la articulación entre la creación de sentido, la significación matemática y el contenido como un indivisible en la cimentación del conocimiento y el desarrollo robusto del pensamiento matemático.

La interrelación de forma sistémica de estos componentes propicia una relación intrínseca, la cual conduce a la cimentación del saber matemático. Como elemento dinamizador del modelo didáctico se encuentra la MGA, debido a que sus características se apropian de la resolución de problemas retadores en contextos reales auténticos. A continuación, se presentan cada uno de los referentes en cuanto a las funciones y relaciones que existen entre ellos (ver Figura 10).

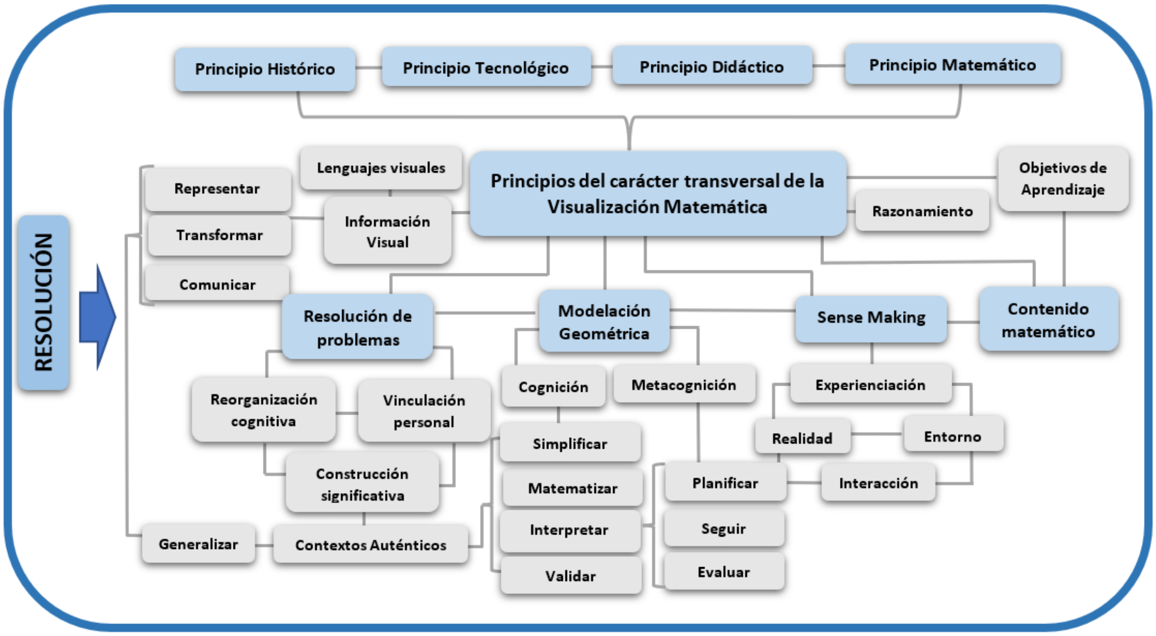


Figura 10. Resolución como segunda parte del modelo

Principio del carácter transversal de la visualización matemática. La visualización es una habilidad que presenta de diversas maneras la información visual en el pensamiento matemático, haciendo uso de nociones matemáticas, del lenguaje y lo gestual. La visualización pone en ejercicio estructuras cognitivas para la resolución de problemas porque es un conjunto de procesos mentales que se dan en la actividad matemática. La información y el lenguaje visual permite tres acciones fundamentales en este modelo didáctico: representar, transformar y comunicar, las cuales, favorecen habilidades de razonamiento y de generalización que se dan en base a la solución de problemas en contextos auténticos mediados por la MGA.

Por su parte la visualización presenta un principio relativo o transversal, se toman algunos de acuerdo con el objetivo de la investigación, entre ellos los siguientes:

- Histórico: la visualización aporta significado a través de la contextualización histórica de problemas matemáticos que pueden darse a raíz del aspecto cultural, social y desde el desarrollo matemático a través del tiempo. Dicho significado permite valorar el componente cultural mediante el proceso de resolución de problemas.

- *Tecnológico:* la visualización retoma un papel importante en el aprendizaje por su alto nivel de abstracción. Los cuales, movilizan diversos procesos cognitivos en los estudiantes. Además, la visualización se dinamiza con el uso de herramientas tecnológicas, favoreciendo el planteamiento y resolución de problemas matemáticos. En este sentido, el uso de representaciones digitales en diversas formas de representación sea éstas, simbólicas, gráficas, numéricas, entre otras, como elementos mediadores que admiten un mayor acercamiento a la representación y construcción múltiple de conceptos matemáticos, facilitando el acceso a niveles más avanzados en el aprendizaje.
- *Didáctico:* la visualización puede reconocerse como un potente recurso didáctico que media la enseñanza y el aprendizaje. Debido a que, la visualización permite la construcción de conocimientos que favorecen la generalización, el razonamiento, entre otras habilidades cognitivas, porque sirve como un fundamento de percepción sensorial y como medio auxiliar en la resolución y planteamiento de problemas, además origina marcos de referencia para el procesamiento de la información verbal y escrita (Benites et al., 2005).
- *Matemático.* La visualización participa en la articulación de estructuras cognitivas por medio de representaciones de un objeto matemático, siendo un medio que admite una mayor comprensión y la construcción abstracta de conceptos matemáticos, porque desempeña un papel de razonamiento a través de la formación de imágenes visuales en la mente y la imaginación de algo que no se tiene a la vista.

Resolución de problemas. Es un proceso fundamental en la cimentación del conocimiento matemático y, por ende, en el desarrollo del pensamiento de los individuos. A partir de la reorganización cognitiva el estudiante se apoya en sus saberes ya construidos y pone en juego todas sus habilidades matemáticas.

Además, se vincula con lo personal bajo el reconocimiento de contextos cercanos a él y la consolidación significativa de nociones a partir de las experiencias propias fundamentadas en el modelado.

La resolución de problemas es una actividad dinámica que fomenta la creatividad, pone en juego los saberes adquiridos en la significación de la realidad, manifiesta la capacidad para analizar, comprender, razonar y generalizar a partir de diversos contextos. Por tanto, la resolución de problemas matemáticos retadores se perfecciona con el uso de la MGA porque su complemento beneficia la creación de sentido matemático, debido a que ambos procesos se desarrollan de manera natural en el estudiante.

Tanto la resolución de problemas como un logro permanente que nace de los esfuerzos de dar orden y sentido retrospectivo y la MGA son el eje central para el abordaje del contenido matemático. Los dos procesos pueden apalancar la enseñanza y el aprendizaje, porque desarrollan competencias de alto nivel, vinculando la realidad en el saber matemático, la regulación y la experiencia, fundamentos significativos que tributan a la consolidación de un pensamiento matemático sólido.

Modelación geométrica. Es una herramienta didáctica en el quehacer pedagógico. Por tanto, favorece el proceso de enseñanza y aprendizaje porque parte de lo concreto a lo abstracto, desde lo matemático a lo real y viceversa. Es fundamental para la construcción del saber y la creación de sentido, a partir de la elaboración de modelos que emergen de la actividad matemática de los estudiantes, como un recurso para representar e instituir contextos y situaciones problema.

La MGA ofrece aportes significativos en la comprensión de las matemáticas, dado que tiene un valor notable en contextos reales auténticos bajo la significación de la realidad simplificada capaz de convertirse en lo matemático formal. Los modelos geométricos que se construyen presentan relaciones estrechas con la resolución de problemas retadores debido a que, robustecen las habilidades matemáticas, el sentido y el pensamiento matemático.

Los modelos construidos desde la MGA aparte de ser representaciones son elementos de trabajo, donde se ejecutan diversas operaciones como visualizar, explicar, comparar, entre otras (Bressan et al.,2016). Por su parte, la visualización matemática imbrica en la MGA como un complemento, la visualización toma un papel heurístico y dinamiza la construcción de modelos aportando elementos cognitivos para la resolución de problemas retadores.

En esta medida, la MGA a partir de la consolidación de cuatros fases (simplificar, matematizar, interpretar y validar) propicia la resolución matemática de problemas del mundo real, generando en los estudiantes motivación, dinamismo y gusto por el aprendizaje de las matemáticas. Así mismo, estimulan la aplicación de estrategias cognitivas como metacognitivas que apoyan la maduración del conocimiento, flexibilizando la aplicación en niveles más avanzados.

Desde esta disposición, la MGA contribuye en el desarrollo del pensamiento matemático dado a que promueve la vinculación de ideas lógicas, tanto individuales como en equipo. Es decir, el conocimiento, la regulación y la construcción de cosmovisiones a partir de la experiencia.

Sense Making. La creación del sentido matemático se construye a partir del abordaje de problemas retadores en contextos auténticos como fuente de significado. Durante el proceso de resolución, el estudiante vincula elementos de su entorno y la realidad en el aprendizaje, siendo el conocimiento el producto de sus interacciones entre la acción humana y la realidad. En esta dirección, la creación de sentido matemático se da a lo largo del proceso cognitivo y metacognitivo donde se vinculan resolución de problemas, MGA, visualización y el desarrollo de los contenidos matemáticos que van durante toda la formación académica en las diferentes etapas de pensamiento.

Contenido matemático. Es una relación existente entre la realidad, los modelos y todos los ejes temáticos que se establecen hacia la consecución del aprendizaje. El contenido matemático consolida el proceso de enseñanza y aprendizaje, como una guía que media, direcciona el desarrollo práctico y teórico de los conocimientos que se pretenden construir para el desarrollo del pensamiento matemático. En esta medida, la visualización, la resolución de problemas y la MGA es el eje principal de todo el proceso educativo porque dinamiza el desarrollo del contenido matemático como elementos didácticos que se cohesionan para permitir la significación y el sentido matemático.

En esta dirección, el perfeccionamiento de la didáctica de los contenidos matemáticos se basa en procesos esenciales como la atribución de significados de objetos matemáticos bajo la actuación principal del estudiante en todo el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Tercera fase: Concreción práctica.

En esta etapa se presentan los elementos que dinamizan el aporte práctico del modelo y que tiene relación directa con las fases anteriores (ver Figura 11).

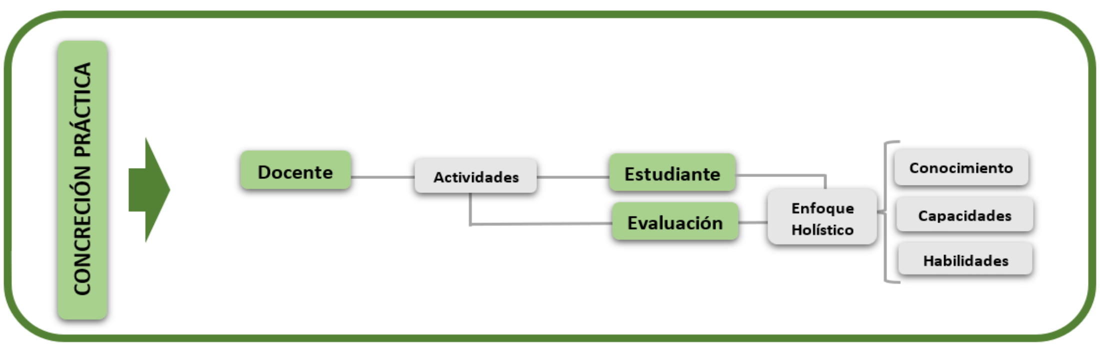


Figura 11. Concreción práctica como tercera parte del modelo

Sistema de actividades. Se diseñan e implementan 8 actividades donde se concretan todos los referentes propuestos en la fase de resolución. Estas actividades se apoyan con el uso de la tecnología, algunos software y simuladores en línea que permiten validar los modelos creados.

Forma de instrumentación en la práctica. Se presentan y valoran las sugerencias metodológicas para la implementación del sistema de actividades. Dichas sugerencias se exponen de manera individual por cada actividad propuesta, además se le presenta a los estudiantes elementos para tener en cuenta y poder orientar su trabajo.

Forma de evaluación. Está dada en cada una de las actividades propuestas, así como el objetivo que se espera alcanzar en cada una de ellas. Su eje principal es la evaluación en el proceso cognitivo y metacognitivo de los estudiantes, bajo el enfoque holístico para la valoración de modelos, con el propósito de comprobar los conocimientos, las habilidades y las capacidades desarrolladas en los estudiantes.

Análisis de resultados. Se toma como referido los fundamentos y referentes del marco teórico, asumidos en busca de evidencias. Esto se hace a través del desempeño de los estudiantes en cada una de las actividades bajo categorías establecidas, estudiando logros y oportunidades de mejora, tanto en lo cognitivo como en lo metacognitivo.

Luego de la interrelación entre las categorías: resolución de problemas, la MGA, el Sense Making y el contenido matemático, permeadas por el principio transversal de la visualización matemática, surge un nuevo atributo: la construcción robusta del pensamiento matemático en los estudiantes, a partir de uso de contextos reales auténticos y simulados.

Características significativas del modelo didáctico

- *Contextual:* el modelo pone a los actores principales docente y estudiante frente a un contexto de enseñanza y aprendizaje, con roles específicos que permite guiar todo el proceso para la consolidación del saber matemático, además de favorecer el quehacer pedagógico del docente, también pone en apropiación al estudiante de su educación matemática.
- *Dinámica:* este modelo ofrece al docente y al estudiante un papel activo en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Por su parte, el estudiante usa la MGA en la resolución de problemas retadores como un mediador para construcción y robustecimiento del pensamiento matemático y el docente asume

el papel de guía y orientador en todo el proceso. Dicho modelo, también concede el uso de diversos recursos, herramientas y estrategias para el trabajo con sus pares.

- *Significativa - Funcional:* dada la relación que tiene con los contextos reales auténticos, es útil para la comprensión y la cimentación del conocimiento matemático del estudiante. Los aprendizajes construidos favorecen la generación en diversos contextos que puedan darse, además activa la creación del sentido matemático de los estudiantes proporcionando una percepción global de las matemáticas.
- Compleja: suscita la activación de conocimientos previos que parten de la experiencia del estudiante y se median con la MGA en problemas retadores en un contexto real. Los cuales, vienen a reacomodarse para integrar una nueva experiencia que se da dentro de todo el proceso en situaciones significativas para el estudiante.

Relaciones del modelo didáctico. A continuación, se procede a determinar las relaciones esenciales del modelo.

A partir de los fundamentos del modelo, se propone realizar una identificación de oportunidades de mejora en el proceso educativo desde los principios de la Educación matemática realista. Luego, se discurre a la apropiación de referentes como es, el principio transversal de la visualización, MGA, la resolución de problemas y el Sense Making, para diseñar e implementar un sistema de actividades con una metodología que promueva el dominio de conceptos. Además, que en consecuencia el modelo favorezca la construcción robusta del pensamiento matemático con la apropiación de la resolución de problemas retadores en contextos auténticos para estudiantes del grado octavo, los cuales son concretados en el aporte práctico y asumidos en esta investigación. Por tanto, se puntualizan las siguientes relaciones significativas:

- En el conjunto de fundamentos filosóficos, psicológicos y didácticos. Los cuales, marcan los cimientos para esbozar la caracterización y como sustento para encontrar la necesidad de la construcción del modelo didáctico.
- El uso de referentes de la Educación matemática realista desde tres principios: la realidad, la interacción y la interconexión, como base principal de la identificación de la realidad y la necesidad educativa para hallar las oportunidades de mejora en el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- En la agrupación de referentes que permean la etapa de resolución del modelo didáctico, donde la visualización, la MGA y resolución de problemas retadores propone una nueva particularidad, además de la creación de sentido y significación matemática.
- En concreción los fundamentos y referentes teóricos, la caracterización, la necesidad hallada y la etapa de la resolución del modelo didáctico son elementos que favorecen una proyección didáctica, dirigida a consolidar una concreción práctica en busca de lograr los objetivos de aprendizaje.

Atendiendo a lo anterior, se expone la representación gráfica del modelo didáctico asumido como aporte teórico en esta investigación (ver Figura 12).

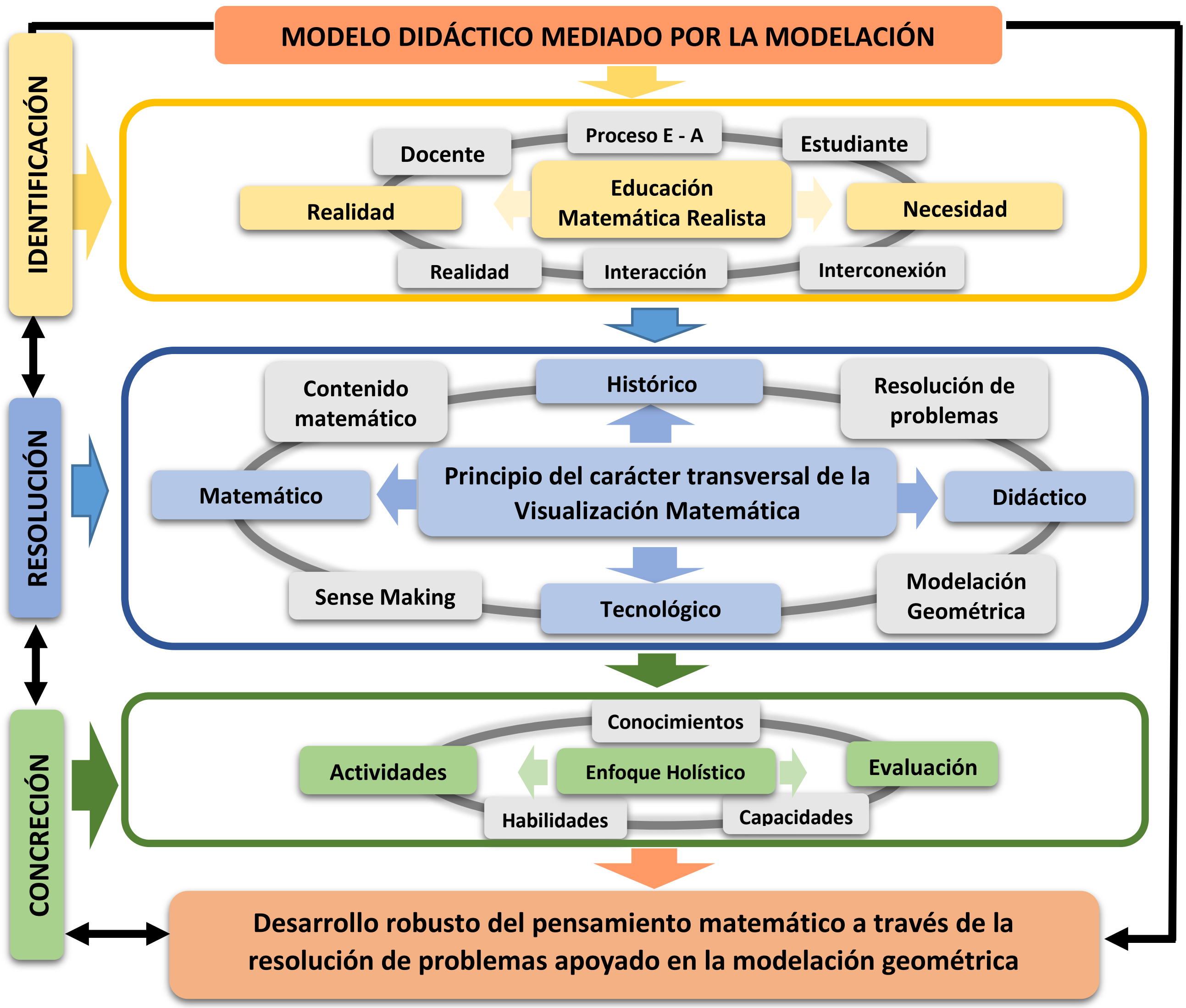


Figura 12. Modelo didáctico mediado por la modelación geométrica.

Conclusiones del capítulo 4

En este capítulo se expone todo el proceso que se lleva a cabo para la consolidación del modelo didáctico. Como primera medida se realiza una caracterización del proceso de enseñanza y aprendizaje de los actores principales docente y estudiantes, así como, los métodos, los contenidos, la organización de la clase y la evaluación del aprendizaje. Los resultados de esta caracterización se obtienen a través de la triangulación de los datos recolectados por entrevistas a expertos, encuestas a docentes, revisión de la literatura y la experiencia de la investigadora.

La caracterización permitió reconocer las tendencias internacionales que señalan las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje en la secundaria, también se reconocen los factores que inciden en los contextos de la MGA y como estos restringen el desarrollo del pensamiento matemático. Por tanto, se manifiesta la necesidad de proponer un modelo didáctico que transforme de manera significativa los procesos en el aula.

En segunda medida, se presenta el modelo didáctico fundamentado desde lo filosófico, psicológico, pedagógico y de la educación matemática, estableciéndose su objetivo y finalidad. Además, se enseña la estructura del modelo en tres fases: la primera fase es la identificación, la cual propone una caracterización de la realidad y necesidad educativa desde la Educación Matemática Realista basada en realidad, interacción e interconexión. La segunda fase es la de resolución fundada en el carácter transversal de la visualización donde se toman algunos principios como el histórico, matemático, tecnológico y didáctico, la resolución de problemas, la MGA, el contenido matemático y el Sense Making. La tercera fase es la concreción práctica, la cual, propone un sistema de actividades sustentado en el modelo mediado por estrategias y una evaluación holística.

En tercera medida, se presentan las características y relaciones esenciales del modelo tomando la modelación geométrica como elemento dinamizador, para la construcción robusta del conocimiento matemático en los estudiantes de grado octavo de la básica secundaria.

CAPÍTULO 5. SISTEMA DE ACTIVIDADES PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS RETADORES MEDIADA POR LA MODELACIÓN GEOMÉTRICA

5.1. Sistema de actividades para la resolución de problemas retadores basado en el procedimiento de la modelación geométrica.

A continuación, se presenta la descripción de cada una de las actividades que conforman el sistema. Dichas actividades se encuentran enmarcadas dentro de los referentes de calidad del MEN, pero que a su vez son base fundamental para acercarse a crear conocimientos matemáticos más avanzados dando pautas a un currículo más retador, entre estos referentes se tienen:

Estándares Básicos de Competencia (EBC)[82]

- *"Conozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en teoremas.*
- *Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.*
- *Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos".*

Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA)[83]

- *"Identifica las regularidades y argumenta las propiedades de figuras geométricas a partir de teoremas y las aplica en situaciones reales".*

En este sentido, se abordan contenidos de orden superior, con el propósito de avanzar en el desarrollo del pensamiento matemático, donde se favorecen procesos cognitivos de visualización, de resolución de problemas, la MGA y el Sense Making.

---

[82] MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencia*. Colombia. Pág. 84-87.
[83] MEN. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. Colombia. Pág. 62.

5.1.1. Actividad 1: La brigada de vacunación

Objetivo. Construir el concepto de camino hamiltoniano a través de un contexto real auténtico.

Sugerencia metodológica. El docente lleva a cabo actividades de visualización mental importantes para acercar a los estudiantes a un contexto real auténtico, en el cual se plantea los problemas. Se hace uso de un software en línea que permite la exploración y la interacción. Además, se favorece la construcción de modelos a través de preguntas heurísticas. Se contempla el trabajo individual y en grupo. El problema toma ideas de Greefrath, Siller, Vorhölter y Kaiser (2020).

Metas de aprendizaje:

A_1. Usa el concepto de camino para encontrar rutas y patrones en situaciones que implican conexiones entre puntos o lugares.
A_2. Identifica la estructura y representación de un grafo como un conjunto de nodos (vértices) conectados por aristas (enlaces).
A_3. Identifica las características de un camino hamiltoniano
A_4. Reconoce caminos hamiltonianos en un contexto real.

Recursos por utilizar. Mapa de Supatá (Google Maps), Mapa de red de carreteras, marcadores, regla, lápices de colores y papel.

Desarrollo de la actividad:

Momento 1. Motivación. Solicitar cerrar los ojos e imaginar segmentos, los relacionan con las calles y carreras por donde pueden transitar, parten desde la iglesia principal hasta llegar al colegio ¿cuántos caminos diferentes hay? Imaginar que el camino de acuerdo con el número de cuadras por las que se transita sea el más corto posible ¿cuántos segmentos fueron necesarios para delimitar el camino?

Momento 2. Exploración. Entregar una hoja con el mapa de Supatá (ver Figura 13a) a los estudiantes, observan detenidamente la ilustración e identifican (tomando los caminos más cortos de acuerdo con el número de cuadras que los compone) dos esquinas tales que hay exactamente dos caminos entre ellas, dos esquinas tales que haya exactamente tres caminos entre ellas y dos esquinas de tal forma que haya exactamente seis caminos entre ellas.

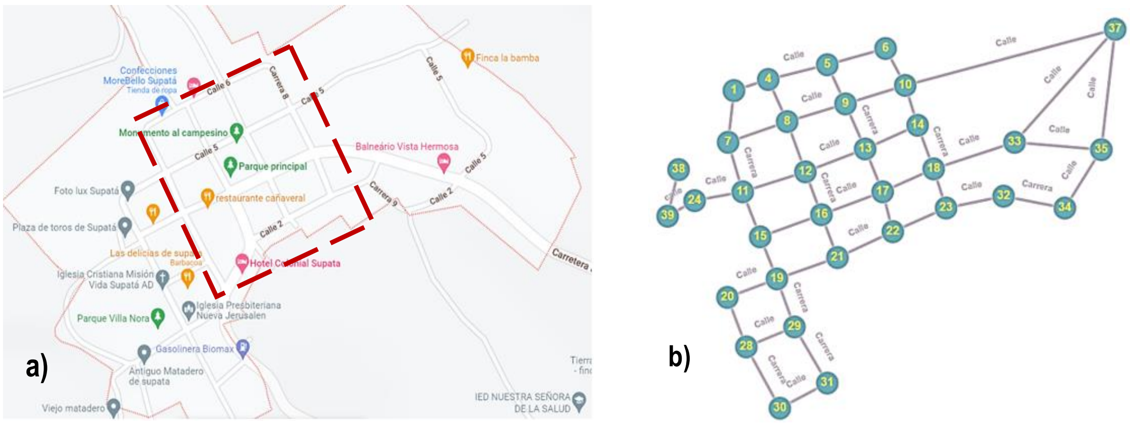


Figura 13. a) Mapa de Supatá, Google Maps (2023) y b) Mapa de red de carreteras, elaboración propia.

Momento 3. Estructuración. Entregar en grupo el mapa de red de carreteras del municipio (Figura 13b).

Problema 1. Imaginar que el repartidor de recibos de Alcanos deja su moto en una de las cuadrículas que se forman con las calles y carreras para entregar los recibos en el perímetro (ver Figura 13), debe avanzar desde las esquinas 15, 16 y 17 para llegar a las esquinas siete, ocho y nueve, no podrá ir hacia izquierda, debido a que, por organización de la empresa no pasarán dos veces por el mismo lugar, el deberá dejar su moto en las cuadrículas avanzando o hacia la derecha y hacia arriba. ¿Por cuántos caminos diferentes puede transitar el repartidor?

Sugerencia para el docente. Si los estudiantes demuestran en este ejercicio un alto nivel, proponer el siguiente problema: Imagina que una cuadrícula a la derecha se representa con "b" y una cuadrícula arriba con "a", ¿si adiciono las "a" y las "b" de cada camino se obtiene algún patrón? ¿Cuál? ¿Qué expresión puede obtenerse a partir de las expresiones encontradas?

Problema 2. El docente interviene de tal forma que los estudiantes reconozcan vértices y aristas en el mapa (ver Figura 14). Imaginan que la empresa **"Alcanos"** quiere entregar a las viviendas los recibos del servicio de gas para pago por sectores. Deben pasar por las esquinas de cada sector sin pasar dos veces por ellas, de tal forma que pase por la mayoría de las calles y carreras, ¿cuál camino se puede recorrer en cada sector? ¿Se pueden encontrar diferentes caminos que cumplan con la condición de no pasar dos veces por el mismo lugar?

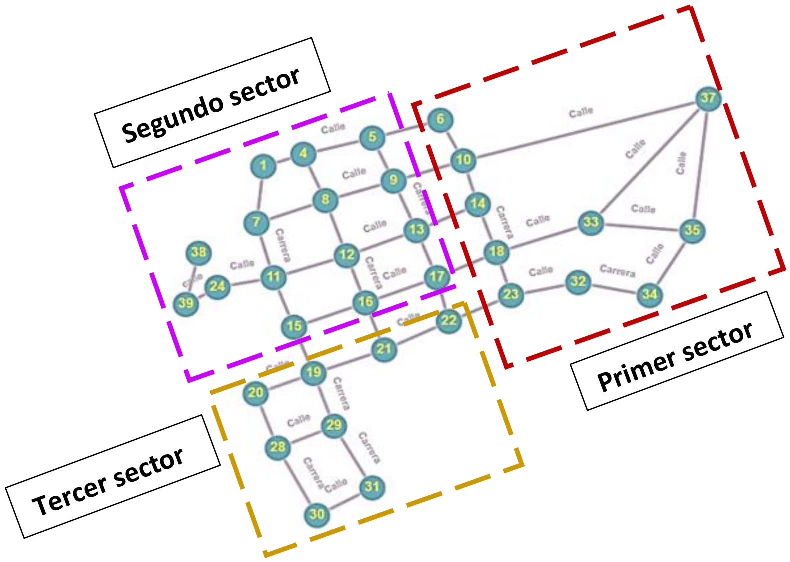


Figura 14. Mapa de la red de carreteras Supatá con sectores. Elaboración propia.

Momento 4. Transferencia. En grupo se ubican en el mapa de red de carreteras (ver Figura 13b).

Problema 1. Construir caminos posibles para el carro que recoge la basura de los contenedores que están ubicados en ciertas esquinas del pueblo, de tal forma que no pase dos veces por la misma cuadra. Identifican tres caminos posibles desde el contenedor de la esquina cuatro hasta el de la esquina 17, cuatro caminos posibles para el contenedor de la esquina 19 hasta el de la esquina 37 y cinco caminos para el contenedor que está en la esquina 24 hasta el de la esquina nueve.

Sugerencia para el docente. Si los estudiantes demuestran un alto nivel de desempeño puede indicarle que piense en lo siguiente: ¿a parte de los caminos solicitados se pueden crear más que cumplan la regla? ¿Qué significa que el camino del camión de basura no debe pasar dos veces por la misma cuadra?

Problema 2. ***La brigada de vacunación***. En Supatá se hacen brigadas de vacunación a niños menores de 10 años. Se ha determinado que al menos viven 16 niños menores de 10 años en cada una de las cuadras que forman una calle o carrera del municipio. La alcaldía dispone de un vehículo que hará una parada en cada calle o carrera para que los niños se acerquen. En un día se van a vacunar 80 niños en el sector como se indica en el mapa (ver Figura 13a) ¿cuál es el desplazamiento que debe realizarse de tal manera que, el vehículo no pase dos veces por la misma calle o carrera?

Cada grupo presenta sus respuestas e identifica aciertos y oportunidades de mejora. Se pide representar los modelos creados en el problema en el software en línea[84] y explorar las opciones respecto a caminos, se interroga ¿qué tipo de caminos construyeron? ¿Qué características tienen esos caminos?

Sugerencia para el docente. Si algunos grupos están rezagados acompañar con preguntas heurísticas y con una socialización para la generación de ideas ¿por qué cree que es importante que el vehículo no pase dos veces por la misma calle o carrera? ¿Qué pistas se pueden buscar en el mapa para tomar decisiones sobre el recorrido? ¿Qué cantidad de niños se pueden vacunar en cada calle o carrera? Preguntar a los estudiantes atendiendo el nivel de desempeño ¿Qué es entonces un camino hamiltoniano? ¿Se puede asegurar que un camino Hamiltoniano no es único? Entonces, el docente define el concepto Camino Hamiltoniano.

Concreción. En grupo escriben un problema de una situación fuera de este problema donde se use el concepto de camino hamiltoniano.

5.1.2. Actividad 2: Segundo día de brigada

Objetivo. Construir el concepto de ciclo hamiltoniano a través de un contexto real auténtico.

Sugerencia metodológica. Se debe acercar a los estudiantes a la solución del problema a través práctica la visualización mental, la manipulación de material concreto y el uso de recursos tecnológicos. Se motiva a los estudiantes a buscar la solución de los problemas por medio de la exploración y la interacción, la construcción de modelos y el uso de preguntas heurísticas. Se contempla el trabajo individual y en grupo.

Metas de aprendizaje:

[84] https://graphonline.ru/es/

A_1. Realiza inferencias basadas en las conexiones en un grafo.
A_2. Entiende cómo un recorrido puede comenzar y terminar en el mismo vértice, formando un ciclo cerrado.
A_3. Recorre partes del mapa de manera sistemática para comprender las conexiones entre los vértices y cómo estos pueden formar rutas cerradas.
A_4. Establece diferencias entre un camino y un ciclo hamiltoniano a partir de representaciones visuales.

Recursos por utilizar. Mapa de Supatá (Google Maps), mapa de red de carreteras, aros de colores, marcadores, regla, lápices de colores y papel.

Desarrollo de la actividad:

Momento 1. Motivación. Pedir a los estudiantes traer a su mente segmentos de diferente medida y construir una ruta que sale de la casa y regresa nuevamente a ella pasando por el parque principal, de tal forma que los segmentos representen calles y carreras ¿cuántas calles y cuántas carreras se deben recorrer? ¿Puedes imaginar otra ruta para llegar a casa? Explica tu respuesta.

Momento 2. Exploración. Poner nueve aros de colores en el piso, de tal forma que se forme un grafo, se explica a los niños que cada aro de color representa un " vértice" y que los aros están conectados por líneas imaginarias aristas. Los estudiantes intentan caminar de un aro al consecutivo, siguiendo las conexiones imaginarias entre los vértices. El objetivo es que recorran cada aro exactamente una vez y regresen al aro inicial.

Sugerencia para el docente. Luego de la exploración puede realizar las siguientes preguntas: ¿pudieron encontrar un camino que recorra cada aro una vez y regresar al punto de inicio? ¿Crees que siempre es posible encontrar un camino en cualquier patrón de aros? Genere las preguntas que considere atendiendo el nivel de desempeño de los estudiantes.

Momento 3. Estructuración. Los estudiantes en grupo trabajan los siguientes problemas:

Problema 1. La empresa que presta el servicio de internet “Supatá Comunicaciones” debe instalar el servicio a varias familias en cada uno de los sectores indicados (ver la Figura 14). El instalador parte de una de las esquinas donde deja el carro de insumos, debe pasar por todas las esquinas donde están la caja de conexión de la fibra óptica y para ahorrar tiempo no pasará dos veces por la misma esquina ¿cuál camino puede recorrer el instalador en cada uno de los sectores?

Sugerencia para el docente. Atendiendo el nivel logrado por los estudiantes proponer los siguientes problemas ¿se pueden encontrar diferentes caminos que cumplan con las dos condiciones? ¿Por qué se pueden obtener varias formas de trazar el camino?

Problema 2. Se ubican en el mapa de red de carreteras (ver Figura 13) e identifican caminos que partan de la misma esquina y que lleguen a ella sin pasar dos veces por la misma, encuentran seis caminos que pasen por cinco esquinas, encuentran cuatro caminos que pasen por ocho esquinas, encuentran tres que pasen por 10 esquinas y dos caminos que pasen por 12 esquinas.

Sugerencia para el docente. Identificar el desempeño de los estudiantes y proponer los siguientes problemas ¿por qué cree que hay diferentes cantidades de caminos para diversos números de esquinas? ¿Por qué puede ser difícil o imposible encontrar un camino que pase por todas las esquinas una vez y regresen a la esquina de inicio en ciertos casos?

Momento 4. Transferencia. Proponer problemas en grupo como los siguientes:

Problema 1. Construir caminos posibles para el carro que recoge las botellas plásticas recicladas de los contenedores instalados por la "CAR" ubicados en ciertas esquinas del pueblo. De tal manera que, no pase dos veces por la misma esquina y que, parta de una esquina y regrese a ella (ver Figura 13b). Ahora identifica dos caminos que sean más cortos que parta de la esquina 12, identifica tres caminos más cortos partiendo de la esquina 18 y cuatro caminos más cortos partiendo de la esquina 19. Luego preguntar ¿qué significa que un camino "parte de una esquina y regresa a ella"? ¿Por qué es importante que el carro no pase dos veces por la misma esquina?

Problema 2. ***Segundo día de brigada.*** La brigada de vacunación se realiza a niños menores de 10 años, se ha determinado que al menos vive un niño en una calle o carrera (ver Figura 13a). Además, es necesario empezar y terminar la vacunación en el mismo lugar, como mínimo se debe vacunar seis niños, aunque pueden ser más ¿cuál es la ruta que se debe realizar, de tal manera que se ahorre gasolina y tiempo?

Sugerencia para el docente. Apoye la solución del problema por medio de preguntas heurísticas como: ¿cuál es el objetivo principal de la brigada de vacunación en el problema? ¿Qué significa que la vacunación debe empezar y terminar en el mismo lugar? Si evidencian dificultades en los estudiantes realice las preguntas que pueda favorecer la solución al problema.

Los estudiantes crean modelos que plasman en hojas de papel, presentan a sus compañeros la solución e identifican aciertos y oportunidades de mejora. Se pide a los estudiantes que representen los modelos creados para llegar a la solución del problema en el software en línea[85] y que exploren las opciones respecto a ciclos. Luego interrogar ¿qué características tienen esos caminos y como se llaman?

Según el nivel de desempeño proponer el siguiente problema ¿se puede obtener ciclos hamiltonianos desde cualquier esquina? Y preguntar ¿Qué es entonces un ciclo hamiltoniano? ¿Se puede asegurar que un ciclo Hamiltoniano no es necesariamente único? Se debe concluir con el concepto Ciclo Hamiltoniano e interrogar ¿qué diferencias encuentra entre un camino y un ciclo hamiltoniano?

Concreción. Los estudiantes en grupo deben escribir algún problema de una situación fuera de este problema donde vinculen el concepto de ciclo hamiltoniano.

5.1.3. Actividad 3: Triangulando Ando

Objetivo. Encontrar el área de figuras bidimensionales a través de la descomposición en triángulos por un conjunto máximo de diagonales.

[85] https://graphonline.ru/es/

Sugerencia metodológica. Se acerca a los estudiantes en la búsqueda de la resolución de los problemas, a través de una práctica que contemple la visualización de figuras bidimensionales, la manipulación de material concreto y recursos tecnológicos. Los cuales, permiten la exploración y la interacción, la construcción de modelos y el uso de preguntas heurísticas individuales y en grupo.

Recursos por utilizar. Internet, Google Maps, computador o celular, marcadores, regla, lápices de colores y hojas de papel.

Metas de aprendizaje:

A_1. Identifica y reconoce las propiedades de diferentes polígonos.
A_2. Analiza cómo los triángulos pueden conformar un polígono de mayor área.
A_3. Descompone figuras en partes más pequeñas y reconstruye la figura original al sumar las áreas de los triángulos.
A_4. Estima y aproxima valores para obtener una respuesta más cercana al área real de la figura.

Desarrollo de la actividad:

Momento 1. Motivación. En grupo entregar el tangram (ver Figura 15)[86].

Problema 1. Martina quiere crear un polígono de siete lados usando todas las fichas del tangram de modo que sea convexo y las diagonales internas formadas que unen los vértices no se crucen entre sí en su interior ¿Cuál polígono puede crear que cumpla con las condiciones?

Problema 2. ¿Cuántos polígonos mayores o igual a cuatro lados se pueden construir con las fichas, de tal forma que queden sin espacios ni superposiciones entre ellas?

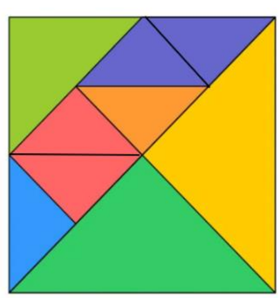


Figura 15. Tangram adaptado

[86] Tomado de: https://www.orientacionandujar.es/2018/06/11/figuras-para-imprimir-plantillas-incluidas-tangram/

Problema 1. Imaginar el diseño de un parque de juegos para el barrio. El terreno tiene forma de polígono irregular con varios lados y ángulos. Un juego o una instalación, como columpios, toboganes o bancos para sentarse deben estar ubicados en un terreno triangular ¿cuál debe ser el diseño para una zona de juegos que maximice el espacio disponible para las atracciones y minimice las zonas de descanso?

Sugerencia para el docente. Acompañar el proceso de resolución a través de preguntas ¿ha pensado la forma del polígono? ¿Cuántas zonas de descanso pueden ser adecuadas? ¿De qué manera puede dividir el polígono? Atendiendo las soluciones de los estudiantes y el nivel de desempeño, realice preguntas como ¿por qué cree que es importante dividir el terreno en triángulos para diseñar el parque? ¿Puede encontrar una manera de dividir el polígono en triángulos utilizando menos diagonales?

Momento 3. Estructuración. Presente a los grupos problemas como el que se muestra a continuación:

Problema 1. Imagina que el colegio "Nuestra señora de la salud" dispone de un terreno en forma de polígono irregular donde se sembrarán hortalizas en parcelas triangulares diferentes, la de mayor área será para la acelga, seguido por lechuga y la menor de área el apio. Se desea organizar senderos para evitar daños a los cultivos, dado que solo se puede ingresar al terreno por un vértice ¿cuál será la mejor distribución de las áreas para los cultivos y los senderos para minimizar terreno?

Sugerencia para el docente. Orientar el proceso con preguntas como: ¿cuántas hortalizas quieres sembrar? ¿Qué área total quieren sembrar? ¿De cuántos lados será el polígono? o las que considere necesarias. Luego, realizar preguntas atendiendo el nivel de desempeño de los grupos ¿cómo podrían los vértices del terreno y las esquinas determinar la triangulación y la forma de las parcelas? ¿Por qué la triangulación podría ser una solución viable para dividir el terreno? ¿Puede trazar una diagonal en el polígono si los vértices son adyacentes? ¿Qué estrategia puede usarse para triangular un polígono? ¿Qué relación consideran que existe entre la cantidad de lados del polígono y la cantidad de triángulos que pueden construirse en el polígono?

Momento 4. Transferencia. Proponer en grupo problemas como el siguiente**:**

Problema 1. ***La salida pedagógica.*** Se quiere hacer una salida pedagógica en un día con 220 estudiantes del colegio Nuestra señora de la salud. Se deben visitar dos museos de Bogotá, con el ánimo de observar la mayor cantidad de piezas posibles y que, además, puedan ingresar todos los estudiantes al mismo tiempo ¿cuál ruta pueden hacer los estudiantes?

Sugerencia para el docente. Indicar a los estudiantes que ingresen a Google Maps y hacer una exploración de los museos y seleccionar aquellos con los cuales harán el recorrido, exteriorizar que no podrán usar fórmulas de los cuadriláteros para buscar la solución y orientar a los estudiantes a través de preguntas heurísticas ¿cómo se puede saber si caben en un museo todos los niños? ¿Qué información se resalta en el problema? ¿Puedes usar la triángulacion en este caso? El docente luego de la socialización de las respuestas expuestas por los estudiantes puede realizar preguntas ¿por qué las diagonales no pueden cruzarse en el interior del triángulo? ¿Puede trazar diagonales en vértices adyacentes? El docente debe llegar hasta la definición del concepto de triángulacion.

Concreción. Los estudiantes en grupo escriben algún problema de una situación fuera de este problema donde necesiten el concepto de triangulación de un polígono.

5.1.4. Actividad 4. Protegiendo los museos de la capital

Objetivo. Usar la triangulación del área de una figura bidimensional y la coloración de sus vértices para representar afirmaciones del enunciado del teorema de la galería de arte de Chvatal.

Sugerencia metodológica. El docente lleva a los estudiantes hacia la resolución de problemas a través de visualización de segmentos para formar figuras bidimensionales y coloración de sus vértices. La motivación se da mediante la manipulación de material concreto, donde los estudiantes exploran e interaccionan en grupo y construyen modelos que socializan entre pares. Se debe apoyar el proceso a través de preguntas heurísticas. Esta actividad tiene elementos adaptados de Grima (2014).

Metas de aprendizaje:

A_1: Descompone el área de un polígono en áreas de triángulos.
A_2: Comprende el concepto de coloración de vértices, de tal manera que los vértices adyacentes no comparten el mismo color.
A_3: Determina el número cromático donde exploran propiedades estructurales de los grafos
A_4: Reconoce que un polígono de n vértices se puede vigilar utilizando con un máximo [n/3] cámaras.

Recursos por utilizar. Internet para acceso Google Maps, computador o celular, marcadores, regla, lápices de colores, hojas de papel, pitillos y plastilina.

Desarrollo de la actividad

Momento 1. Motivación. Indicar a los estudiantes cerrar los ojos, visualizar tres segmentos y con ellos formar una figura geométrica, pintar los vértices sin que dos vértices seguidos queden del mismo color ¿cuántos colores se usaron? Luego visualizar cuatro segmentos, formar una figura y pintar los vértices con la misma condición ¿ahora cuántos colores se usaron? ¿Se puede usar menos colores, por qué?

Momento 2. Exploración. Organizar grupos y entregar 30 pitillos de diferentes tamaños.

Problema 1. ¿Cuántos polígonos de diferente cantidad de lados se pueden construir con 20 pitillos?

Problema 2. ¿Cómo se pueden dividir los polígonos creados de tal forma que queden compuestos por triángulos cuyas diagonales internas que unen los vértices no se crucen entre sí en su interior?

Sugerencia para el docente. Realizar preguntas heurísticas orientadoras que considere que ayuden a los estudiantes avanzar en su proceso cuando presenten dificultades. Atendiendo el nivel de desempeño de los estudiantes realice preguntas como la siguiente: ¿la cantidad de triángulos en los que puede descomponerse un polígono dependen de la cantidad de los lados? ¿Por qué?

Momento 3. Estructuración. Usar los 30 pitillos y entregar plastilina de colores.

Problema 1. ¿Cuántos polígonos diferentes con más de 4 vértices se pueden construir y triangular?

Sugerencia para el docente. Luego de que los estudiantes resuelvan y socialicen genere preguntas según el avance de los grupos, como: ¿por qué no puedo triangular un polígono de tres lados?

Problema 2. En el colegio se ha organizado un torneo de colores muy especial. Hay varios equipos de estudiantes, y cada equipo está representado por un color. El objetivo del torneo es que todos los equipos se enfrenten en juegos amistosos, de tal forma que, dos equipos con el mismo color no pueden jugar ¿cuántos colores diferentes necesitarás para lograrlo?

Sugerencia para el docente. El docente puede solicitar a cada grupo exhibir su modelo en el salón y realizar una caminata de observación silenciosa para que los estudiantes conozcan el trabajo de los compañeros. Hacer preguntas como: ¿cuál fue el color menos y más usado en la coloración? ¿Por qué ese color no se usó tantas veces? Puede generar las preguntas que considere necesarias para lograr la comprensión del concepto número cromático hasta llegar a la definición por parte del docente definirlo.

Momento 4. Transferencia. Presentar a los estudiantes problemas como el siguiente:

Protegiendo los museos de la capital. Los museos son demasiado valiosos para la humanidad, porque visibilizan el arte, la cultura y el turismo. Por tanto, se quieren proteger los museos de la ciudad de Bogotá ante el robo de sus piezas ¿qué cantidad de cámaras de seguridad son estrictamente suficientes y necesarias para monitorear uno de ellos?

Sugerencia para el docente. Realizar preguntas para la comprensión del problema como: ¿qué elementos identificas en el problema? ¿Qué elementos son necesarios para el abordaje del problema? Luego de la resolución del problema pedir a los grupos presentar y exponer los modelos a sus pares, Así como, identificar sus aciertos y oportunidades de mejora. Atendiendo el nivel de desempeño proponer el problema ¿Se puede usar esta estrategia para calcular la cantidad de cámaras de todos los museos? Y a continuación, definir el teorema de Chvatal para que los estudiantes lleguen a comprender que cualquier museo poligonal de n vértices puede ser vigilado con un máximo de [n/3] de cámaras.

Concreción. Los estudiantes en grupo deben escribir algún problema de una situación fuera de este problema donde necesiten el concepto del teorema de Chvatal.

5.1.5. Actividad 5: Cuidando mi zona en la cancha

Objetivo. Identificar el concepto de punto, plano, semiplano, segmento, mediatriz y circuncentro en la construcción de un diagrama de Voronoi.

Sugerencia metodológica. Se acerca a los estudiantes a la resolución del problema, recurriendo a la imaginación por medio de ejercicios de visualización mental de objetos geométricos y el uso de material concreto para hacer experimentos sencillos que permiten la exploración. Durante todo el proceso se acompaña con preguntas heurísticas y se favorece la interacción entre pares. Esta actividad adapta algunos elementos de Grima (2017).

Recursos por utilizar. Hojas blancas, lápiz, colores, regla, vaso, agua, plato, dulces de colores blandos, dos vidrios pequeños de igual tamaño, témperas y marcador.

Metas de aprendizaje:

A_1. Comprende la noción de distancia y proximidad en un espacio bidimensional.
A_2. Representa la división de un espacio en regiones basado en la proximidad a un conjunto de puntos determinados.
A_3. Identifica cómo cambian las regiones resultantes en diferentes conjuntos de puntos.
A_4. Reconoce los límites o fronteras de las regiones de Voronoi como resultado de la división del espacio en función de la distancia a los puntos.

Desarrollo de la actividad

Momento 1. Motivación. Recurrir a la imaginación de los estudiantes para realizar ejercicios que traen a la mente visualizaciones de objetos geométricos. Los estudiantes cierran los ojos e imaginan un plano y responden las preguntas ¿cómo es? ¿Puede parecerse a algo que tienen cerca, a qué? Ahora piensan en un vidrio que se extiende sin límites, pide asociar el vidrio a un plano y ubicar en él un punto, luego dos puntos y responder ¿puedo dividir el plano para que cada punto tenga una región del plano?

Momento 2. Exploración. La primera exploración se realiza en grupo y la otra el docente la lidera.

Exploración 1. En grupos de tres estudiantes se entrega un plato de plástico, 5 dulces de colores y un vaso con agua, los estudiantes agregan agua de tal forma que cubra la superficie de los dulces y distribuyen los dulces dentro del plato, se cronometra cinco minutos. A medida que pasa el tiempo se generan preguntas a los estudiantes como: ¿qué le está ocurriendo a los dulces? ¿Qué cambios presenta el agua? una vez pasado los cinco minutos pregunta ¿Se han mezclado los colores? ¿Cuántas regiones se han formado?

Exploración 2. El docente toma un vidrio y agrega seis gotas de témpera de diferente color, pone otro vidrio encima y hace presión e interroga ¿qué paso con las gotas de témpera? ¿Qué representa el vidrio? ¿En cuántas regiones queda dividido el plano? Luego con un marcador se traza las regiones que se forman con cada color y se presenta a los estudiantes, se realizan preguntas como: ¿qué formas geométricas toman estas regiones? ¿Cuántos lados pueden tener esas formas geométricas? El docente explica sobre los polígonos de Thiessen vinculando lo observado en la experimentación.

Momento 3. Estructuración. Los estudiantes trabajan en grupo el siguiente problema:

Problema 1. Existe un parque de forma rectangular donde hay dos juegos: el balancín el cual tiene un punto de referencia A ubicado en una esquina del parque y el columpio con un punto de referencia B en la esquina opuesta del parque. Camila se encuentra ubicada en un punto dentro del parque y quiere asegurarse cuál de los dos juegos es el más asequible atendiendo la ubicación de Camila ¿cuál será el juego más cercano a ella?

Sugerencia para el docente. Generar preguntas heurísticas a los grupos, de tal forma que se pueda orientar a los estudiantes sobre la solución al problema, si es necesario y según el desempeño de los grupos abordar conceptos geométricos. Luego de la presentación de las respuestas socializar a través de preguntas ¿en cuántas regiones queda dividido el plano? ¿Qué formas geométricas tienen esas regiones? ¿Si ubico más puntos en el plano puedo obtener más regiones?

Problema 2. Estefany es una exploradora de la "**Isla de los secretos**" se encuentra situada en un punto estratégico. En esta isla hay tres secretos para la larga vida, cada uno tiene su propia ubicación: secreto de Júpiter (punto A), Secreto de Saturno (punto B) y el secreto de Marte (punto C). Estefany desea encontrar los secretos empezando por el más cercano a ella ¿Cuál ruta puede realizar la exploradora?

Sugerencia para el docente. Mediante preguntas heurísticas oriente a los estudiantes sobre la solución del problema. Así como, socializar preguntas con los estudiantes como: ¿en cuántas regiones queda dividido el plano? ¿Qué pasaría si agregamos otro tesoro en la isla? Puede generar más preguntas que permitan a los estudiantes ir conectando la estrategia al concepto de diagrama de Voronoi.

Momento 4. Transferencia. Proponer a los grupos problemas en un contexto auténtico como:

Cuidando mi zona en la cancha. Imagina que estás jugando con cuatro amigos en esta cancha de fútbol, tres contra dos (ver Figura 16). Tres conforman tu equipo y se representan por los puntos negros, los otros dos amigos son del equipo contrario que se mantienen sin movimiento y son representados por con un punto rojo ¿cómo se puede representar la zona que debe defender cada jugador de nuestro equipo?

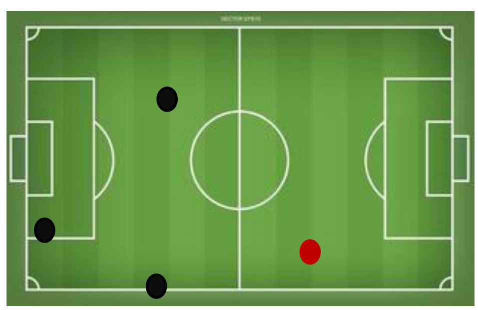


Figura 16. Dibujo de una Cancha futbol[87]

Sugerencia para el docente. Realizar preguntas que orienten a los estudiantes como: ¿qué información se identifica en el problema? ¿Cuál es el reto en el problema? ¿Qué ideas tienen para abordar el

[87] Tomado de: https://es.vecteezy.com/vectores-gratis/cancha-de-futbol

problema? ¿Qué estrategia puede usarse para llevar a cabo la solución? ¿Qué conceptos deben usar para llevar a cabo la estrategia? Cada grupo en plenaria presenta su proceso y respuesta del problema, identifican la cantidad de soluciones que se pudieron obtener del problema y los aciertos y oportunidades de mejora. El docente define el concepto de diagrama de Voronoi, lo socializa y genera preguntas para asegurar la comprensión de los estudiantes.

Concreción. Los estudiantes en grupo deben escribir algún problema de una situación fuera de este problema donde aborden el concepto de diagrama de Voronoi.

5.1.6. Actividad 6: El tanque de agua y los bebederos

Objetivo. Reconocer las características a partir de las posibles ubicaciones de un punto en una región triangular equilátera para la visualización de afirmaciones enunciadas en el teorema de Viviani.

Sugerencia metodológica. Los momentos contemplan ejercicios de visualización mental, construcciones en lápiz y papel y el uso de representaciones digitales por medio de un software, hasta llegar a la representación visual de las afirmaciones del enunciado del teorema de Viviani, que servirán de motivación para la resolución de los problemas.

Recursos por utilizar. Hojas de papel, lápiz, escuadras, regla, compás, GeoGebra, computador y tijeras.

Metas de aprendizaje:

A_1. Reconoce características de los triángulos equiláteros.
A_2. Contrasta la altura de los tres triángulos que se forman con los segmentos desde un punto a los lados de un triángulo equilátero con la altura de éste.
A_3. Identifica que la suma de las distancias desde un punto a cada uno de los lados es igual a la altura del triángulo.
A_4. Reconoce que independientemente de la posición del punto dentro del triángulo equilátero, la suma de las distancias a los lados siempre será igual a la altura del triángulo.

Desarrollo de la actividad

Momento 1. Motivación. Pedir a los estudiantes cerrar los ojos y realizar ejercicios mentales de visualización como imaginar tres segmentos de igual longitud sobre un plano, los une de sus extremos sin que queden espacios libres entre ellos ¿cuál figura geométrica se obtiene? ¿Qué características tiene la figura creada? ¿Qué pasa si aumento los segmentos en el plano?

Momento 2. Exploración. En grupo realizar experiencias como las siguientes:

Exploración 1. En una hoja encontrar la forma de construir dos triángulos equiláteros congruentes usando instrumentos de medida, dibujar el punto que consideren dentro de uno de los triángulos y a partir de éste trazar los segmentos perpendiculares desde el punto a cada uno de los lados. Luego resaltar los tres segmentos con colores diferentes y con ellos construir los tres triángulos que tienen dos vértices del triángulo equilátero y como vértice común el punto construido.

Recortar estos triángulos y ubicar uno debajo del otro, de tal manera que las alturas queden alineadas y superpuestas en el segundo triángulo. A medida que los grupos avanzan se debe socializar preguntas como las siguientes: ¿pueden usar esta estrategia para construir triángulos equiláteros de diversos tamaños? ¿En cuántas regiones queda dividido el triángulo? ¿Qué representan los segmentos coloreados en cada uno de los triángulos? ¿Qué concluyes con respecto a las alturas de los triángulos y el triángulo inicial?

Momento 3. Estructuración. En grupos se les presenta problemas como el siguiente:

Problema 1. Debe diseñar un sistema de riego automático para un cultivo de astromelias que tiene forma de triángulo equilátero. Se tiene un punto de agua en un extremo del cultivo y un punto A en el interior donde debe quedar el aspersor ¿dónde se puede ubicar el aspersor para que riegue equitativamente todo el cultivo?

Sugerencia para el docente. Permita a los estudiantes usar GeoGebra, apoye el proceso por medio de preguntas heurísticas orientadoras. A partir de las soluciones presentadas por los estudiantes y el nivel del desempeño de cada grupo proponga los siguientes problemas ¿qué pueden afirmar del punto del interior y las distancias? ¿Qué se puede decir con relación a las distancias y la altura del triángulo? ¿Sucede en cualquier triángulo que la suma de las distancias desde un punto a cada uno de los lados sea igual a la altura del triángulo?

Momento 4. Transferencia. En grupo se les propone un problema en un contexto auténtico. ***El tanque de agua y los bebederos***. Los estudiantes del colegio “Nuestra señora de la Salud de Supatá” tienen un proyecto de producción de huevos de codorniz, deben construir tres bebederos y un tanque (cilíndricos y subterráneos) para proveerlos a través de una tubería. Tienen un lote de manera circular (ver Figura 17) donde viven las codornices, los bebederos deben quedar equidistantes, se requiere minimizar la longitud total de la tubería y que se asegure el suministro de agua a los bebederos ¿en qué parte se deben ubicar los bebederos y el tanque potencial de suministro de agua?

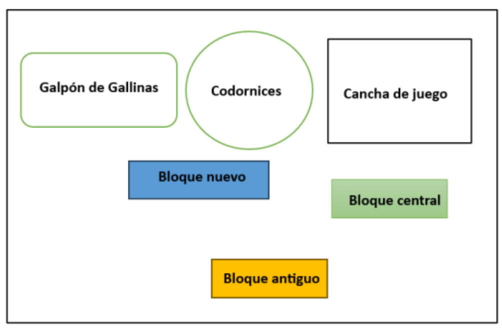


Figura 17. Esquema de la Institución Nuestra Señora de la Salud. Elaboración propia.

Sugerencia para el docente. Realizar preguntas que apoyen la comprensión del problema ¿qué elementos se encuentran en el problema? ¿Qué se debe buscar para dar solución al problema? ¿Qué estrategia pueden usar para solucionar el problema? Los estudiantes se apoyan con el uso de GeoGebra para la construcción de modelos, cada grupo expone en plenaria la respuesta y el proceso realizado, además reflexionan sobre sus aciertos y oportunidades de mejoras. Se generan preguntas a los estudiantes para que luego el docente definir las afirmaciones del teorema de Viviani.

Concreción. Los estudiantes en grupo deben escribir algún problema de una situación fuera de este problema donde se use el enunciado del teorema de Viviani.

5.1.7. Actividad 7: La distancia más corta

Objetivo. Reconocer las características dadas a partir de las posibles ubicaciones de un punto en una región cuadrangular.

Sugerencia metodológica. Acercar a los estudiantes a la visualización mental de figuras geométricas, motivarlos a la resolución de problemas a través de actividades que contemple la manipulación de material concreto bajo la exploración y la interacción, la construcción de modelos y el uso de preguntas heurísticas. Se contempla trabajo individual como en grupo.

Recursos por utilizar. Palillos de pincho, computador, GeoGebra.

Metas de aprendizaje:

A1. Reconoce características de los cuadrados.
A2. Compara el área de un cuadrado con la suma de las áreas de los cuadriláteros que se forman con los segmentos desde un punto a los lados de dicho cuadrado.
A3. Reconoce que independientemente de la posición del punto dentro de un cuadrado, la suma de las distancias a los lados siempre será igual al semiperímetro.
A4. Aplicar conceptos matemáticos para resolver situaciones del mundo real y simuladas.

Desarrollo de la actividad

Momento 1. Motivación. Desarrollar actividades de visualización mental de objetos geométricos, como el siguiente: cerrar sus ojos e imaginar un plano, sobre el plano cuatro segmentos de igual medida y preguntar ¿qué figuras planas puedo construir? ¿Cuántas dimensiones y características tiene la figura?

Momento 2. Exploración. En grupos usar palillos de pincho diferenciados en 2 cm de tamaño a partir de 4 cm, se entregan cuatro de cada medida.

Problema 1. ¿Cuántos cuadrados de diferente tamaño de lado se pueden construir con los 20 palillos y que medida tiene su perímetro?

Problema 2. ¿Si aumenta el lado del cuadrado aumenta la medida del perímetro?

Problema 3. Ahora deben tomar los cuadrados que tiene de lado 6 cm y 12 cm de lado, 4cm y 8cm de lado, pueden practicar con más tamaños ¿si se duplica el tamaño del lado se duplica el tamaño del perímetro en qué proporción?

Sugerencia para el docente. El docente debe llegar a definir el concepto de semiperímetro, atendiendo el desempeño de los estudiantes explorar con palillos de otras medidas y realizar las preguntas que considere para profundizar el concepto.

Momento 3. Estructuración. Pueden usar GeoGebra o una cuadrícula para apoyar la solución.

Problema 1. Andrés diseña una piscina cuadrada en el patio de su casa. Quiere colocar un trampolín en un punto (P) en un lugar determinado dentro de la piscina para que los niños puedan saltar con seguridad y quedar fuera de la piscina. Para garantizar la seguridad, se necesita calcular la distancia exacta desde el punto de salto P hasta cada uno de los cuatro lados de la piscina ¿cuál puede ser la ubicación exacta del trampolín y las distancias desde el trampolín a los lados de la piscina?

Problema 2. Imagina que tienes un cuadrado en una hoja de papel. Dentro de este cuadrado, hay un punto misterioso que se puede mover a cualquier lugar. El cuadrado tiene un perímetro de "X" cm ¿cuál es la suma total de las distancias desde el punto a cada uno de los cuatro lados del cuadrado?

Problema 2. Con respecto al problema anterior ¿cambian las distancias si cambia de lugar el punto? ¿Qué relación existe entre la suma de las distancias y la mitad del perímetro?

Sugerencia para el docente. Para apoyar lleve a cabo preguntas heurísticas como: ¿qué información es necesaria para encontrar una solución? Generar todas las preguntas heurísticas necesarias para orientar el trabajo, hay que indicar que pueden usar medidas simuladas para llevar a cabo la solución.

Momento 4. Transferencia. Proponer a los grupos problemas en un contexto auténtico como: "***la distancia más corta".*** Estando en un punto dentro del parque de Supatá debo ir a la "Estación de policía", al “Supermercado D1”, a “La Casona Supateña” y a la “Iglesia principal” (ver Figura 18). ¿Desde qué punto se debe partir para no tener que recorrer la distancia más larga?

Figura 18. Parque principal de Supatá, Cundinamarca

Sugerencia para el docente. Realizar preguntas que le permitan a los estudiantes comprender el problema como las siguientes o considerar las necesarias ¿qué elementos se encuentran en el problema? ¿Qué se debe buscar para dar solución al problema? ¿Qué estrategia pueden usar para solucionar el problema? Los grupos exponen sus soluciones mientras se indaga sobre las estrategias usadas y sobre los aciertos y fallos. El docente define el enunciado “la suma de las distancias de P a los lados del cuadrado es igual al semiperímetro”. Además, deja abierta la posibilidad de explorar con otras figuras regulares.

Concreción. Los estudiantes en grupo deben escribir algún problema de una situación fuera de este problema donde se use el enunciado.

5.1.8. Actividad 8. Dos alfombras triangulares

Objetivo. Encontrar la congruencia de figuras bidimensionales a través de la descomposición del área para visualizar afirmaciones enunciadas en el teorema de la alfombra.

Sugerencia metodológica. El docente desarrolla actividades de manipulación de material concreto bajo la exploración y la interacción individual como en grupo, se analiza la congruencia de las figuras geométricas y el análisis de la medida entre áreas. Así como, la construcción de modelos y preguntas heurísticas. Esta actividad contiene elementos de Ledesma (2010) y Ferrero y Jiménez (2023).

Metas de aprendizaje:

A_1. Descompone un área en partes más simples para obtener el área total.
A_2. Identifica cómo se superponen dos alfombras y cómo se divide el piso en regiones distintas.
A_3. Comprende el concepto de superficie y cómo se puede dividir una superficie en diferentes partes usando objetos geométricos.
A_4. Calcula áreas con figuras geométricas que se superponen.

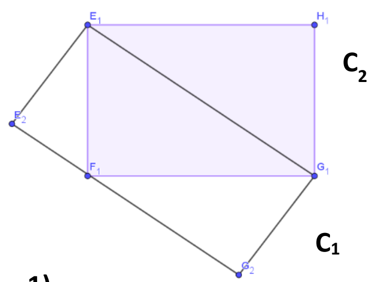
Desarrollo de la actividad:

Recursos por utilizar. Hojas de papel, tijeras, regla, GeoGebra, papel milimetrado.

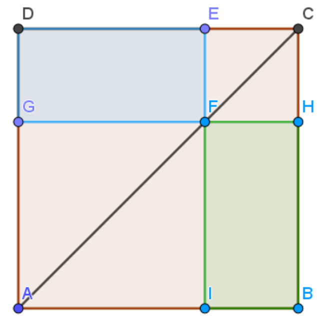
Momento 1. Motivación. Llevar a cabo ejercicios de visualización mental como el siguiente: pedir a los estudiantes imaginar dos triángulos, poner uno encima de otro, de tal manera que, no quede por completo solapado ¿podemos encontrar cinco maneras de solaparlos? Luego el mismo ejercicio, pero con rectángulos.

Momento 2. Exploración. Entregar los dos esquemas (ver Figura 19) en papel.

Exploración 1. Tomar el esquema 1 y preguntar ¿cuáles triángulos son congruentes y por qué?, toman los dos triángulos que conforman el rectángulo **C_2** ¿se puede formar con ellos otro triángulo? ¿Cómo? ¿Puedo formar con las partes no solapadas del rectángulo **C_1** otro triángulo, de qué tipo?, tome los triángulos de **C_2** y los formado con las partes no solapadas ¿se puede afirmar que tienen la misma área?



1)



2)

Figura 19. Esquema 1 y 2

Exploración 2. Pedir a los estudiantes recortar el esquema dos por su diagonal y responder ¿qué figuras geométricas se obtienen? ¿Son congruentes? Recorten el triángulo CED solaparlo sobre FHC y FGA solaparlo sobre FIA ¿son congruentes? ¿Qué concluyes de los rectángulos DEFG y FHIB? Solicitar a los estudiantes usar GeoGebra y hacer la construcción de tal forma que el punto F pueda moverse e ir comparando las áreas de las figuras geométricas que se forman a partir de la descomposición del área.

Momento 3. Estructuración. Proponer problemas en un contexto real o simulado como el siguiente:

Problema 1. Se realiza una fiesta el día del estudiante en el aula múltiple de la Escuela "Pablo VI". Se deben poner dos alfombras rectangulares en el suelo para delimitar la pista de baile, de manera que ocupen la menor cantidad de espacio posible, no se podrán superponer completamente para evitar peligro a los bailarines ¿de qué manera se deben colocar las alfombras solapadas y, al mismo tiempo, descubrir un espacio considerable?

Sugerencia para el docente. Acompañar el proceso por medio de preguntas heurísticas que permita a los grupos la comprensión y planeación de estrategias. Luego de la socialización de las respuestas y atendiendo el desempeño de los estudiantes interrogar ¿qué afirmaciones puedo hacer con respecto al área solapada y la que no está solapada? Permitir a los estudiantes el uso de GeoGebra para realizar modelos que les permita responder el siguiente interrogante ¿sucede lo mismo con alfombras de igual y diferente tamaño?

Momento 4. Transferencia: Presentar a los grupos problemas en un contexto auténtico como ***Las dos alfombras triangulares.*** La maestra de deportes cubre el piso del salón de clases con dos alfombras triangulares de igual área para hacer Yoga, pero algunos niños quieren hacer otro tipo de ejercicio. Por tanto, ella pondrá una parte sobre la otra alfombra (solapa) para dejar un espacio libre, pero quiere determinar de qué manera solaparlas para asegurarse que deje más espacio libre, que el de la suma de las áreas de las dos alfombras solapadas ¿de qué forma debe solapar dichas alfombras?

Sugerencia para el docente. Realizar preguntas que orienten a los estudiantes ¿qué información se identifica en el problema? ¿Cuál es el reto en el problema? ¿Qué ideas tienen para abordar el problema? ¿Qué estrategia puede usarse para llevar a cabo la solución? ¿Qué conceptos deben usar para llevar a cabo la estrategia? Permitir el uso de GeoGebra para explorar el problema o papel milimetrado. En plenaria presentar las soluciones, reflexionar sobre sus aciertos y oportunidades de mejora. Se debe favorece el proceso por medio de preguntas heurísticas, además definir las afirmaciones del teorema de la alfombra.

Concreción. Los estudiantes en grupo deben escribir algún problema de una situación fuera de este problema donde se use el enunciado de las alfombras.

Conclusiones del capítulo

Se proponen ocho actividades en guiones didácticos como guía para el docente que contemplan cuatro momentos en el aula: motivación, exploración, estructuración y transferencia. Estos momentos admiten ejercicios de visualización mental sobre objetos geométricos, experimentos sencillos, el uso de material concreto no estructurado, material permanente (regla y compás) y tecnológicos (software) favoreciendo el desarrollo de habilidades lógicas de razonamiento como crear, imaginar, explorar y descubrir conceptos. Además, propicia establecer regularidades y relaciones, habilidades de transferencia como interrogación, representación y análisis. También, se desarrollan habilidades de comunicación como: leer, interpretar y explicar. Por otra parte, presenta la oportunidad para que los estudiantes vinculen sus saberes previos y desarrollen habilidades para la creación de problemas matemáticos.

En cada actividad se establecen las metas de aprendizaje, las cuales, tienen relación con la rúbrica de evaluación dispuesta para cada una. Todas las actividades dan aportes significativos para que los estudiantes desarrollen habilidades en la resolución de problemas, la modelación geométrica, la visualización matemática, la creación de sentido y significado matemático.

CAPÍTULO 6. ANÁLISIS DE RESULTADOS

6.1. Resultados a entrevista de expertos

Se realizaron diversas entrevistas (ver Anexo 4) a los siguientes expertos: Dr. Marcel Puchulu (2020), Dr. Hermes Nolasco (2020), Dra. Nuria Rosich (2020), Dr. Angel Gutierrez (2020), Dra. Yuriko Yamamoto Baldín (2021), Dr. Fernando Hitt (2021), Dra. Carlota Soldano (2021), Dra. Cristina Sarabena (2021), Dra. Gabriele Keiser (2022), Dra. Gloria Stillman (2022), Dr. Mogens Niss (2022) y el Dr. Mathias Ludwing (2022). A continuación, se realiza un análisis de las respuestas a cada una de las preguntas.

Concepción actual de la resolución de problemas en la escuela secundaria. Los entrevistados consideran lo siguiente:

- Las tareas en la escuela, por lo general aborda el proceso de resolución de problemas de manera habitual, los problemas seleccionados no requieren un mayor análisis y su solución en cierta medida es evidente.
- Los planes de estudio pierden el énfasis de la resolución de problemas, no hay transversalidad con el mundo real y su énfasis va dirigido al desarrollo de temáticas a través de ejercicios tradicionales.

Dificultades en el abordaje de la resolución de problemas retadores en la escuela secundaria. Los entrevistados destacan las siguientes dificultades:

- Existe poca motivación para la resolución de problemas por parte del estudiante, debido a las tareas rutinarias que se construyen en la escuela.
- Si el modelado no hace parte del proceso de enseñanza y aprendizaje, los estudiantes deben enfrentar la incertidumbre, convirtiendo la resolución de problemas en una ambigüedad.

- Los estudiantes no desarrollan la habilidad de reconocer dimensiones unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales, siendo ésta importante para la MGA, faltando conexión entre las habilidades y propiedades de los objetos.

Concepción sobre modelación geométrica. Los expertos conciben en la MGA las siguientes características:

- La MGA es un caso especial de la modelación matemática, que se relaciona con las formas del universo. Puede vincularse en la escuela para la construcción de saberes, haciendo uso de contextos auténticos que son significativos para los estudiantes y la creación de sentido matemático.
- El MGO vincula el contexto del mundo real que se abstrae en las formas de los objetos que se pueden ver y tocar, es el primer lenguaje de comunicación de figuras y cualquier forma de representación geométrica.
- La MGA es un proceso que trae consigo la capacidad de ver, tocar y descubrir propiedades geométricas de los objetos, permitiendo la construcción de significados.

Estrategias y procedimientos para el proceso de la resolución de problemas retadores apoyado en la modelación. Enfatizan en las siguientes estrategias y procedimientos:

- Iniciar el proceso de modelado en la resolución de problemas desde edades tempranas. Debido a que, el desarrollo de habilidades de modelación permite la construcción robusta de conceptos matemáticos por medio de la resolución de problemas.
- Explorar contextos auténticos en la resolución de problemas, cuyos requisitos más importantes deben ser la autenticidad en el contacto con el mundo real y las matemáticas y plantear de tareas abiertas que puedan ser comprensibles en el contexto del mundo real y las matemáticas.

- El pensamiento matemático hace conexiones a través de las diferentes representaciones, las diferentes formas en que las ideas pueden ser exploradas con el MGO.
- La flexibilidad es importante en el momento de fomentar la modelación y la resolución de problemas porque no se utilizan métodos estándar. En este sentido, se debe usar diferentes maneras de entender y resolver un problema.
- Reconocer las propiedades geométricas con objetos que pueden verse, tocarse o ambas, antes de llegar a técnicas algebraicas. Así como, usar software de geometría dinámica porque favorece la comprensión de un problema.

Aportes de la modelación geométrica en la resolución de problemas. Desde esa perspectiva, se consideran los siguientes:

- Relaciona elementos de la geometría con el mundo real. Por tanto, los estudiantes desarrollan habilidades para la resolución de problemas en diversos contextos significativos.
- Proporciona a los estudiantes la construcción de bases conceptuales que les otorga habilidades para la resolución de problemas en diversas áreas del conocimiento.
- Otorga la oportunidad de realizar representaciones a partir de los conocimientos previos, que admiten avanzar en la solución de un problema, dado a las conexiones que se establecen.
- La MGA fomenta los problemas o las tareas abiertas. Esto favorece el perfeccionamiento de habilidades que permea el desarrollo del pensamiento matemático.
- Favorece la construcción de modelos. Levantando sus propiedades geométricas conceptuales para establecer las variables necesarias, por medio de tres características principales: la visualización, técnicas algebraicas de operalización (matematización) y análisis de los conceptos geométricos para la abstracción por medio de exploración y conjeturas.

6.2. Resultados de encuesta a docentes de matemáticas

A continuación, se presentan los resultados de la encuesta realizada a 20 docentes que se desempeñan en el área de matemáticas, con más de 16 años de experiencia, y con formación en esta área.

Análisis a preguntas cerradas. Se aplicaron cinco preguntas cerradas tipo Likert con una escala de valoración de uno a cinco, siendo cinco la máxima nota y uno la mínima.Con relación a la pregunta realizada para indagar si el docente utiliza la resolución de problemas como una estrategia en el aula de clase, el 100% responde positivamente. Por tanto, el 25 % de los docentes escoge la opción cinco, el 43,8% señalan la opción cuatro y el porcentaje restante se ubica en la valoración 3 (31,2%). Como resultado se infiere que los docentes usan con baja frecuencia la resolución de problemas como una estrategia dentro de su quehacer pedagógico.

Con respecto a la pregunta si los estudiantes presentan dificultades para abordar el proceso de resolución de problemas, todos los docentes encuestados responden afirmativamente. En este sentido, el 50% de los docentes escogen la opción cuatro, el 43,8% muestra preferencia por la opción tres y un 6,3% se inclinan por la opción cinco. Por tanto, se deduce que los estudiantes presentan un alto grado de dificultad para llegar a la solución de un problema matemático. Estos resultados, pueden deberse a que, los docentes abordan la resolución de problemas en el aula no como una estrategia principal en el proceso de enseñanza y aprendizaje, si no que, generan pequeños espacios para su vinculación en las actividades que se plantean dentro del aula.

Cuando se les pregunta a los docentes si utilizan recursos didácticos durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas, ellos aseguran que sí. Un 37,5 % de los docentes dan una valoración de tres, seguido por un 37,5% que eligen la opción cuatro y el 25% valora con la opción cinco.

Se puede afirmar, que, a pesar de utilizar recursos didácticos para el abordaje de la resolución de problemas, lo hacen con baja periodicidad.

En la pregunta si los docentes utilizan herramientas tecnológicas en el proceso de resolución de problemas en el aula, el 50% de los docentes se ubican en la opción tres, el 31,3% optan por la opción cuatro, un 12,5% la opción cinco, y el 6,3% se ubica en la opción dos. Estos resultados muestran que los docentes usan en algún momento de clase las tecnologías y la frecuencia con que se utilizan es baja.

Por otra parte, a la pregunta si se fomenta en el proceso de resolución de problemas con los estudiantes la MGA, todos los docentes afirman que la usan. Por tanto, la mayoría (43, 8 %) se ubica en una valoración de dos y tres, seguido de cuatro con el 43,8% y el 12,5% se ubican en cinco. Atendiendo lo anterior, se puede concluir que la MGA es usada con muy baja periodicidad en la resolución de problemas y puede deberse al poco uso de recursos didácticos, tecnológicos y al bajo abordaje de la resolución de problemas.

Análisis de las preguntas abiertas

Ante la pregunta sobre qué dificultades presentan los estudiantes en la resolución de problemas, los docentes hacen las siguientes acotaciones:

- Limitada interpretación de un problema, por lo tanto, se les dificulta relacionar el lenguaje verbal y el lenguaje matemático.
- Limitadas habilidades para llevar a cabo un proceso de resolución de problemas porque carecen de destrezas para identificar la información y las variables que les presentan. Además, de los escasos dominios de sus conocimientos previos para usarlos en el abordaje de un problema.

Con respecto a la pregunta sobre qué recursos didácticos utilizan durante el proceso enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas, lo docentes afirman:

- Softwares educativos, simuladores, graficadoras online y recursos audiovisuales.

De la misma manera, se les solicita describir brevemente la manera en qué fomenta la MGA en la resolución de problemas en el aula, los docentes sostienen lo siguiente:

- Modelan figuras geométricas por medio de material concreto en busca de la mejor visualización.
- Modelan situaciones haciendo uso de material estructurado o no estructurado para facilitar la comprensión de un problema rutinario, para luego pasar a lo pictórico y abstracto.
- Representan geométricamente problemas algebraicos y realizan construcciones auxiliares o enunciados verbales, donde los estudiantes simbolizan figuras para resolver el problema propuesto.

Por último, se les pide que sugieran una estrategia, metodología o actividad que permita mejorar la resolución de problemas en los estudiantes de secundaria, ante esto los docentes proponen:

- Aprovechar el problema al máximo, planteando preguntas heurísticas como ¿Qué pasaría sí?, ¿Qué solución no podría ser o no tiene sentido?, ¿Por qué puede decirse que esa es la solución y no otra?
- Utilizar un software para permitir que los estudiantes puedan generar interrogantes del problema y representarlo. Además de la exploración de saberes previos a través de problemas con múltiples soluciones o soluciones abiertas en contextos reales.
- Proponer problemas retadores que les permita a los estudiantes un análisis profundo para llegar a una solución, sin que se pueda llegar fácilmente con un algoritmo.
- Plantear actividades que promuevan la conjeturación sobre hechos geométricos y exploraciones de todos los posibles casos es los cuales estos se presentan.

6.3. Validación del modelo didáctico y del sistema de actividades

Los resultados del proceso de validación que se presentan en este capítulo se desarrollan bajo el enfoque basado en argumentos (Kane, 2013) y la prueba no paramétrica de Wilconxon. A continuación, se muestran los argumentos obtenidos de cada una de las fuentes.

Método Delphi para criterios de expertos. Con el objetivo de identificar y analizar argumentos consensuados se usa una rejilla de evaluación (ver Anexo 7). Donde intervienen en la validación de las actividades y del modelo didáctico 5 expertos. Se evalúan criterios importantes de las 4 categorías del modelo que se relacionan directamente con las partes que lo conforman, en los fundamentos (A_1) se obtiene como consenso *"Muy adecuado",* en cuanto a identificación (A_2), resolución (A_3) y concreción práctica (A_4) sus criterios se evalúan como *"Bastante Adecuados",* obteniendo un valor de 2.07 en el consenso (ver Anexo 3). Dentro de los argumentos dados por los expertos se tienen los siguientes: E_2 plantea que *"El modelo didáctico evidencia positivamente el uso de asistentes matemáticos y softwares educativos en el proceso de enseñanza – aprendizaje para la comprensión de los significados de los objetos matemáticos y como herramienta para la simulación, modelación y la resolución de problemas"*[88]. Por su parte, expone *E_4. "Se observa en el modelo de forma relevante que se considera etapas del desarrollo bajo la perspectiva de Piaget, se incluye las de operaciones formales, apropiado para la edad de los estudiantes con los cuales se llevan los procesos de aprendizaje"*[89].

Sugerencias al sistema de actividades. Se presenta a los expertos una primera versión de las actividades, con el propósito de tomar las sugerencias para establecer las oportunidades de mejora, las cuales fueron importantes para llevar a cabo el refinamiento en cada uno de los problemas que se abordan en cada actividad. Algunos de los argumentos son: *E1. "Constituir un guión pedagógico, con el objetivo de la*

[88] Argumento del experto 2
[89] Argumento del experto 4

dinamización del modelo didáctico propuesto". "[…] La relación de las 8 actividades de modelación geométrica con visualización debe ser presentada con expectativas de análisis y sistematización para traer evidencias de dinamización del modelo didáctico propuesto para alcanzar el aprendizaje efectivo de los estudiantes de 8º grado"[90].

Entrevistas a especialistas. Durante el proceso de planificación de las actividades que soportan el modelo didáctico en la fase de concreción práctica, se vinculan los aportes de dos expertos en diversos encuentros, estos son tomados para el refinamiento de las actividades. La Dra. Mary Falk de Losada ($E_{1.}$) y la Dra. Yuriko Yamamoto Baldín ($E_{2.}$) expresan los siguientes criterios: E_1. sostiene que "*Los temas seleccionados son bastante interesantes para los estudiantes con los que se piensa trabajar. Sin embargo, se debe proponer en los guiones didácticos problemas más retadores que conlleve a los estudiantes a pensar un poco más"*[91] y E_2. Expone que "*Se debe establecer una conexión entre los objetivos de aprendizaje que se quieren alcanzar en la actividad con los problemas que se proponen en el guíon didáctico. También se debe plantear una rúbrica que permita evaluar los alcances de la actividad"*[92]. Por su parte, los expertos hacen un acompañamiento durante la planificación de las actividades generando aportes significativos para llegar a su consolidación.

Resultados de la implementación del sistema de actividades. Se lleva registro de los desempeños de los 10 grupos de estudiantes de cada una de las actividades desarrolladas. Estos registros se dan a partir del diligenciamiento de las rúbricas establecidas para cada una de las actividades, atendiendo las cinco categorías que se relacionan en la fase 3 "*resolución*" del modelo didáctico, estos resultados se consolidan de la siguiente manera (ver Figura 20).

[90] Argumento del experto 1
[91] Argumento del experto 1
[92] Argumento del experto 2

	PRE-TEST	ACT 1	ACT 2	ACT 3	ACT 4	ACT 5	ACT 6	ACT 7	ACT 8	POS-TEST
Grupo 1	10	18	19	20	19	19	19	20	19	19
Grupo 2	11	15	15	14	14	14	15	17	15	14
Grupo 3	9	17	19	19	17	19	19	21	18	19
Grupo 4	12	11	14	14	14	14	14	14	14	14
Grupo 5	11	14	14	15	15	13	16	19	16	13
Grupo 6	17	16	21	20	19	19	19	21	21	19
Grupo 7	10	18	21	19	18	19	21	21	20	19
Grupo 8	9	16	18	20	21	20	21	19	19	20
Grupo 9	8	13	13	14	15	13	13	15	12	13
Grupo 10	17	17	18	18	19	19	20	21	21	19

	PRE-TEST	ACT 1	ACT 2	ACT 3	ACT 4	ACT 5	ACT 6	ACT 7	ACT 8	POS-TEST
BAJO	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0
MEDIO	5	9	6	5	6	4	4	3	5	4
ALTO	0	0	4	5	4	6	6	7	5	6

Figura 20. Desempeños de los grupos en las 8 actividades

Al contrastar los resultados de la actividad exploratoria Pretest y el promedio de las actividades que nos proporciona el Postest se refleja que el nivel de desempeño en el aprendizaje es positivo, inicialmente se el 50% de los grupos se encuentran en el nivel bajo pasando a no tener ningún grupo en este nivel, de tener el 50% en nivel medio a tener el 40% y de no tener ningún grupo en el nivel alto se pasa a tener el 60%. En este sentido, no se ubican grupos en nivel bajo, quedando los grupos en el nivel medio y alto.

Entrevistas en el campo. Se realizan entrevistas a algunos estudiantes con el objetivo de indagar sobre el impacto de las actividades desarrolladas y concebidas en la fase 4 "concreción práctica" del modelo didáctico. Los estudiantes emiten argumentos favorables al respecto: E_1. afirma que *"Las actividades fueron interesantes, no había visto esos temas antes por eso nos gustaron"*[93]. Por su parte, E_2. plantea que *"En algunas actividades sentí que tuve que pensar mucho para solucionar los problemas, lo que más me gusto fue el teorema de las alfombras y usar GeoGebra"*[94]. Así mismo, E_3. asegura *"Me gustaron algunos problemas de matemáticas donde mostraban el cole, el parque, el pueblo, como los conozco me gustó resolverlos"*[95] y E_4. dice: "*Tuve que buscar temas que ya había visto que no sabía bien y que*

[93] Argumento del estudiante 1
[94] Argumento del estudiante 2
[95] Argumento del estudiante 3

necesitábamos para resolver los problemas, pero las actividades eran diferentes y al grupo les gusto, pudimos resolverlas, aunque otros grupos las solucionaron diferente"[96].

Encuesta de satisfacción. La encuesta tiene como objetivo identificar los niveles de satisfacción de las actividades desarrolladas bajo cuatro criterios. Esta encuesta tiene cuatro preguntas cerradas y una abierta (ver Anexo 8), es diligenciada por cada uno de los grupos (10) conformados para el trabajo de las actividades, atendiendo cinco niveles, donde cinco es el más alto y uno el más bajo (N5, N4, N3, N2 y N1). Los resultados obtenidos se mencionan a continuación.

Con respecto al criterio relacionado con la motivación para la construcción del aprendizaje (C1), siete grupos lo posicionan en un N5, 2 en N4 y 1 en N3. En cuanto, al criterio relacionado con la motivación para el trabajo autónomo (C2) siete grupos lo reconoce en N5, 2 en N4 y 1 en N3. En el criterio sobre la concepción de las actividades como retadoras (C3) nueve grupos lo ubican en N5 y 1 en N4. Así mismo, en el criterio con respecto a la mejora de los aprendizajes (C4) seis grupos lo posicionan en N5, 2 en N4 y uno en N3 (ver Figura 21). En esta medida se evidencia un buen consenso de los grupos y una validación positiva a las actividades propuestas.

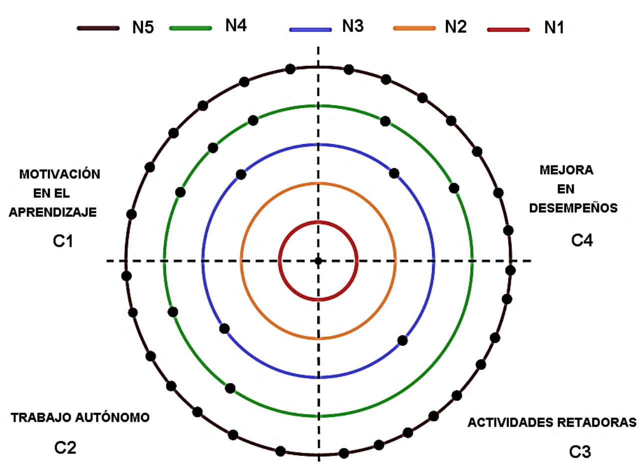


Figura 21.Resultados de la encuesta de satisfacción

[96] Argumento del estudiante 4

Con respecto a la pregunta abierta sobre los aspectos que consideran interesantes en las actividades los grupos dan diversos argumentos. En este sentido, G_3. sostiene que "*Los problemas fueron interesantes, aunque algunos estuvieron difíciles, pero pudimos resolverlos"*[97]. Por su parte, G_7. asegura que "*Fue interesante usar la computadora y programas para solucionar los problemas"*[98], entre otros argumentos (Ver Figura 22). Por tanto, se identifican argumentos significativos para la validación del aporte teórico y práctico.

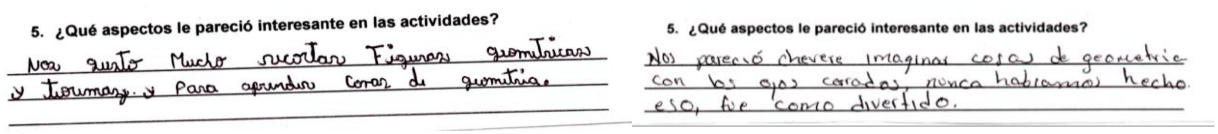


Figura 22.Algunos argumentos en la encuesta de satisfacción G1 y G10

A continuación, se presenta la triángulacion de los argumentos concebidos que muestran la validez del modelo didáctico y del sistema de actividades a partir del método de Kane (2013), obtenido de cada una de las fuentes:

- Se reconocen aportes importantes en el aprendizaje con el desarrollo de las actividades en cada uno de los momentos que las componen (motivación, exploración, estructuración y transferencia). Por tanto, la organización y la planificación de la acción práctica de la enseñanza de la matemática contribuye significativamente a la construcción robusta del conocimiento matemático de los estudiantes.
- El uso de diversos recursos, tanto concretos como tecnológicos fortalecen las habilidades de visualización, modelación, resolución de problemas y la creación de sentido matemático. Además, favorece la actividad didáctica del docente y la mejora de los desempeños de los estudiantes.

[97] Argumento grupo 3
[98] Argumento grupo 7

- La conexión entre lo teórico y lo práctico que propone el modelo didáctico en el proceso de enseñanza y aprendizaje aporta significativamente a la construcción robusta de los conceptos matemáticos.
- Las fases del modelo didáctico son pertinentes porque aportan al proceso de enseñanza y aprendizaje, donde el docente como el estudiante son protagonistas en la construcción de conocimiento, dando un aporte relevante al desarrollo del pensamiento matemático.
- Los resultados del sistema de actividades evidencian la pertinencia del modelo didáctico.

Prueba no paramétrica de Wilconxon. Con el propósito de contrastar los resultados obtenidos de las actividades aplicadas y el alcance del modelo didáctico, se establecen las dos hipótesis H_o (hipótesis nula) y H_i (Hipótesis de la investigadora) y las variables Pretest y Postest de las ocho actividades de los 10 grupos de estudiantes, se obtienen los siguientes resultados (ver Figura 23).

Prueba de rangos con signo de Wilcoxon

Rangos

		N	Rango promedio	Suma de rangos
PosTest - PreTest	Rangos negativos	0[a]	,00	,00
	Rangos positivos	9[b]	5,00	45,00
	Empates	1[c]		
	Total	10		

a. PosTest < PreTest
b. PosTest > PreTest
c. PosTest = PreTest

Estadísticos de prueba[a]

	PosTest - PreTest
Z	-2,677[b]
Sig. asintótica(bilateral)	,007

a. Prueba de rangos con signo de Wilcoxon
b. Se basa en rangos negativos.

Figura 23.Resultados Prueba de Wilconxon con SPSS

Luego del contraste realizado por el software SPSS arroja el p-valor de 0,007 siendo este menor a 0.05, por lo que permite acoger la hipótesis (H_i), donde se evidencia que el desarrollo de las actividades como fase de la "*concreción práctica*" del modelo didáctico, mejora los desempeños de los estudiantes y desarrolla habilidades del contenido matemático, de visualización, de modelación geométrica y de resolución de problemas, donde se favorece la construcción de conocimiento y la creación de sentido matemático. En esta medida, el aporte teórico y práctico que propone la investigación aportan elocuentemente al desarrollo robusto del pensamiento matemático de los estudiantes.

6.4. Resultados del estudio exploratorio

Los estudiantes atacan el problema reconociendo las formas y estableciendo relaciones entre algunas de las variables. Conjuntamente, buscan información que los conduzca a una solución adecuada y la docente acompaña el proceso por medio de preguntas heurísticas. Complementan el trabajo haciendo uso de recursos tecnológicos bajo un trabajo autónomo a partir de la indagación y la exploración (ver Figura 24).

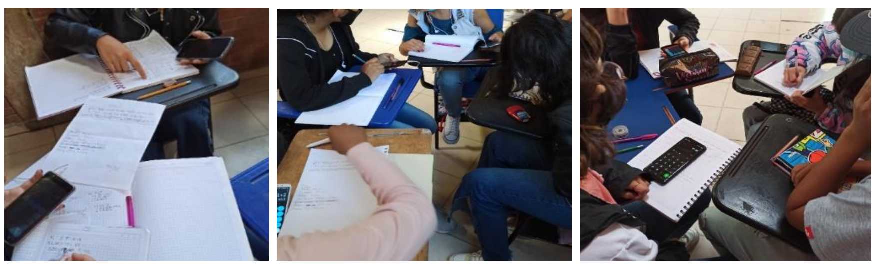


Figura 24. Estudiantes atacando el problema

Se evidencia la construcción de diversos modelos geométricos por parte de los estudiantes que les permiten establecer relaciones y la búsqueda de la respuesta al problema (ver Figura 25).

Figura 25. Construcción de modelos en equipos

Los equipos establecen modelos diversos, el abordaje del problema y la solución muestran diferenciadas maneras de llegar a una respuesta (ver Figura 25).

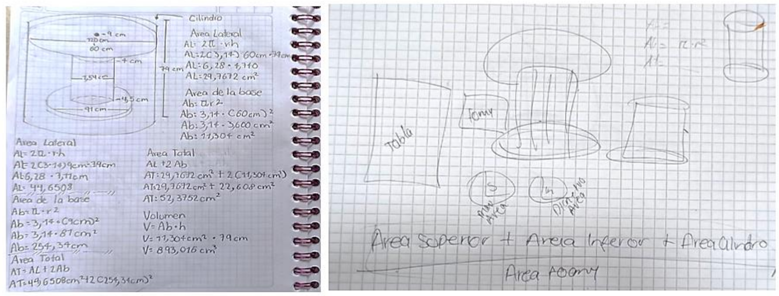


Figura 26. Diferentes modelos para llegar a una solución del problema

Bajo la indagación autónoma y las consultas en diversas fuentes usan fórmulas para encontrar las áreas laterales y las áreas de las bases de cilindros. Otros toman áreas de figuras planas como el círculo y el rectángulo para establecer el área general de la mesa. Algunos grupos, aunque reconocían formas de las figuras y cuerpos, consultan conceptos de radio, perímetro y altura para poder trabajar matemáticamente.

En la fase de presentación de modelos y solución, se contempla una apropiación por cada equipo. Los estudiantes se muestran activos y se manifiesta una reflexión interna en cada equipo, donde van evaluando los aciertos y oportunidades de mejora. A continuación, se presentan logros y dificultades.

Logros alcanzados.

- Revelan una alta motivación por el desarrollo del problema y consiguen recordar algunos métodos y conocimientos geométricos para llegar a una solución.
- Reconocen la importancia de los cuerpos geométricos y su relación con elementos del entorno para llegar a la solución del problema en un contexto auténtico.
- Identifican las diferentes formas de llegar a la solución de un problema matemático.

Dificultades encontradas.

- Insuficiente dominio de competencias en el modelado, tomando mayor tiempo en la construcción de los modelos geométricos para llegar a la solución del problema.

- Escasas habilidades para establecer relaciones entre los datos del problema y las variables.
- Limitados recursos heurísticos y conceptuales. Además, no diferencian las figuras planas de los cuerpos geométricos a la hora de dar una respuesta coherente al problema.

6.5 Resultados de la implementación del sistema de actividades

Las actividades se desarrollan con un curso de 30 estudiantes organizados en grupos equitativos de tres estudiantes, nombrados como G1, G2, G3 hasta G10. Cada actividad se desarrolla de manera presencial y su duración es de ocho horas. El análisis de las actividades se realiza atendiendo a los alcances conseguidos por los grupos de estudiantes en el proceso cognitivo con respecto al contenido matemático abordado, visualización, resolución de problemas, modelación geométrica y *Sense Making* en base a la rúbrica establecida para cada una de las actividades (ver Anexo 6). También, se presentan los logros y dificultades encontradas durante el desarrollo de toda la actividad.

6.5.1. Resultados actividad 1. La brigada de vacunación

Desempeño de los estudiantes durante la actividad. En relación con el *contenido matemático* tres grupos muestran desempeño bajo (DB), cinco en desempeño medio (DM) y dos en alto (DA) (ver Figura 29a). Se evidencia que los grupos usan el concepto de camino para encontrar rutas y patrones en ciertas situaciones que implican conexiones entre puntos y lugares.

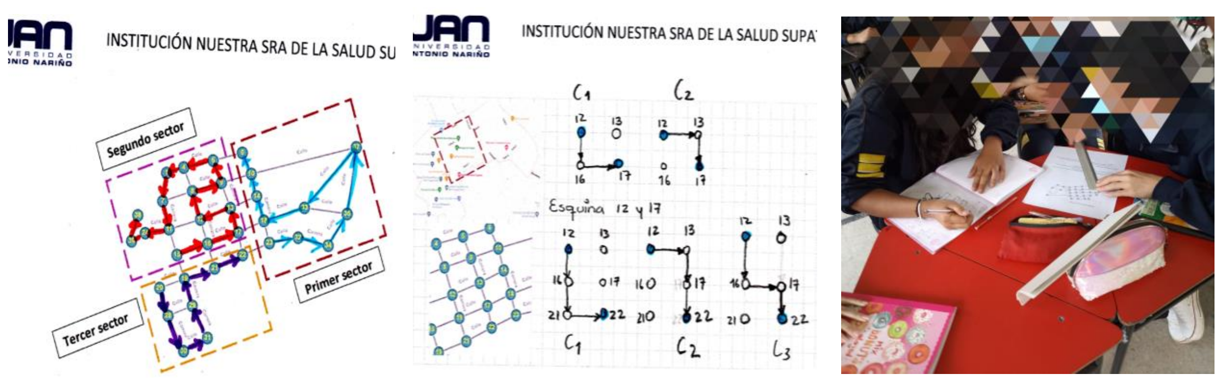


Figura 27. Caminos de G3, G7 y estudiantes trabajando la actividad 1

Por tanto, los estudiantes encuentran caminos cortos reconociendo el número de cuadras que lo componen tomando como referencia las esquinas (ver Figura 27), también forman diferentes caminos usando calles y carreras como referencia del mapa.

Los grupos por medio de la construcción de diversos caminos, que parten desde algunas esquinas indicadas y llegan a otras con la condición de no pasar dos veces por el mismo lugar, identifican que en un camino hamiltoniano sólo debe pasar una sola vez por cada vértice. Por medio de la solución de problemas en un contexto los grupos relacionan las esquinas como vértices y las aristas como calles y carreras, que luego articulan con la estructura de un grafo (ver Figura 28). Algunos grupos no determinan la ruta más corta, pero establecen una característica fundamental, que es pasar por todos los vértices del grafo que delimita la ruta seleccionada. Los grupos representan sus modelos en el software Graphonline (Shiakhatarov, 2019) identificando que los caminos construidos se denominan hamiltonianos.

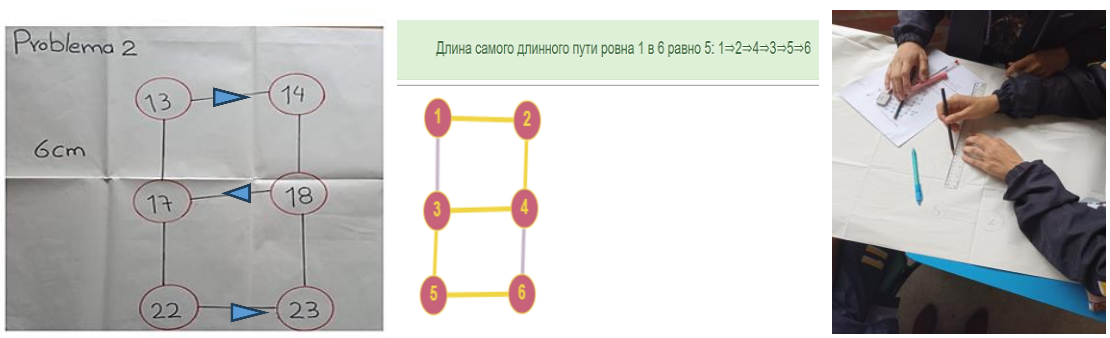


Figura 28. Camino hamiltoniano construido por G10 y estudiantes trabajando en la actividad 1

Los estudiantes reconocen que un camino hamiltoniano no es necesariamente único, que puede haber múltiples, uno o ningún camino hamiltoniano en un mismo grafo y que es determinado por la disposición de los vértices y las aristas, como se evidencia en el siguiente diálogo:

Docente: "¿Se pueden obtener diversos caminos hamiltonianos en el problema propuesto?

G8: pues, cada grupo hizo caminos diferentes

Docente: ¿pero esos caminos diferentes todos eran hamiltonianos?

G8: ¡No profe!, algunos grupos dijeron que en el software no les salió hamiltoniano, porque los caminos repetían vértices

Docente: ¿entonces qué podemos decir?

G8: ¡profe!, algunas rutas tienen varios caminos hamiltonianos, solo uno o no pueden tener nada, eso depende del camino que se encuentre"[99].

Con respecto a la *visualización,* dos grupos muestran DB, cinco en DM y tres en DA (ver Figura 29a). Los grupos utilizan representaciones (grafos), para transmitir de forma adecuada las soluciones a los problemas propuestos, los cuales, les permite la comprensión del concepto de camino hamiltoniano y les accede una mejor comprensión para la resolución de los problemas, mediante el análisis e interpretación de la información que apoyan sus ideas.

En la resoluc*ión de problemas,* dos grupos muestran DB, cuatro DM y cuatro en DA (ver Figura 29a). En el momento de "*abordaje"* se familiarizan con los problemas, relacionan del contexto del problema las calles, carreras y esquinas con sus conocimientos previos sobre camino, vértice y arista. En el "*ataque",* hacen uso de la visualización para hacer representaciones gráficas sobre caminos hamiltonianos, establecen conjeturas en busca de la solución y en el momento de la "*revisión",* comparan sus soluciones con sus pares y reflexionan sobre sus aciertos, participan activamente en la construcción del concepto de camino hamiltoniano. Por otra parte, seis grupos construyen un problema sencillo que evidencia la comprensión del concepto sobre camino hamiltoniano.

En la *MGA,* tres grupos muestran DB, cinco en DM y dos en DA (ver Figura 29a). En la fase de *"simplificación"* el 60% de los grupos usan el concepto de camino y camino hamiltoniano vinculándolos a los problemas formulados, en la fase de "*matematización",* reconocen elementos del contexto real como calles y carreras y los transforman en modelos. En la fase "*interpretar",* establecen relaciones entre el contexto real con elementos geométricos para justificar los procedimientos llevados a cabo y los comunican a sus pares en las exposiciones realizadas y en la fase de "*validación"* de los grupos identifican que las respuestas dadas cumplen con las condiciones originales de problema.

[99] Argumentos de los estudiantes del grupo 8

En relación con el *Sense Making,* dos grupos muestran DB, cinco DM y tres en DA (ver Figura 29a). Los estudiantes comprenden la información que se les presenta y establecen relaciones entre lo matemático y el contexto real de los problemas propuestos, creando algunas hipótesis fundamentadas.

Resultados generales Actividad N° 1. Se evidencia en el resultado total de la actividad en los 10 grupos, que un grupo se encuentran en DB y nueve de DM (ver Figura 29b). En cuanto al nivel de desempeño más representativo en los cinco procesos es el DM.

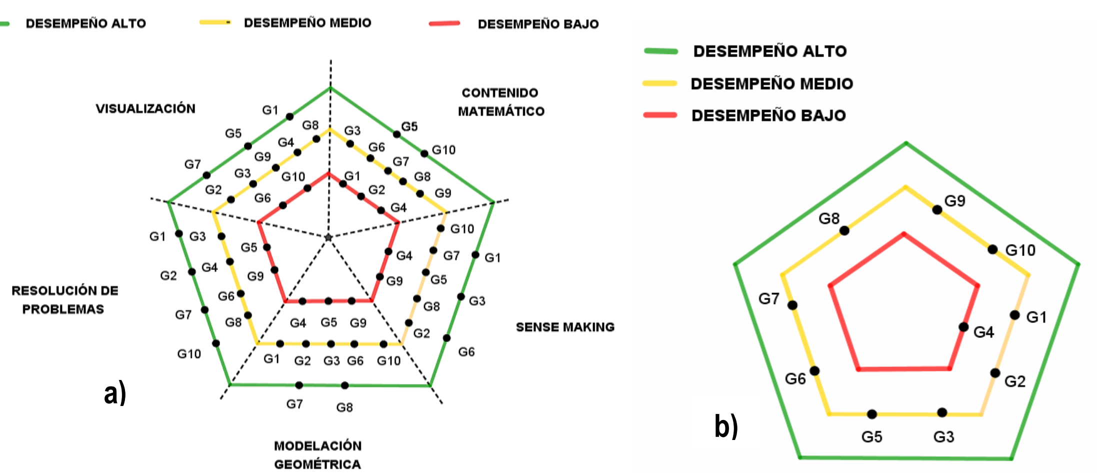


Figura 29. Resultados por procesos y resultado final de la actividad N°1

En esta medida, el contenido matemático, la visualización, la MGA, y el Sense Making el 50% de los grupos se ubican en DM, mientras que en la resolución de problemas tiene un 40% en DM, encontrándose grupos con un DB en todos los procesos (ver Figura 29a). Al respecto se enfatiza en qué, los estudiantes no tienen un dominio de la metodología, siendo para ellos nueva. Sin embargo, los grupos asumen la actividad con autonomía, buscan orientaciones del docente y sus pares. A continuación, se esbozan los logros y las dificultades encontradas en los grupos.

Logros alcanzados

- Usan correctamente el concepto de camino para encontrar rutas y patrones en situaciones que implican conexiones entre puntos o lugares a partir de los mapas entregados.
- A partir de la socialización de los modelos y de las preguntas heurísticas reconocen la estructura y representan grafos como un conjunto de vértices conectados por aristas.
- Por medio de los modelos que usan para la resolución de los problemas en un contexto auténtico identifican que un camino hamiltoniano se da cuando pasan por todos sus vértices una sola vez.
- Reconocen que puede haber varios, uno o ningún camino hamiltoniano en un grafo.

Dificultades encontradas

- Escasas habilidades para encontrar caminos hamiltonianos cuando aumenta el tamaño del grafo.
- Limitadas estrategias para determinar si el camino encontrado es el más corto o el más eficiente en un problema de contexto.
- Escasos argumentos para justificar que un grafo camino hamiltoniano no es necesariamente único.

6.5.2. Resultados actividad 2. El segundo día de brigada

Desempeño de los estudiantes durante la actividad. Con respecto al *contenido matemático* no se evidencian grupos en DB, siete en DM y tres DA (ver Figura 31a). Los grupos avanzan en la vinculación de las calles y carreras para la construcción de caminos en lugares que han sido identificados por ellos. Debido a que, en la actividad anterior se construyen caminos donde no se pasa dos veces por el mismo lugar y tienen ya construido el concepto de grafo. Además, se les facilita identificar caminos que parten de un lugar y llegar al mismo, sin pasar dos veces por los mismos vértices, donde comprenden que en estos recorridos se forma un ciclo cerrado (ver Figura 30).

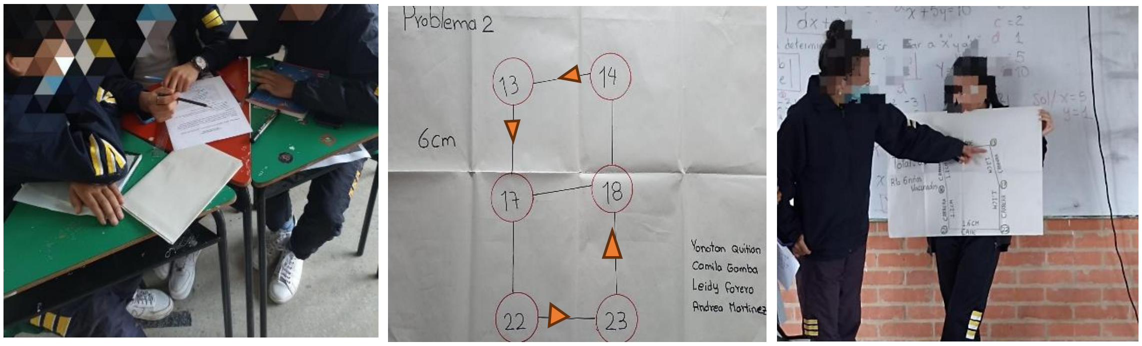


Figura 30. Estudiantes trabajando en la actividad 2, ciclo hamiltoniano de G3 y socialización

Los grupos logran hacer inferencias sobre las conexiones en un grafo hasta construir el concepto de ciclo hamiltoniano. Por su parte, descubren que no siempre hay una forma única de construir un ciclo hamiltoniano en los modelos ideados por ellos. A partir de diversos interrogantes relacionados con los modelos construidos para la solución de los problemas, los grupos identifican que un grafo puede tener varios, uno o ningún ciclo hamiltoniano.

Así mismo, establecen diferencias entre un camino y un ciclo hamiltoniano, como se evidencia en el siguiente diálogo:

> *Docente: "sí en su respuesta al problema hay un ciclo hamiltoniano y lo comprobaste con el software, entonces ¿cuál es la diferencia con un camino hamiltoniano?*
> *G10: profesora, en un camino se puede empezar en un lugar y terminar en otro, en el ciclo no, debe llegar al mismo.*
> *Docente: ¡bien! entonces ¿qué tienen en común un camino y ciclo hamiltoniano?*
> *G8: ¡pues profe!, pasan por todos los vértices y no repiten"*[100]

En el proceso de *visualización* no se evidencian grupos en DB, cuatro están en DM y seis en DA (ver Figura 31a). Los estudiantes representan grafos y reflexionan sobre cómo los vértices se conectan entre sí. Además, exploran diferentes rutas analizando la conexión entre vértices y evalúan si cumple la condición de visitar un vértice una sola vez. La visualización les ayuda a considerar cómo navegar eficientemente a través de la ruta seleccionada para evitar repeticiones y asegurarse de que él ciclo sea

[100] Argumentos de los estudiantes del grupo 10

posible. La posibilidad de interactuar visualmente les permitió experimentar con diversas estrategias para la comprensión del concepto de ciclo hamiltoniano.

En la *Resolución de problemas,* ningún grupo muestra un DB, tres en DM y siete en DA (ver Figura 31a). En la fase de *"abordaje",* los grupos aseguran la comprensión de los problemas propuestos analizando los mapas, identifican vértices, aristas y su conexión. En la fase de *"ataque,"* los grupos conciben estrategias para encontrar si es posible un ciclo, exploran diversos caminos asegurando que cada vértice sea visitado una sola vez y en la fase de *"revisión"*, reflexionan sobre las respuestas de sus pares, son capaces de identificar sus aciertos y modificar sus respuestas si es posible, a partir del proceso pueden responder a preguntas que aportan a la construcción del concepto de ciclo hamiltoniano.

Con respecto a la *MGA,* tres grupos muestran DB, dos en DM y cinco en DA (ver Figura 31a). En la fase de *"simplificación"* el de los grupos identifican elementos geométricos de los problemas, representan vértices y las conexiones para identificar rutas y un ciclo, en la fase de *"matematización"* trazan diversos caminos, recorriéndolos sin repetición de vértices y elaboran modelos. En cuanto a la fase *"interpretar",* establecen relaciones entre los modelos construidos con el problema en el contexto real y en la fase *"validar",* evalúan sus respuestas donde reconocen si la solución está dada en el concepto de ciclo hamiltoniano. Además, siete grupos logran crear un problema sencillo cuya solución contempla este concepto.

En cuanto a *Sense Making* dos grupos muestran DB, cinco en DM y cinco en DA (ver Figura 31a). Los estudiantes relacionan los conceptos previos como camino, vértice y arista para comprender el concepto de ciclo. Las representaciones mentales construidas por ellos les permiten visualizar y manipular elementos del problema para comprender, identificar patrones y se cuestionar para dar un significado a los problemas.

Resultados generales Actividad N° 2. En el resultado final de la actividad se encuentra que tres de los grupos evidencian un proceso de aprendizaje en DA y seis en DM (ver Figura 31b) no se evidencian grupos en DB. En los cinco procesos los resultados más significativos están en DM y DA, en el *contenido matemático* el 70% de los grupos están en DM, en la *visualización matemática* el 60% en DA y en la *resolución de problemas* el 70% en DA. Además, en *MGA* el 50% en el nivel DM y DA y en el *Sense Making* un 40% en DM como en DA (ver Figura 31b).

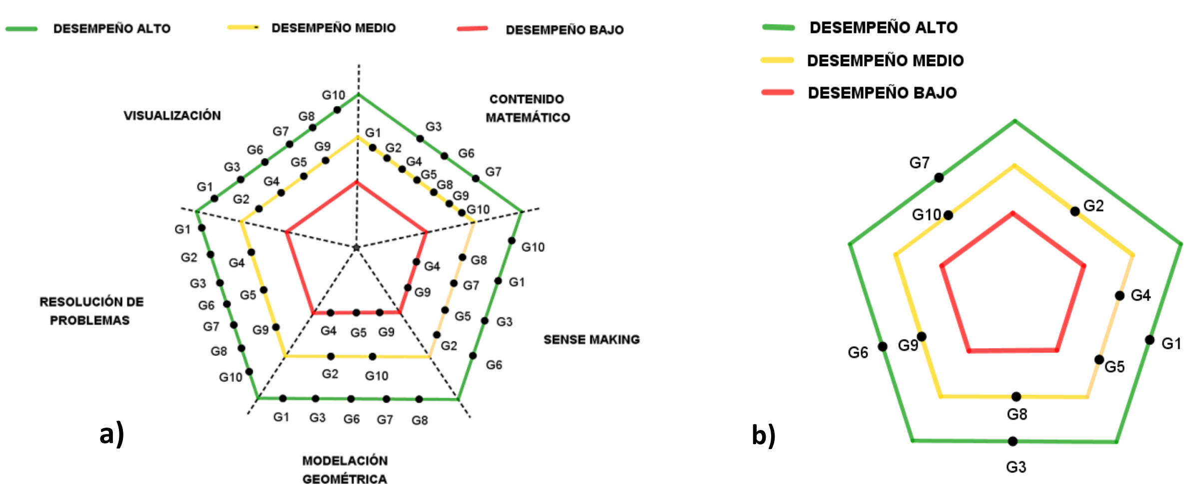


Figura 31. Resultados por procesos y resultado final de la actividad N°2

Es de resaltar, que se evidencian avances significativos en los desempeños, mostrando una evolución en cada uno de los procesos en comparación con la actividad N° 1, el contenido matemático, la visualización y la resolución de problemas tienen el mejor desempeño. Además, se percibe una mejor adaptación a la metodología y al trabajo autónomo. A continuación, se esbozan los logros y las dificultades encontradas en los grupos.

Logros alcanzados

- A través del recorrido sistemático en el mapa entienden las conexiones que se dan entre los vértices y cómo pueden formar rutas cerradas.
- Comprenden que un camino puede comenzar y terminar en el mismo vértice consolidando un ciclo cerrado.
- Identifican diferencias entre un camino y un ciclo hamiltoniano a partir de las representaciones.

Dificultades encontradas

- Escasas estrategias de solución. Por tanto, hacen diversos modelos para ir seleccionado aquel que da una respuesta coherente al problema.
- Limitadas destrezas para convertir palabras y conceptos de los problemas en términos matemáticos. Por tanto, la matematización es la fase de modelado más compleja para ellos,
- Limitadas habilidades para representar diversas rutas que pasen una sola vez por todos los vértices, que salgan y lleguen al mismo vértice. Los grupos requirieron de un mayor acompañamiento.

6.5.3. Resultados actividad 3. Triangulando Ando

Desempeño de los estudiantes durante la actividad. En relación con el *contenido matemático* ningún grupo muestra DB, cinco en DM y cinco en DM (ver Figura 33a). Los estudiantes logran descomponer un polígono en partes más simples (triángulos). Por tanto, triangulan diferentes tipos de polígonos y reconocen patrones en la cantidad de triángulos resultantes, los tipos y los tamaños de los triángulos. Los grupos comprenden como el área de un polígono puede hallarse sumando las áreas de los triángulos individuales. A partir de las orientaciones y preguntas heurísticas los grupos identifican como conectar los vértices por medio de una diagonal para formar triángulos que no se superponen ni dejan espacios entre ellos (ver Figura 32).

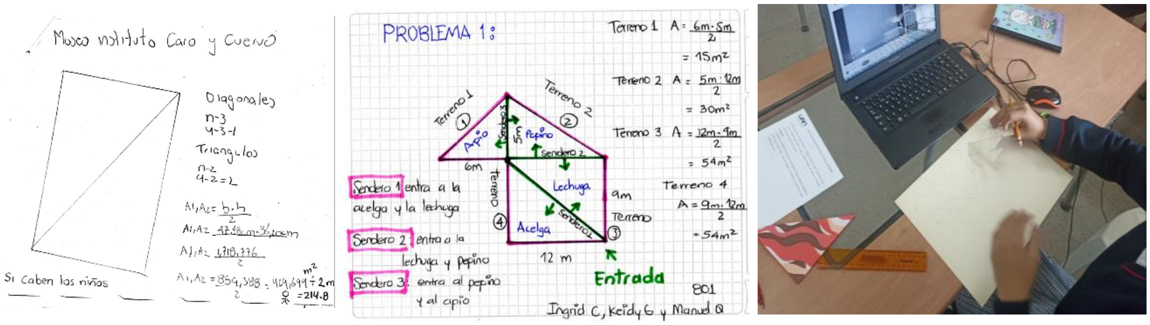


Figura 32. Soluciones con triangulación de polígonos de G7 y estudiantes trabajando la actividad

Los estudiantes hacen afirmaciones sobre las diversas maneras en que se pueden conectar los vértices y obtener varias formas de triangular un polígono, como se evidencia en los siguientes argumentos:

> *Docente: "¿podemos afirmar qué un polígono se puede dividir en triángulos de varias formas?*
> *G7: profe vimos que algunos grupos tenían el mismo polígono, pero lo dividieron diferente*
> *Docente: entonces ¿a qué se debe?*
> *G8: ¡pues profe!, uno puede sacar las diagonales desde uno u otro vértice del polígono, sin que se crucen o sin que los vértices estén seguidos"* [101]

Los estudiantes resuelven problemas donde comprenden como el área de un polígono se puede calcular sumando las áreas de los triángulos individuales. Además, exploran múltiples maneras de triangular los polígonos, donde confirman que la medida del área no cambia, también reconocen que no es necesario un orden para encontrar el área de los triángulos y que la medida del área es la misma.

En la V*isualización* no se manifiestan grupos en DB, cinco en BM y cinco en DA (ver Figura 33a). Los estudiantes reconocen la estructura del polígono en términos de vértices y lados, comprenden cómo se conectan los diferentes puntos para formar una figura. Así mismo, identifican la relación de los vértices del polígono con los segmentos diagonales y usan la visualización para representar gráficamente por

[101] Argumentos de los estudiantes del grupo 7 y 8

medio de modelos sus ideas y soluciones a los problemas, donde favorecen la capacidad de comunicación de los conceptos matemáticos.

En la *Resolución de problemas,* dos grupos muestran DB, cuatro en DM y cuatro en DA (ver Figura 33a). En la fase de *"abordaje"* los estudiantes identifican el problema a resolver y buscan la manera de dividir un polígono en triángulos mediante las conexiones de sus vértices. En la fase *"ataque",* para la triangular un polígono dividen un problema en pasos menores y descomponen una tarea en problemas más simples. Además, favorecen habilidades de razonamiento para planear estrategias y asegurarse que todos los triángulos se conecten correctamente y que todos los vértices se visiten. En la fase de *"revisión*", no todos encuentran dificultades en la solución y los que sí, las identifican y corrigen. En cuanto, al planteamiento de problemas 6 grupos construyen problemas simples que vincula la triangulación.

Con respecto a la *MGA,* dos grupos evidencian DB tres en DM y cinco en DA (ver Figura 33a). En la fase de "*simplificación"* los grupos desarrollan habilidades para la comprensión de los problemas por medio de preguntas heurísticas orientadoras. En la fase *"matematizar",* representan el polígono y los triángulos que lo componen, donde avanzan en la representación de objetos geométricos de manera gráfica. En la fase *"interpretar", identifican* que los triángulos que se forman en la triángulacion son congruentes y en la fase *"validar",* identifican varias formas de triangular un polígono y de representar una figura geométrica a la hora de abordar un problema.

En cuanto al *Sense Making,* un grupo presenta DB, seis en DM y tres en DM (ver Figura 33a). La triangulación de polígonos permite a los estudiantes construir sentido, de cómo se componen los polígonos y cómo pueden relacionar sus partes, explican y comunican como se logra la solución a los problemas compartiendo ideas matemáticas.

Resultados generales Actividad N° 3. En los resultados finales de esta actividad se observa que cinco grupos se encuentran tanto en DM y cinco en DA (ver Figura 33b).

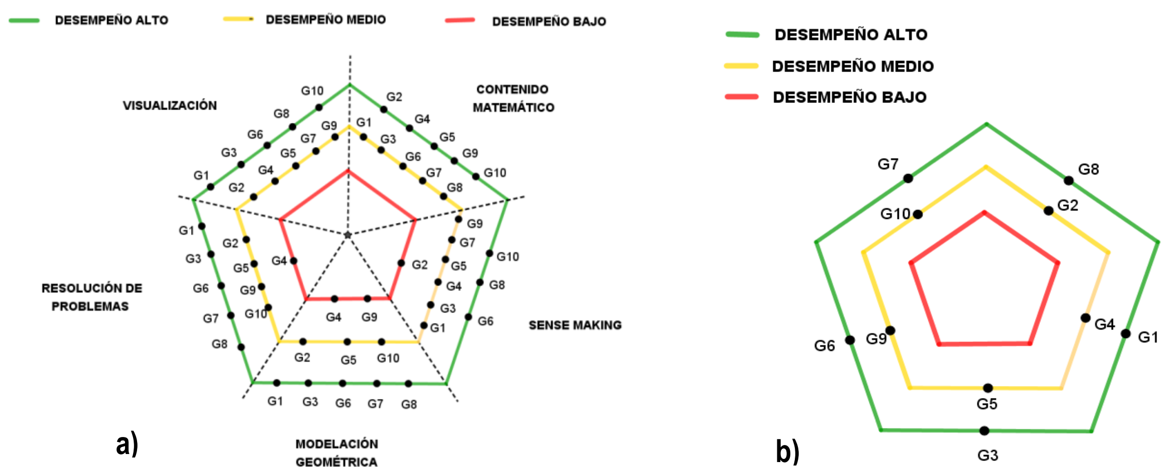


Figura 33. Resultados por procesos y resultado final de la actividad N°3

Con relación a los cinco procesos los resultados más representativos están en DM y DA. Se evidencia que en el *contenido matemático* y la *visualización* el 50% de los grupos están en DM y el otro 50% en DA, en la *resolución de problemas* el 50% de los grupos se encuentra en DA y un 10% en DB, la *MGA* el 50% se encuentra en DA y un 30% en DM y el *Sense Making* el 60% en DA (ver Figura 33a). Estos resultados muestran un avance en el desempeño de los estudiantes aumentando la cantidad de grupos en el DA. Así mismo, el proceso Sense Making y el proceso cognitivo con relación al contenido matemático presentan un progreso relevante. A continuación, se esbozan los logros y las dificultades encontradas en los grupos.

Logros alcanzados

- Identifican que varios triángulos pueden conformar un polígono que tiene un área mayor a cada uno de ellos.

- Descomponen figuras planas en triángulos de menor área y reconocen que la suma de dichas áreas reconstruye la figura inicial.
- Mejoran la capacidad de visualizar formas y áreas en un espacio bidimensional para llevar a cabo la solución a problemas en un contexto determinado.

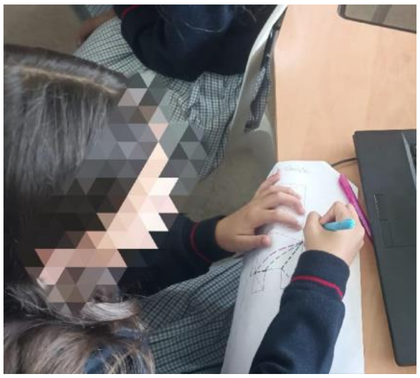
Dificultades encontradas

- Escaso dominio del concepto de área, el cual se debe abordar para poder avanzar en el desarrollo de la actividad.
- Limitadas habilidades para reconocer que no todas las composiciones de diagonales son apropiadas. Se apoya el proceso para que identifiquen que no debe haber solapamientos ni puntos de intersección múltiple.
- Escasas estrategias para verificar que la triangulación final sea válida y cumpla con los requerimientos del problema, esto les implicó hacer muchos modelos para poder llegar a una solución válida.

6.5.4. Resultados actividad 4. Protegiendo los museos de la capital

Desempeño de los estudiantes durante la actividad. Con respecto al *contenido matemático* ningún grupo evidencia DB, seis en DM y cuatro en DA (ver Figura 35a). Aunque el concepto del teorema de Chvatal que se aborda en esta actividad es avanzado, los estudiantes logran conocer conceptos básicos relacionados con la teoría de grafos de manera comprensible.

Los estudiantes llevan a otro contexto los aprendizajes construidos sobre la triangulación de polígonos y lo usan como un paso para representar el enunciado del teorema de Chvatal. Los grupos identifican que los triángulos construidos tienen ciclos hamiltonianos y perciben que las aristas del grafo formado no tienen una dirección específica y no se cruzan. A partir de la coloración de los vértices de los grafos los grupos asumen el concepto de vértices adyacentes. Durante el proceso los estudiantes construyen el concepto de coloración de grafos, asignan colores a los vértices de tal forma que, ningún par de vértices adyacentes tengan el mismo color e identifican el número cromático de un grafo. Igualmente, determinan el número mínimo de colores necesarios para realizar una coloración acertada (ver Figura 34a).



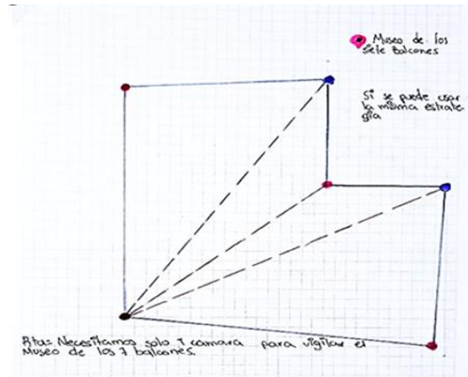


Figura 34. Estudiante trabajando en la actividad 4 y solución del problema de G9 momento de transferencia

Los grupos en la búsqueda de la cantidad de cámaras para cuidar el museo se centran en examinar las formas en que algunas áreas pueden verse desde ciertos puntos y otros pueden quedar ocultos, considerando la disposición de puntos en un espacio. A continuación, se muestran algunos argumentos:

> *Docente: "¿Cuántos colores usaron para la coloración de los vértices del museo elegido?*
> *G2: profe nosotros usamos tres, pero vimos que otros grupos usaron más*
> *Docente: entonces ¿de qué depende la cantidad de colores usados?*
> *G2: nosotros creemos que es por la cantidad de aristas que salen de un vértice, si son varias entonces usamos más colores o si hay más vértices pues más colores.*
> *Docente: ¿con varios colores como hacen para saber la cantidad de cámaras?*
> *G2: nosotros tomamos el color que menos se repetía"*[102]

En la *Visualización,* un grupo presenta DB, cuatro en DM y cinco en DA (ver Figura 35a). Los grupos identifican puntos de observación estratégicos para poder vigilar las diversas áreas de un museo y comprenden las relaciones entre las paredes, esquinas y los puntos de observación.

[102] Argumentos de los estudiantes del grupo 2

En la *resolución de problemas,* un grupo presenta DB, cuatro en DM y cinco en DA (ver Figura 35a). Por medio de los problemas propuestos los estudiantes en la fase de *"abordaje"* los grupos usan conceptos geométricos como polígono para representar paredes y esquinas de los museos. También, vértices y caras de los polígonos para determinar dónde se deben ubicar las cámaras, los vértices como puntos viables para su ubicación y las caras como áreas que pueden ser vigiladas. En la fase *"ataque",* representan un problema en un contexto real como un problema matemático, identifican variables para la creación de un modelo que describe la situación y reconocen las cámaras que se necesitan y donde pueden situarse. En la fase "*revisión",* construyen argumentos lógicos para comunicar sus respuestas, reconocen diferentes alternativas de solución y desarrollan la habilidad de corregir si es necesario sus soluciones. En la creación de problemas los 10 grupos realizan su planteamiento, sin embargo, cuatro grupos formulan adecuadamente problemas que tienen relación con el teorema.

En cuanto a la *MG,* ningún grupo presenta DB, seis en DM y cuatro en DA (ver Figura 35a). En la fase "*simplificar"* los grupos a través de preguntas heurísticas y de socialización comprenden el problema y reconocen aspectos importantes para la representación del modelo. En la fase *"matematizar"* examinan elementos significativos dentro del contexto geométrico, como lo son los vértices y las caras en un polígono, en relación con las condiciones concretas de los problemas realizando modelos para representar y encontrar la solución. En cuanto a la fase *"Interpretar",* relacionan sus modelos con el contexto real del problema y proponen una respuesta que satisface la situación dada. En la fase "*validar"* los estudiantes reconocen múltiples respuestas al problema y examinan si la solución dada por el grupo satisface la resolución del problema, algunos revisan y ajustan si es necesario.

En relación con el *Sense Making*, ningún grupo presenta DB, cuatro en DM y seis en DA (ver Figura 35a). Los grupos logran dar sentido a conceptos geométricos como polígono, vértice y caras en el contexto de los problemas. También, pueden convertir información de un contexto real a una representación matemática mediante la elaboración de modelos. Conjuntamente, toman decisiones para lograr simplificar el número de cámaras considerando varias opciones e indagan por medio de estrategias cuál es la mejor y favorecen la comunicación con sus pares por medio de argumentos geométricos.

Resultados generales Actividad N° 4. Los resultados finales muestran que seis de los grupos se encuentran en un DM y el cuatro en DA (ver Figura 35b).

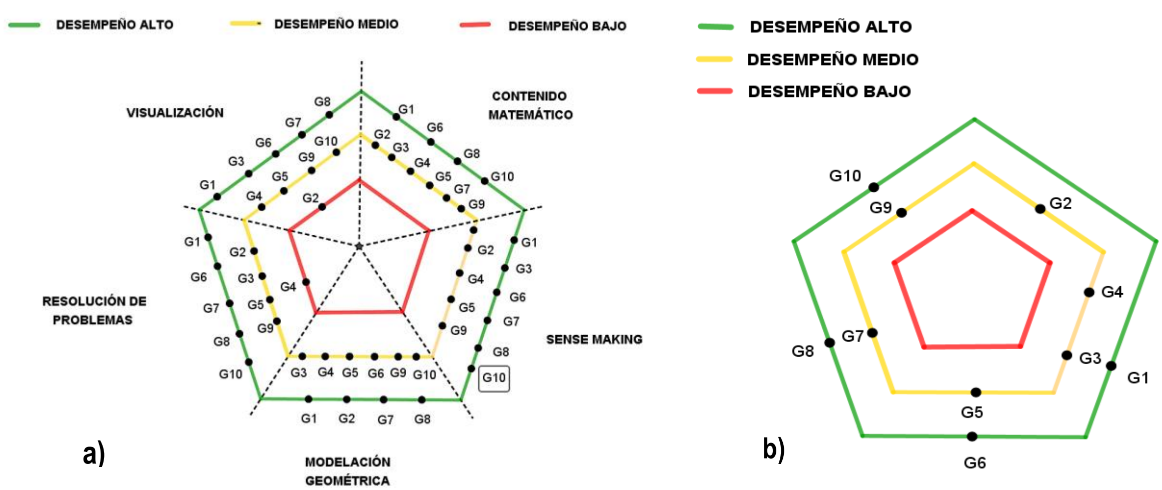


Figura 35. Resultados por procesos y resultado final de la actividad N°4

En relación con los cinco procesos los resultados más significativos se encuentran en DM y DA. En la *visualización* y la *resolución de problemas* el 50% de los grupos están en DA y el 40% DM, en el *contenido matemático* y la *MGA* el 60% en DM y el 40% en DA y el *Sense Making* el 60% en nivel DA y el 40% en DM (ver Figura 35a). Por tanto, se encuentra un progreso significativo a medida que han avanzado en las actividades, los estudiantes trabajan más seguros en su aprendizaje, sus estrategias metacognitivas han mejorado notoriamente y se evidencia un dominio relevante en la metodología. A continuación, se esbozan los logros y las dificultades encontradas en los grupos.

Logros alcanzados

- Descomponen correctamente el área de un polígono en áreas menores (triángulos).

- Comprenden el proceso de coloración de vértices, colorean los vértices de una figura, de tal forma que, los vértices adyacentes no tengan el mismo color. Además, identifican el número cromático.
- Identifican una estrategia para determinar el número de cámaras para vigilar un lugar determinado

Dificultades encontradas

- Escasa estrategias para encontrar el número cromático que cumplan con restricciones de adyacencia sin usar más colores de los necesarios. Esto se refuerza con problemas extras a la actividad para consolidar un proceso correcto.
- Limitada comprensión de las relaciones entre paredes, esquinas y puntos de observación, acompañándose por medio de preguntas heurísticas y problemas extras a la guía de trabajo.
- Limitadas habilidades para relacionar la cantidad de cámaras con la expresión [n/3] de los lados del polígono. Se concluye a partir de orientaciones y acompañamiento del docente.

6.5.5. Resultados actividad 5. Cuidando mi zona en la cancha

Desempeño de los estudiantes durante la actividad. Con respecto al *contenido matemático* dos grupos evidencian DB, dos en DM y seis en DA (ver Figura 37a). Los estudiantes involucran en el desarrollo de la actividad conceptos geométricos como: punto, el cual es una referencia en el espacio para la construcción del diagrama, las líneas que reconocen como bordes, relacionándolos como las fronteras de las regiones en que se divide el plano. Además, identifican que cada región formada en el diagrama es un polígono. Por su parte, G_8 sostiene "*profe las formas de las regiones son geométricas, cada una tiene diferentes lados*"[103].

[103] Argumento estudiante de G8

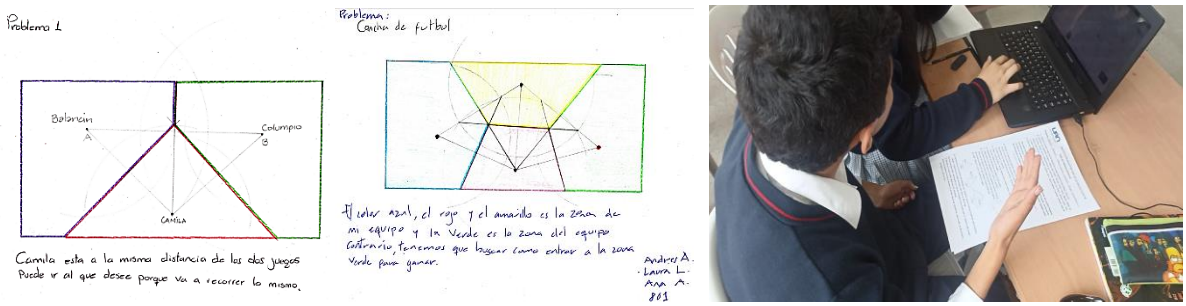


Figura 36. Modelos construidos por G8 y estudiantes trabajando en la actividad 5

También, reconocen el circuncentro en los triángulos que se forman para la construcción del diagrama y lo usan para la construcción de bordes de voronoi y usan el concepto de bisectriz para dividir el espacio entre dos puntos de referencia y establecer las fronteras de las regiones (ver Figura 36). Así mismo, los grupos identifican que las regiones que se forman en los diagramas de voronoi pueden tener diversas formas o patrones que dependen de la posición de los puntos de referencia.

Los estudiantes muestran en sus exposiciones y en las intervenciones que comprenden que cada punto pertenece a una región de voronoi. En este sentido, G_9 afirma *"Vimos en los dibujos que cada punto está en un polígono"*[104] que se encuentra en el centro y está equidistante a todos los puntos de referencia que rodean la región. En este sentido, los estudiantes llegan a explorar diversas posiciones de los puntos y las formas resultantes de las regiones de voronoi que son socializadas entre pares.

En la Visualización se presentan dos grupos en DB, cuatro en DM y cuatro en DA (ver Figura 37a). En el desarrollo de esta actividad los estudiantes visualizan cómo se divide un espacio en regiones y la proximidad a los puntos de referencia, favoreciendo la capacidad de pensar en base a las ubicaciones en el espacio. Reconocen patrones visuales en los diagramas de Voronoi y logran examinar cómo cambian

[104] Argumento estudiante del grupo 9

las regiones en relación con la ubicación y distribución de los puntos. Por tanto, logran relacionar visualmente cada punto de referencia con la región dentro del diagrama.

En la *Resolución de problemas* se encuentra un grupo en DB, cuatro en DM y cuatro en DA (ver Figura 37a). En el momento de la fase de *"abordaje"* los estudiantes identifican estrategias para dar solución a los problemas, se apoyan en la parte experiencial que se da en los primeros momentos de la actividad. En la fase "*ataque"* se apoyan en reglas geométricas como la proximidad, a cada punto de referencia en el espacio le asignan una región, reconocen cómo líneas o segmentos de línea a los bordes de las regiones que construyen usando bisectrices, el circuncentro, entre otros. Los grupos logran la construcción de modelos de voronoi para llegar a la solución de los problemas y en la fase *"revisión"*, reconocen sus aciertos y descubren las formas que toman las regiones en los diagramas de voronoi dependiendo de la posición de los puntos, encontrando diversas soluciones.

En la *MGA* dos grupos presentan DB, cinco en DM y tres en DA (ver Figura 37a). En la fase "*simplificar"* los grupos representan puntos de referencia y líneas límites para la creación de diagramas desarrollando habilidades de representación para la comprensión y la búsqueda de solución a los problemas, donde simplifican situaciones del mundo real en término de puntos. En la fase *"matematizar",* usan los modelos que han construido por medio de sus conocimientos geométricos como punto, línea, plano, polígono, región y bisectriz, donde dividen el espacio bidimensional en regiones apoyados en la proximidad de los puntos para conseguir la respuesta a los problemas. También, trasladan conceptos geométricos complejos a modelos matemáticos.

En la fase *"Interpretar"* por medio del análisis de los diagramas construidos abstraen información acerca de la proximidad de los puntos y las áreas de influencia, relaciona sus resultados matemáticos con la resolución del problema y buscan acercarse a una generalización abordando situaciones propuestas y en la fase *"validar"* los grupos a partir de la socialización de resultados validan sus modelos comparándolos con los de sus pares y reflexionan sobre los aciertos, reconocen si las regiones se ajustan y si los bordes son correctos para dar solución a situaciones. Los 10 grupos proponen problemas sencillos, no obstante, solo tres grupos plantean problemas que tiene relación con los diagramas de Voronoi

En el *Sense Making* ningún grupo presenta DB, cinco en DM y cinco en DA (ver Figura 37a). Los estudiantes comprenden y dan sentido a los diagramas de voronoi e identifican la manera en que se dividen las regiones en relación con la proximidad a los puntos de referencia y cómo estas relaciones pueden presentarse en situaciones reales. Igualmente, conocen como aplicar el concepto de diagrama de Voronoi como recurso en la resolución de problemas y exploran diferentes posiciones de los puntos y construyen soluciones únicas que comunican de manera comprensible para sus pares.

Resultados generales Actividad N° 5. Una vez implementada la actividad se encuentra que seis de los grupos se encuentran en un nivel DA y un cuatro en DM (ver Figura 37b).

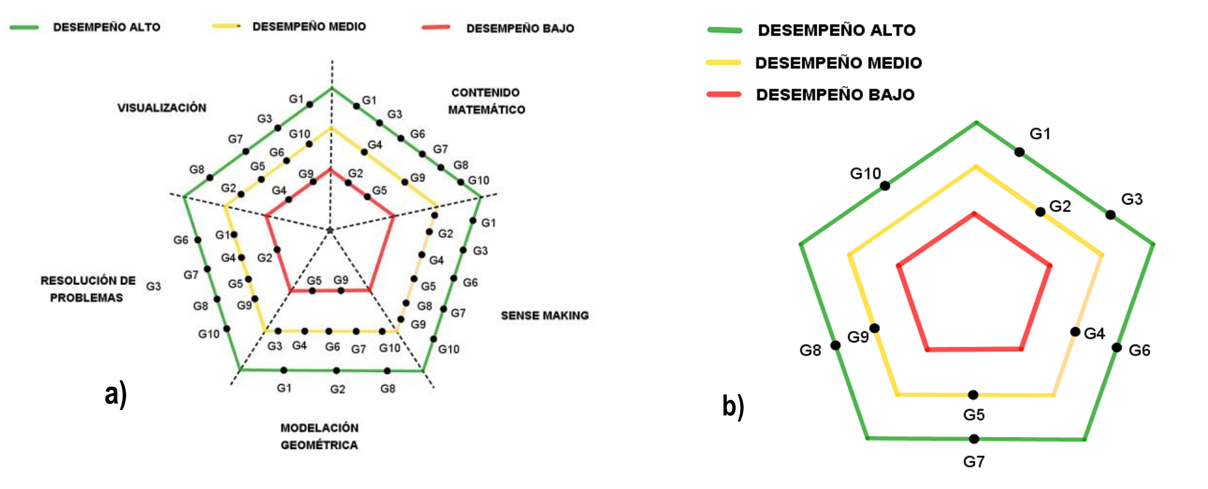


Figura 37. Resultados por procesos y resultado final de la actividad N°5

En los cinco procesos cognitivos los resultados más significativos están en DM y DA, en el *contenido matemático* el 60% de los grupos están en un nivel DA y un 20% en DM, en la *visualización* el 40% tanto en el nivel DA como DM y en la *resolución de problemas* el 50% en DA y el 40% en DM. Así mismo, en la *MGA* el 50% en nivel DM y el 30% en DA y el *Sense Making* el 50% tanto en DA como en DM (ver Figura 37a). En esta actividad un pequeño porcentaje está en nivel bajo en cada uno de los procesos, los grupos evidencian mayor exigencia para el alcance de las metas de aprendizaje, debido a la complejidad del tema y por sus limitados conceptos previos. A continuación, se esbozan los logros y las dificultades encontradas en los grupos.

Logros alcanzados

- Representan la división de un espacio atendiendo la proximidad de un conjunto de puntos.
- Reconocen cómo cambian las regiones resultantes en diferentes conjuntos de puntos a partir de la socialización de los modelos de sus pares.
- Identifican las fronteras de las regiones de Voronoi como resultado de una división del espacio según la distancia de los puntos y las usan para la solución de problemas.

Dificultades encontradas

- Limitadas habilidades para interpretar y usar los resultados en el contexto de un problema en contexto.
- Escasas destrezas para dibujar los polígonos de manera adecuada debido a la precisión en la ubicación de los límites de los polígonos. La actividad toma tiempo extra para lograr modelos adecuados.
- Dificultades para calcular las distancias entre los puntos y cualquier punto en el espacio.

6.5.6. Resultados actividad 6. El tanque de agua y los bebederos

Desempeño de los estudiantes durante la actividad. Con respecto al *contenido matemático* se evidencia un grupo en DB, cinco en DM y cuatro DA (ver Figura 39a). En esta actividad sobre el teorema de Viviani los grupos vinculan conceptos geométricos como la estructura de un triángulo equilátero y las relaciones entre sus lados y altura. Además, identifican que las alturas de un triángulo tienen una relación con la longitud de sus lados y que dichas alturas son perpendiculares a los lados. Por lo tanto, pueden comprender los problemas y representar un modelo para llegar a una solución. Los estudiantes a partir de la manipulación de material concreto logran contrastar la altura de los tres triángulos formadas con los segmentos que parten desde un punto dentro de un triángulo equilátero a los lados, con la altura total del triángulo inicial, como se evidencia en el siguiente diálogo:

> *Docente: "¿cuántos triángulos pudieron construir con las distancias entre el punto y los lados del triángulo equilátero?*
> *G1: eran 3 distancias, ¡pues tres, profe!*
> *Docente: ¿Qué representan esas distancias en los nuevos triángulos?*
> *G10: ¡profe!, esas distancias ahora son las alturas y cuando los pusimos uno encima del otro dieron la altura de triángulo grande que hicimos al principio*
> *Docente: "¿sucede esto sin importar el tamaño del triángulo inicial?*
> *G1: ¡yo creo que sí!, todos hicimos triángulos equiláteros de tamaños diferentes"* [105]

Para llegar a la solución del problema en un contexto real los estudiantes reconocen que la suma de las distancias desde un punto a cada uno de los lados es igual a la altura del triángulo.

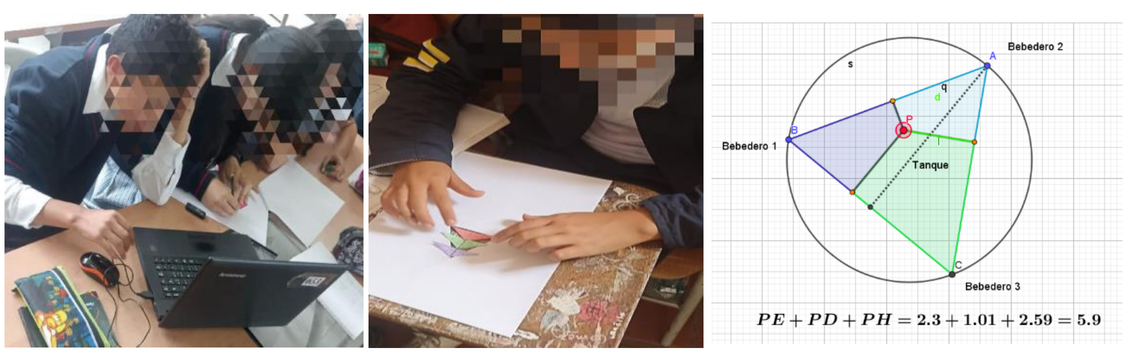


Figura 38. Estudiantes trabajando la actividad 6 y un modelo construido por G9 en GeoGebra

[105] Argumentos de los estudiantes del grupo 1 y 10

Por otra parte, a partir de la socialización de las respuestas de sus pares distinguen que independiente de la posición del punto dentro del triángulo equilátero la suma de las distancias a los lados siempre será igual a la altura del triángulo (ver Figura 38).

En la *Visualización* ningún grupo presenta DB, cinco en DM y seis en DA (ver Figura 39a). Los estudiantes representan triángulos en un plano bidimensional para comprender la manera de representar objetos en un espacio plano. Asimismo, identifican las relaciones entre los lados, la altura de un triángulo y como los elementos de un triángulo interactúan entre sí. Por tanto, los grupos logran representar, manipular e interpretar objetos y relaciones geométricas. Igualmente, comprenden el concepto de altura de un triángulo y cómo las alturas son perpendiculares a los lados opuestos.

En la *Resolución de* p*roblemas* se presenta un grupo en DB, cuatro en DM y cinco en DA (ver Figura 39a). En la fase *"abordaje"* los grupos logran leer y entender solícitamente los enunciados a los problemas para tomar la información principal. En la fase *"ataque",* seleccionan conceptos geométricos como triángulo equilátero, altura, lado y punto avanzar en una solución acertada y logran seguir una secuencia lógica de momentos para llegar a una solución válida y en la fase *"revisión",* a partir de la socialización entre pares, los grupos expresan sus soluciones, comprueban y revisan si satisfacen las condiciones del problema, presentan cálculos aritméticos, modelos y una explicación coherente. En cuanto al planteamiento de problemas por parte de los estudiantes, tres grupos logran proponer problemas que vinculan elementos del teorema.

En la *MGA* un grupo presenta DB, cinco en DM y tres en alto (ver Figura 39a). En la fase "*simplificar"* los grupos hacen representaciones geométricas (modelos) para relacionar situaciones en un contexto real en un plano bidimensional y comprenden cómo los conceptos matemáticos como triángulo equilátero, altura, lados y punto se aplican en contextos reales. En la fase *"matematizar"* los grupos logran identificar elementos claves de los problemas y los representan en triángulos y alturas en el espacio bidimensional.

Así mismo, reconocen que la suma de las distancias desde un punto interior a los lados es igual a la altura de un triángulo equilátero, usan procedimientos aritméticos y representaciones para llegar a respuestas coherentes. En la fase *"interpretar",* elaboran modelos para buscar respuestas específicas y ajustan sus modelos en para que puedan sujetarse satisfactoriamente a las condiciones de los problemas y en la fase *"validar",* aprenden a verificar si sus modelos y respuestas tienen coherencia. Por su parte, algunos grupos identifican las dificultades y ajustan sus soluciones.

En cuanto al *Sense Making* ningún grupo presenta DB, cuatro en DM y seis en DA (ver Figura 39a). Durante el desarrollo de la actividad con respecto al teorema de viviani se vinculan conceptos geométricos como triángulo, alturas, lados y sus relaciones en el espacio bidimensional. Por otra parte, logran comprender cómo se relacionan las matemáticas con situaciones de un contexto real dando sentido de utilidad de las matemáticas, desarrollando sentido cuando aplican estrategias para la resolución de los problemas, hacer suposiciones y evalúan la validez de la solución.

Resultados generales Actividad N° 6. Se evidencia que seis de los grupos se ubican en un DA y cuatro en DM (ver Figura 39b).

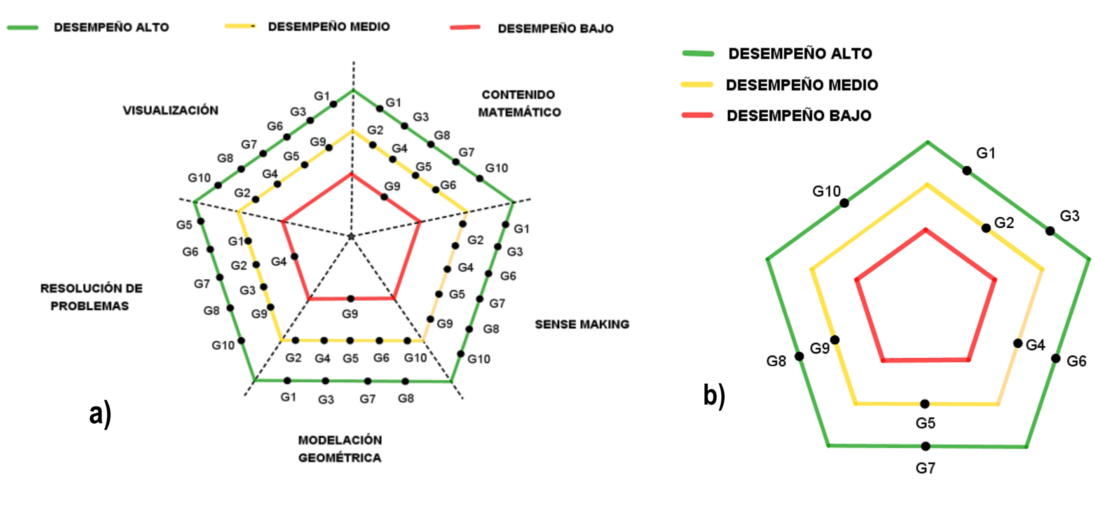


Figura 39. Resultados por procesos y resultado final de la actividad N°6

Los resultados muestran un buen desempeño, sin embargo, debido a la complejidad del tema se evidencian dificultades en los estudiantes para lograr las metas de aprendizaje y es necesario apoyar el trabajo rigurosamente. A continuación, se esbozan los logros y las dificultades encontradas en los grupos.

Logros alcanzados

- Reconocen elementos de los triángulos como lados y alturas.
- Identifican que la altura de los tres triángulos que se forman con los segmentos desde un punto a los lados de un triángulo equilátero es igual a la altura del triángulo inicial.
- Identifican que independientemente de donde se ubique el punto en el triángulo equilátero la suma de las distancias desde el punto a cada uno de los lados es la misma e igual a la altura de este.

Dificultades encontradas

- Limitadas habilidades para conectar el teorema de Viviani con otros conceptos geométricos importantes y utilizarlos en unión para abordar un problema en un contexto.
- Limitado dominio de los conceptos geométricos como congruencia de triángulos, perpendicularidad y propiedades de los triángulos equiláteros, por ende, se abordan problemas extras para que los estudiantes pudieran avanzar satisfactoriamente en la actividad.

6.5.7. Resultados actividad 7. La distancia más corta

Desempeño de los estudiantes durante la actividad. Con respecto al *contenido matemático* ningún grupo evidencia DB, seis en DM y cuatro en DA (ver Figura 41a). En el desarrollo de esta actividad los estudiantes vinculan conceptos geométricos como cuadrado, lado, perímetro, semiperímetro y área de una figura bidimensional. Además, reconocen los cuadriláteros formados por los segmentos desde el punto interior hasta los lados del cuadrado. Por tanto, descomponen el cuadrado en partes más pequeñas, reflexionan sobre cómo la suma de las áreas de dichos cuadriláteros se iguala al área del cuadrado e identifican que los cuadriláteros formados son congruentes entre sí.

Por otra parte, descubren cómo cambian las distancias desde el punto a los lados del cuadrado cuando se mueve el punto, reconocen patrones en las distancias y su relación con el semiperímetro. De esta manera, G_3 afirma *"Profe cambiamos el punto de lugar y la suma de las distancias se las líneas que hicimos dieron igual siempre"*[106]. Los grupos se acercan al concepto de invarianza deduciendo la existencia de propiedades geométricas que se mantienen constantes sin importar cómo se mueva el punto dentro del cuadrado (ver Figura 40). Con el alcance de los aprendizajes propuestos en la actividad y la propiedad que se presenta en el cuadrado se deja la posibilidad abierta para que los estudiantes puedan llegar a aplicar conceptos similares a otras figuras bidimensionales regulares.

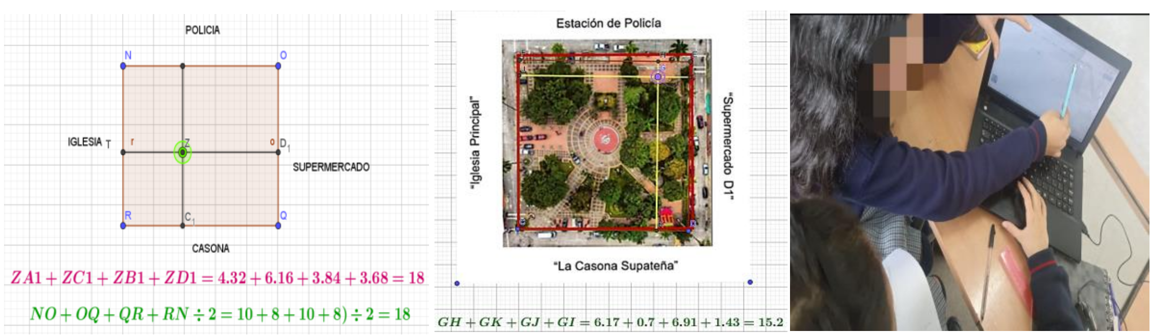


Figura 40. Móldelos construidos por G3, G10 y estudiantes trabajando en la actividad 7

En la *Visualización* ningún grupo presenta DB, cinco en DM y seis en DA (ver Figura 41a). Los estudiantes desarrollan la capacidad de visualizar y analizar relaciones y patrones en el espacio, como la posición del punto dentro del cuadrado donde consideran varias posiciones y la distancia entre los lados. También, reconocen que las distancias cambian según la posición del punto a cada uno de los cuatro lados del

[106] Argumentos de estudiante del grupo 3.

cuadrado y comprenden que la suma de las distancias desde el punto a los lados del cuadrado es igual al semiperímetro del cuadrado.

En la *Resolución de problemas* un grupo presenta DB, cuatro en DM y cinco en DA (ver Figura 41a). En la fase de *"abordaje"* comprende el problema, su finalidad y establecen conexión con sus ideas para crear estrategias de resolución y reconocen la relación desde el punto a los lados del cuadrado y el semi perímetro del cuadrado. En la fase *"ataque"* hace conexiones con conceptos matemáticos como cuadrado, distancia, perímetro y semiperímetro, elaboran diversos modelos del problema usando GeoGebra (Hohenwarter, 2002), llevan a cabo un plan para encontrar la suma de las distancias a través de operaciones aritméticas y logran argumentar la relación entre la posición del punto, la suma de las distancias desde el punto a los lados y la medida del semiperímetro y en la fase de *"revisión",* refinan la solución conseguida, verifican las hipótesis consolidadas y logran llegar a una conclusión a partir de los conceptos matemáticos aplicados.

En la *MGA* ningún grupo presenta DB, cuatro en DM y seis en DA (ver Figura 41a). En la fase "*simplificar"* los estudiantes identifican la información relevante y el objetivo de los problemas, observan que sin importar la posición de un punto dentro del cuadrado hay una constancia entre la suma de las distancias entre los lados y el punto. En la fase *"matematizar",* usa expresiones matemáticas para describir la relación entre distancias y el semiperímetro. Además, transforman un problema del mundo real en una representación matemática. En la fase *"interpretar",* entienden el significado de la propiedad trabajada en el cuadrado y como se relaciona con las distancias desde un punto a los lados y la aplican en la resolución de problemas. En la fase *"validar",* establecen justificaciones y argumentos para demostrar la propiedad abordada y corroboran la validez, comparan las soluciones y instituyen similitudes y diferencias. En cuanto a la creación de problemas seis grupos logran construir problemas sencillos que abordan la propiedad, aunque muy similares a los trabajados en la actividad.

En relación con el *Sense Making* ningún grupo presenta DB, cuatro en DM y seis en DA (ver Figura 41a). Los grupos desarrollan una comprensión significativa de conceptos geométricos, hacen un acercamiento a generalizar reglas a partir de situaciones para fortalecer su sentido matemático y desarrollan algunas habilidades en la resolución de problemas desafiantes en contextos y favorecen la destreza de visualización y conceptualización de relaciones geométricas.

Resultados generales Actividad N° 7. Se evidencia en los resultados finales que siete de los grupos se encuentran en el nivel de DA y tres en DM (ver Figura 41b). En cuanto a los cinco procesos cognitivos los resultados más significativos se dan en el DA y DM, en el *contenido matemático*, la *visualización*, la *MGA* el 60% de los grupos se encuentran en un nivel DA y un 40% en DM, la *resolución de problemas* y el *Sense Making* el 50% tanto en el DA como DM (ver Figura 41a). Los avances son reveladores en esta actividad, muestra progresos notables en el proceso de aprendizaje. Por su parte, los estudiantes demuestran dominio de estrategias de abordaje de los problemas propuestos, debido a que, se trabaja el teorema de Viviani en la actividad anterior y en esta actividad se busca una vinculación de este teorema en un cuadrado.

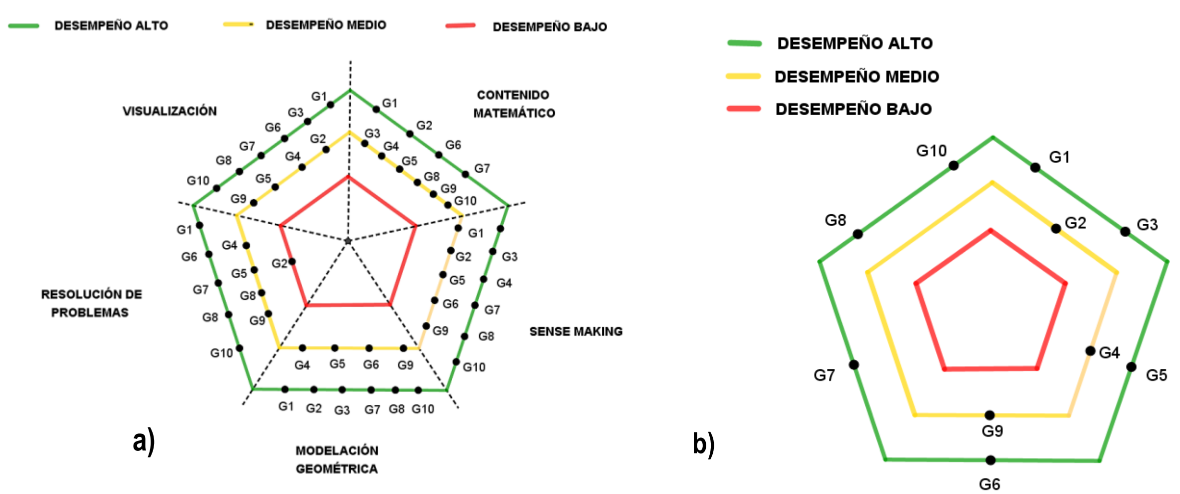


Figura 41. Resultados por procesos y resultado final de la actividad N°7

A continuación, se esbozan los logros y las dificultades encontradas en los grupos.

Logros alcanzados.

- Visualizan y conceptualizan la ubicación de un punto dentro de un cuadrado y la relación entre las distancias y los lados del cuadrado.
- Confrontan el área de un cuadrado con la adición de las áreas de los cuadriláteros que se forman con los segmentos desde un punto a los lados de dicho cuadrado.
- Reconoce que independientemente de la posición del punto dentro de un cuadrado, la suma de las distancias a los lados siempre será igual al semiperímetro y lo aplican a problemas en contexto real.

Dificultades encontradas.

- Limitado dominio de conceptos como semiperímetro y perímetro se apoya con actividades extras para poder avanzar en el desarrollo de la actividad.
- Escasas habilidades para establecer afirmaciones del teorema a partir de situaciones concretas. El docente debió apoyar el proceso acompañado de preguntas heurísticas.

6.5.8. Resultados actividad 8. Dos alfombras triangulares

Desempeño de los estudiantes durante la actividad. Con respecto al *contenido matemático* tres grupos evidencian DB, tres en DM y cuatro en DA (ver Figura 43a). En esta actividad los estudiantes hacen uso del concepto geométrico de área, lo aplican de tres maneras: para encontrar el área de las alfombras de manera individual, encontrar el área del piso sin ninguna alfombra y el área de la superposición de las alfombras usando el principio de exclusión. Es decir, resaltan el área de la superficie total sin superposición al área total del piso y para llegar a esta estrategia los grupos necesitan un acompañamiento basado en preguntas heurísticas y direccionamiento en el trabajo.

Los estudiantes logran comprender cómo el espacio en el suelo se distribuye cuando se superponen las alfombras. Para poder llegar a la solución de los problemas los grupos tienen que recurrir al razonamiento lógico para alcanzar la comprensión de cómo se relacionan las alfombras y cómo se calcula la superficie superpuesta. En este sentido, G_1 sostiene *"Para encontrar cuándo mide la parte de los tapetes que están uno sobre otro cogimos la fórmula de área de un rombo"*[107].

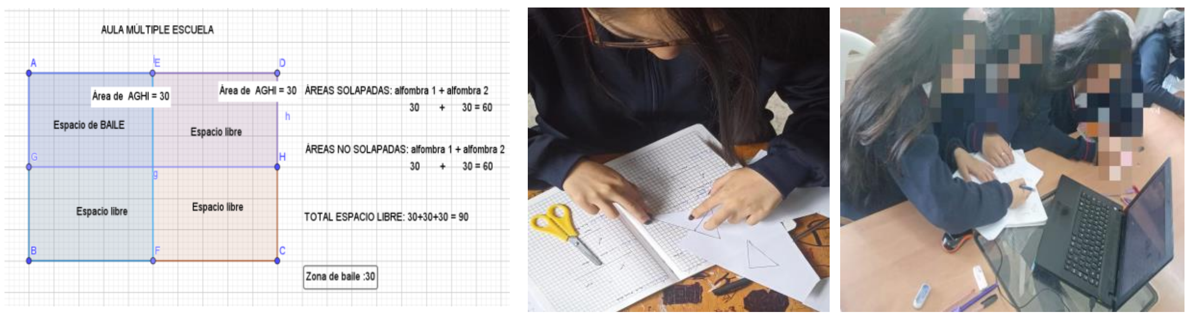


Figura 42. Modelo construido por G8 y estudiantes trabajando en la actividad 8

Los estudiantes llegan a comprender que el área superpuesta es igual a la suma de la superficie que no es cubierta por ninguna de las dos alfombras y cómo esta afirmación puede ser utilizada para dar solución a situaciones reales y usan el software GeoGebra (Hohenwarter, 2002) para modelar el problema propuesto y llegar a la solución (ver figura 42).

En la *Visualización* tres grupos presentan DB, cuatro en DM y tres en DA (ver Figura 43a). Los estudiantes se apropian de habilidades de visualización espacial, imaginan cómo las alfombras se superponen y de qué manera puede afectar el área total. Los grupos imaginan cómo las alfombras interactúan entre sí y con el suelo, comprenden como las alfombras se ponen en el suelo, como se mueven en un espacio tridimensional y reconocen como dos objetos pueden ocupar un mismo espacio al mismo tiempo. Para

[107] Argumentos de estudiante del grupo 1.

comprender el problema los grupos dividen el espacio en partes como el área de cada alfombra y el área superpuesta, donde relacionan conceptos como área y superposición en representaciones gráficas.

En el proceso de res*olución de problemas* un grupo presenta DB, cuatro en DM y cinco en DA (ver Figura 43a). En la fase de *"abordaje"* los grupos leen el problema y bajo preguntas logran comprender e identifican como datos principales alfombras, áreas y superposición. En la *"ataque",* planean estrategias de abordaje, usan procedimientos para encontrar el área de cada una de las alfombras y la resta para hallar el área de superposición, entre otros cálculos que considera cada grupo. En la fase *"revisión"* socializan sus respuestas e identifican sus aciertos y oportunidades de mejora, hacen ajustes a sus respuestas si lo consideran necesario, con el objetivo de que las respuestas tengan sentido en el contexto del problema. En cuanto a la creación de problemas, los grupos se acercan a un problema sencillo, no obstante, en su formulación no se evidencia coherencia con la afirmación sobre las alfombras.

En la *MGA* dos grupos presentan DB, cuatro en DM y cuatro en DA (ver Figura 43). En la fase "*simplificar"* los grupos leen los problemas varias veces, por medio de preguntas heurísticas y por grupos identifican los aspectos claves como áreas de las alfombras y superficie total del piso. En la fase *"matematizar,"* usan algoritmos matemáticos para encontrar las áreas de las alfombras y la superficie superpuesta. En la fase *"interpretar"* a partir de los resultados obtenidos en la socialización con sus pares y bajo preguntas heurísticas logran comprende que la superficie superpuesta es igual a la suma de las áreas no cubiertas por las alfombras. En este sentido, los grupos relacionan estas interpretaciones con el contexto real del problema y en la fase *"validar"* los grupos revisan sus respuestas identificando si son acertadas y si estas dan una solución al problema. Así mismo, comunican a sus compañeros de forma clara sus resultados y cómo llegaron a ellos.

En cuanto al *Sense Making* ningún grupo presenta DB, cuatro en DM y seis en DA (ver Figura 43a). Por medio de la comprensión de los conceptos matemáticos como área, superposición y la suma de las áreas los relacionan en un contexto real. También desarrollan la visualización donde aplican las áreas de las alfombras en un contexto y perciben relaciones de figuras geométricas en dos dimensiones. Con respecto, al trabajo en grupo y la socialización favorecen la capacidad de expresar sus aprendizajes de manera clara y coherente desarrollando habilidades matemáticas de comunicación.

Resultados generales Actividad N° 8. Luego de la implementación se evidencia que cinco de los grupos se encuentran en nivel DM y cinco en DA (ver Figura 43b). Los resultados más significativos en los cinco procesos se encuentran en DM y DA, en el *contenido matemático* el 30% de los grupos en un nivel DM y un 40% en DA, en la *visualización* el 40% en DM y el 30% en DA, en la *resolución de problemas* y la *MGA* el 40% en DM y el 50% en DA. Por su parte, en el *Sense Making* el 40% en DM y el 60% DA (ver Figura 43a). Se reconoce un 10% en algunos procesos en DB, aunque los estudiantes ya tenían un dominio de la metodología y de sus estrategias metacognitivas, el abordaje de esta temática fue exigente para ellos y se debió apoyar todo el proceso con actividades extras.

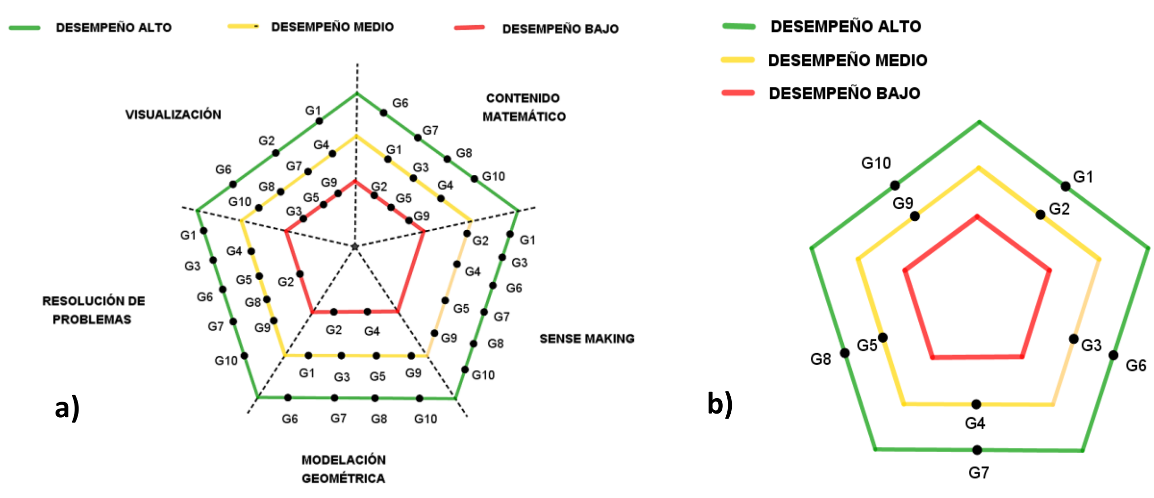


Figura 43. Resultados por procesos y resultado final de la actividad N°8.

A continuación, se esbozan los logros y las dificultades encontradas en los grupos.

Logros alcanzados

- Conocen cómo se superponen dos alfombras y cómo se divide el piso en regiones distintas.
- calculan áreas con figuras geométricas que se superponen.
- Comprende el concepto de superficie y cómo se puede dividir una superficie en diferentes partes usándolos para la resolución de problemas en un contexto real.

Dificultades encontradas

- Escaso dominio para realizar cálculos precisos y aplicar fórmulas geométricas adecuadas. Se requiere de actividades extras.
- Limitadas habilidades en la visualización de objetos en tres dimensiones, se complementa la actividad para avanzar en el proceso.

Conclusiones del capítulo 6

Los criterios dados por 12 expertos entrevistados sobre la resolución de problemas, la modelación geométrica y la modelación matemática a nivel internacional y las contribuciones obtenidas por medio de una encuesta a 20 docentes especialistas en la enseñanza de la matemática a nivel secundaria, aportan elementos reveladores para la investigación, especialmente en la concreción del problema, la construcción del modelo didáctico y la delimitación de las actividades.

De igual forma, se evidencia una mejora en los niveles de desempeño y el alcance de los aprendizajes propuestos en cada actividad, encontrando un progreso significativo a medida que se implementan las actividades. Sin embargo, las actividades 4, 6 y 8 se consideran de mayor exigencia para los estudiantes obteniendo resultados menores en relación con las demás actividades. Por consiguiente, los grupos logran estar al final del proceso en un 53% en un nivel DA y un 47% en DM (Ver Figura 44a).

Los estudiantes alcanzan los aprendizajes propuestos y se ubican en los niveles medio y alto en los cinco procesos propuestos en la fase de resolución del modelo didáctico, esto demuestra que los procesos se fortalecen a medida que se interviene en el aula. Por tanto, los resultados promedio evidencian que el 62% de grupos se encuentran en DA y el 38% en DM en dichos procesos (ver Figura 45b).

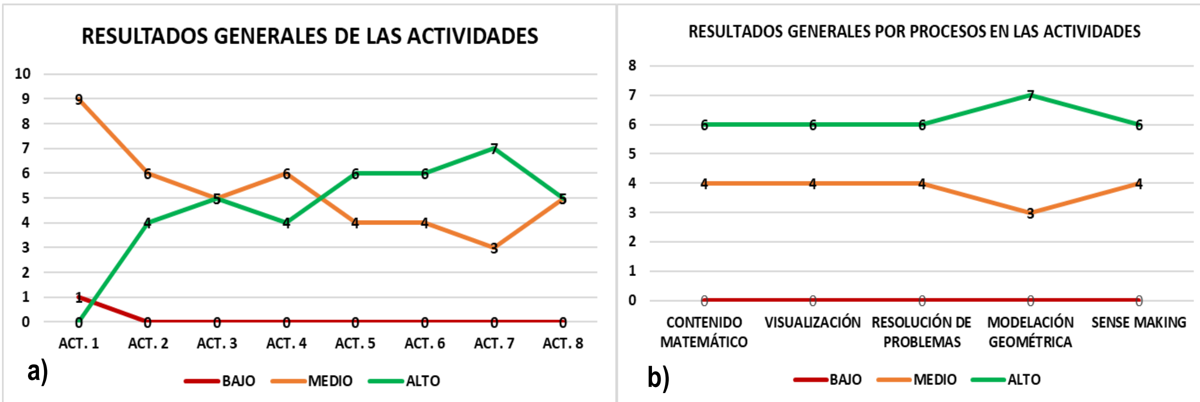


Figura 44. Resultados generales y por procesos de las 8 actividades

Acentuando en las fases de la *resolución de problemas* el 72% de los grupos en la competencia de *abordaje* logran un nivel DA y el 28% en DM, en la fase *ataque* el 73% en DA y el 27% en DM y en la fase de revisión un 81% en DA y 19% en DM. En esta medida, se encuentran progresos significativos en cada una de las fases. Por su parte, la fase con mayor dificultad para los grupos es el *"abordaje",* debido a sus pocas habilidades en la comprensión de un problema y la identificación de variables, lo cual se va optimizando a medida del trabajo en aula (ver Figura 45a).

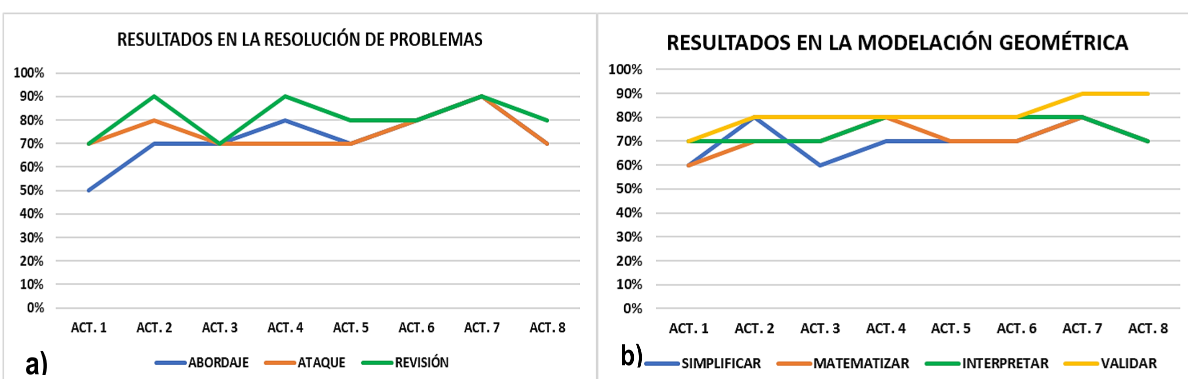


Figura 45.Resultados generales de la resolución de problemas y la MGA en las 8 actividades

Así mismo, en las fases de la *MGA* la evolución es relevante, en la fase de *simplificar* el 70% de los grupos logran el desarrollo de competencias en DA y el 30% en DM, en la fase *matematizar* un 73% en DA y el 27% en DM, en la fase *interpretar* el 75% logra un nivel DA y el 25% en DM y en la fase validar el 81% se encontró en DA y 19% en DM. Por consiguiente, las fases simplificar y matematizar fueron de mayor exigencia para los grupos (ver Figura 45b). En este sentido, la MGA y la resolución de problemas son procesos muy significativos que se fortalecen con la visualización y la unión de estos tres procesos permite la apropiación de los contenidos matemáticos y la creación de sentido y significado para la construcción robusta de pensamiento matemático

En la validación del modelo didáctico y del sistema de actividades se adopta el enfoque basado en argumentos (EBA) planteado por Kane (2013). Los argumentos se logran consensuar a partir del método Delphi y una rejilla para criterios de expertos, las sugerencias dadas por los especialistas al sistema de actividades a través de entrevistas, entrevistas en el campo y la encuesta de satisfacción a los estudiantes. Además de los resultados de la prueba no paramétrica de Wilconxon, se suscribe positivamente el aporte teórico y práctico de la investigación, dando cumplimiento de manera confiable al objetivo general. En consecuencia, los resultados de las actividades, los argumentos consensuados en la validación del modelo demuestran que, tanto el modelo como el sistema de actividades aportan significativamente al desarrollo robusto del pensamiento de los estudiantes del grado octavo de la básica secundaria.

CONCLUSIONES

A continuación, se presentan los principales hallazgos que evidencian el alcance del objetivo general de la investigación basada en el modelo didáctico para el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes de grado octavo, a través de la resolución de problemas mediado por la MGA.

La revisión de la literatura en el estado del arte se enmarca en tres criterios fundamentales: la resolución de problemas, la modelación matemática y la modelación geométrica. Las diversas investigaciones abordadas delimitan unas tendencias representativas a nivel internacional que dan aportes significativos a este estudio, donde se muestra el alcance que en cada una de ellas se obtienen. En cuanto a la resolución de problemas los investigadores Marín y Castro (2016), Lester & Cai (2016), Zapata, et al. (2017), García, García & Camacho (2019), Paye (2019) y Elmiwati et al. (2020) muestran que con el uso del modelado concede la creación de sentido matemático y el abordaje de situaciones reales en contextos auténticos y simulados que favorece la interacción de los estudiantes. Asimismo, plantean que se contribuye al desarrollo de habilidades para la resolución de problemas no rutinarios y se beneficia la creatividad.

Con respecto a la Modelación matemática, los autores Brown & Stillman (2017), Krutikhina et. al (2018), Blomhøj (2019), Riyanto & Putri (2019), Jankvist & Niss (2020), Vorhölter & Schwarz (2020), Krüger et al. (2020), Beckschulte (2020), Kaiser (2020), Lu & Kaiser (2021), Brady & Lesh (2021) y Kaiser et al. (2022) plantean que las investigaciones donde se lleva a cabo la modelación conceden el desarrollo de habilidades para la creación y resolución de problemas reales y no rutinarios. También, aportan a la creación de sentido de las matemáticas bajo la construcción y reconstrucción de contextos. Por tanto, la modelación se puede usar como una estrategia didáctica en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Con relación a la modelación geométrica, las investigaciones de Tezer & Cumhur (2017), Lieban & Lavicza (2017), Greefrath, et al. (2018), Herbst & Boileau (2018), Herbst (2019), Ludwig & Jablonski (2019), Rellensmann, et al. (2020), Suaebah, et al. (2020), Balyakin & Chempinsky (2020), Wickstrom & Roscoe (2020) y Buchholtz (2021) exponen que el desarrollo de competencias en el modelado geométrico se puede dar con el uso de ruta o ciclos de modelación. Igualmente, aseguran que este proceso potencia las habilidades de resolución de problemas, la construcción de conceptos matemáticos y favorece el alcance de los desempeños en matemáticas de los estudiantes en todos los niveles educativos.

Los elementos asumidos en el marco teórico son pertinentes para la construcción del aporte teórico (modelo didáctico) y el aporte práctico (sistema de actividades). La resolución de problemas y la MGA se consolidan como estrategia principal para la construcción de conceptos matemáticos y para el desarrollo de la capacidad cognitiva de los estudiantes de grado octavo. Con base a ello, se proponen actividades que favorecen el aprendizaje significativo y activo de los contenidos propuestos, se potencia la autonomía, la motivación por el aprendizaje, la creatividad y la creación de significado matemático y se plantea una apropiación de las fases de resolución propuestas por Mason, Burton y Stacey (2010).

La MGA se vincula a la resolución de problemas como un complemento y fuente fundamental para la construcción y desarrollo del sistema de las actividades que orienta la cimentación de saberes en los estudiantes. En este sentido, tanto la MGA como la resolución de problemas admite el desarrollo de habilidades cognitivas y ejecutivas que le concede al estudiante monitorear, regular el aprendizaje y apropiarse de la realidad. Por tanto, se asume el ciclo simplificado (simplificar, matematizar, interpretar y validar) propuesto por Stillman y Brown (2017) el cual, otorga el desarrollo de competencias de modelado.

El proceso metacognitivo de los estudiantes se analiza bajo tres estrategias: planificación, seguimiento y evaluación, presentadas por Kaiser (2020), las cuales evidencian las diversas maneras en que los estudiantes reflexionan sobre la dificultad de las tareas, valoran puntos débiles o fuertes de su cognición y controlan sus ideas en cada situación.

Con el proceso de visualización matemática se robustecen habilidades de representación, comunicación, reflexión y generalización, equilibrando la MGA y la resolución de problemas, a partir de la generación de ideas simbólicas, gráficas o numéricas. En este proceso se relacionan objetos geométricos que aportan a la construcción de conceptos matemáticos propuestos en el contenido de las actividades.

En el proceso "*Sense Making*" la creación de sentido y significado se fundamenta en la experiencia del estudiante y la construcción de conocimiento se da bajo una situación del mundo real. Por tanto, los cinco procesos que se asumen en esta investigación son el contenido matemático, la MGA, la resolución de problemas, la visualización y el Sense Making aportan al desarrollo robusto del pensamiento matemático.

El modelo didáctico propuesto permite estudiar los resultados del proceso de enseñanza y aprendizaje, identificando una transformación objetiva de la realidad en el quehacer docente como guía y en el estudiante como constructor de su conocimiento matemático. Se evidencia positivamente una concreción entre lo teórico y práctico del contenido asumido en las actividades, bajo un enfoque holístico, donde se desarrollan habilidades, capacidades y la construcción robusta del conocimiento matemático.

El sistema de actividades propuesto favorece el aprendizaje y mejora los niveles de desempeño de los estudiantes del grado octavo, porque logra desarrollar capacidades y habilidades cognitivas. La construcción de significado de conceptos con una comprensión más completa y holística le permite al estudiante integrar la tecnología, la comunicación efectiva, la creatividad y el trabajo en equipo. De la misma forma, se fortalecen estrategias metacognitivas donde se beneficia la consolidación del conocimiento, la regulación y la experiencia. Por su parte, la prueba de Wilconxon permitió evidenciar que positivamente hay cambios significativos en la construcción de saberes que aportan a que el estudiante consecuentemente pueda robustecer el desarrollo del pensamiento matemático.

El análisis de los resultados de la implementación de las actividades permite evidenciar lo siguiente:

- Se logra una apropiación del contenido matemático abordado, los estudiantes a partir de los conocimientos previos construyen nuevos, pero a la vez refuerzan aquellos que aún no dominan. Aunque los contenidos trabajados no pertenecen al currículo y son de un nivel avanzado, se observa que los estudiantes consiguen una comprensión sólida de ellos y trabajan motivados en la exploración y afianzamiento por nuevos aprendizajes.
- La planeación y desarrollo de las actividades en cuatro momentos (motivación, exploración, estructuración y transferencia) muestra un avance significativo en la comprensión y consolidación de los aprendizajes de los estudiantes.
- Se favorece la apropiación del contenido matemático por parte de los estudiantes, el docente ejerce un rol de mediador y facilitador en la construcción de los conocimientos y cada momento de la actividad es un reto para ellos quienes la toman con motivación.
- Se logra que los estudiantes desarrollen habilidades de resolución de problemas a través de los momentos de las actividades. Además, consiguen encontrar información relevante en un problema, descomponer un problema en partes menores para poder abordarlo, aplican conceptos matemáticos a situaciones en un contexto real o simulado y benefician la habilidad de comunicación al expresar las ideas matemáticas claramente.
- Los estudiantes hacen un acercamiento en la creación de problemas. Sin embargo, no consiguen habilidades robustas. Aunque hay comprensión de los conceptos, algunos grupos proponen problemas no coherentes, con debilidades en la redacción que no son comprensibles y la tendencia es hacer réplica de los problemas trabajados en aula. La creación de problemas es un proceso

cognitivo que puede irse afianzando en compañía de la resolución de problemas en el aula hasta que los estudiantes logren conseguir un buen dominio.

- En el proceso de MGA los estudiantes resuelven problemas matemáticos a través de la aplicación de conceptos geométricos, planifican y crean modelos válidos que les permite reflexionar en un problema real, simplifican situaciones de complejidad a modelos geométricos más sencillos en la búsqueda de la abstracción y un acercamiento a la generalización. Los estudiantes profundizan sus conocimientos por medio de la socialización con sus pares y mejoran a medida que van avanzando en el desarrollo del sistema de actividades.
- Por medio de una rúbrica se analizan los resultados en las fases de la modelación y se reconocen avances significativos. Los estudiantes pasan cada una de las fases sin limitarlas y separarlas, pero se evidencia que han pasado por ellas. El docente reconoce los alcances por medio de las evidencias que aportan los estudiantes durante el desarrollo de cada una de las actividades. Las fases con mayor dificultad para los estudiantes son la matematización y la validación, el acompañamiento del docente es guiado y orientado por medio de preguntas heurísticas para lograr avanzar.
- En las fases de la MGA se favorece el desarrollo de algunas habilidades por parte de los estudiantes. En la fase de *“simplificar”,* desarrollan la habilidad de descomponer un problema en partes simples, e identifican los elementos que consideran significativos para la construcción del modelo. En la fase *“matematizar”,* avanzan en la transformación de una situación en un contexto real o simulada en términos matemáticos y fortalecen la habilidad de traducir contextos reales a un contexto abstracto. En la fase *“interpretar”,* mejoran la habilidad de analizar sus soluciones matemáticas y de comunicación con sus pares, presentan sus resultados de forma coherente. En la fase *“validar”,* progresan en la comprobación de sus resultados para garantizar la correcta resolución de los problemas. El nivel de desempeño de estas habilidades es diverso en cada uno de los grupos.

- La visualización matemática favorece el proceso de aprendizaje durante el desarrollo del sistema de actividades. Además, se avanza en el fortalecimiento de habilidades para reconocer las relaciones de los objetos geométricos y figuras en el espacio para la construcción de conceptos. Por medio de las actividades de visualización mental en el momento de la motivación los estudiantes son capaces de imaginar, manipular objetos y figuras geométricas.
- En la creación de sentido y significado matemático los estudiantes progresan estableciendo relaciones de los conceptos matemáticos para aplicarlos en diferentes contextos. También, mejoran las capacidades de resolución de problemas y de la MGA, trasladando problemas de un contexto real auténtico o simulado en términos matemáticos. Por su parte, logran comunicar sus ideas y reconocen sus avances en los aprendizajes.
- Dentro de los alcances metacognitivos los estudiantes desarrollan habilidades para la consecución de estrategias en cada una de las fases abordadas en la resolución de problemas y modelación geométrica. En el proceso de monitoreo los grupos logran cambiar las estrategias si consideran necesario y autoevalúan si sus respuestas son válidas o si durante la consecución de los modelos deben mejorarse dichas estrategias. Al mismo tiempo, regulan la cantidad de estrategias que pueden darse durante el proceso para tomar la más relevante y reflexionan sobre sus aciertos o fallos.
- Durante el desarrollo de las actividades en algunos equipos se deben mediar las relaciones entre los estudiantes para que puedan avanzar en todo el proceso juntos y se debe establecer acuerdos, con el ánimo de que todos los grupos desarrollaren todas las actividades propuestas y poder evidenciar los avances de cada grupo.
- Los problemas abordados generan curiosidad y entusiasmo de los estudiantes, debido a que se usan contextos conocidos por ellos. Los estudiantes toman las actividades como retos elocuentes haciendo uso de la tecnología, de saberes matemáticos previos, de su ingenio en el uso de los

recursos propuestos, se basan en el apoyo mutuo en los grupos y la generación estrategias metacognitivas.

Se reconoce la MGA y la resolución de problemas como procesos fundamentales para el aprendizaje de la matemática. Algunas de las relaciones que se establecen entre estos dos procesos son:

- La MGA aporta a la construcción de modelos simplificados de la realidad a partir de los aspectos más relevantes permitiendo que los problemas matemáticos sean más comprensibles para resolver.
- La MGA permite la creación de modelos para descomponer un problema en sus partes principales favoreciendo la creación de conjeturas para la toma de decisiones en el momento de la resolución.
- La MGA exterioriza de manera clara conceptos complejos en modelos facilitando la resolución de los problemas.
- La resolución de problemas promueve el aprendizaje y el progreso continuo a través de la construcción de modelos para el análisis y obtención de una respuesta que favorece la experiencia para aplicarlos a situaciones similares.
- La resolución de problemas involucra situaciones en contextos reales o simulados que permiten determinar la seguridad del modelo y la confianza de las respuestas obtenidas.

Por ende, la MGA y la resolución de problemas concede a los estudiantes: reconocer la importancia y el beneficio de las matemáticas mejorando la motivación y la comprensión, elegir y emplear objetos matemáticos apropiados y transferir conocimientos matemáticos previos a variadas situaciones en contextos reales o simulados. Así mismo, concede conexiones entre lo teórico y lo práctico, y promueve el aprendizaje significativo para el alcance robusto de los conceptos matemáticos.

La presente investigación propone al modelo teórico TRU (Pensar, razonar y comprender) planteado por el Dr. Alan Shoenfeld vincular tres aspectos a la caracterización de los entornos de aprendizajes poderosos y la enseñanza para una construcción robusta de las matemáticas:

- La visualización matemática porque en la etapa *"pensar"* ayuda a los estudiantes a descomponer un problema en partes menos complejas para identificar relaciones visuales que no se dan en el problema matemático escrito. En la etapa "razonar" permite la representación y el análisis de la información facilitando la vinculación de conceptos matemáticos y estrategias lógicas en el proceso de resolución de problemas y en la etapa *"comprender"* accede a la manipulación de representaciones visuales para una comprensión robusta de los conceptos abstractos para la resolución de problemas.
- La MGA porque concede a los estudiantes en la etapa *"pensar"* la representación de situaciones visuales que permite la compresión para el abordaje del problema, en la etapa "razonar" ayuda a identificar relaciones matemáticas en un contexto visual para el ataque del problema y en la etapa *"comprender"* favorece el uso de conceptos matemáticos en situaciones concretas en un contexto geométrico para dar respuestas lógicas y adecuadas.
- El abordaje del contenido matemático avanzado en las actividades para la enseñanza y el aprendizaje que puedan ser vinculados y adaptados a la secundaria, debido a que, suscita en los estudiantes: la habilidad de pensar analíticamente desarrolla facultades para resolver problemas matemáticos retadores, permite la comprensión de conceptos abstractos para aplicarlos a variados contextos, fortalece la capacidad para generalizar conceptos y desarrollar habilidades metacognitivas.

La validación del modelo didáctico a través del método de Kane (2013) y la toman de argumentos de diversas fuentes: método Delphi, entrevistas a expertos, encuestas de satisfacción, entre otros, para identificar y analizar argumentos consensuados, destacan cualidades positivas del modelo y aportan criterios a las actividades, de tal forma que, se consolidan como oportunidades de mejora y refinamiento. Por su parte, los resultados de las actividades demuestran aportes significativos en los desempeños y aprendizajes de los estudiantes.

Con respecto a las entrevistas en el campo y la encuesta de satisfacción se identifican argumentos favorables acerca de la motivación por el aprendizaje, el reconocimiento de actividades retadoras y el predominio por el trabajo autónomo. Por su parte, la prueba de Wilconxon contrasta los resultados obtenidos y permite identificar que, tanto el aporte teórico como el práctico que se propone son notables y aportan hacia el avance robusto del desarrollo del pensamiento matemático.

RECOMENDACIONES

Luego de la aplicación del modelo didáctico para el desarrollo del pensamiento matemático a través de la resolución de problemas mediado por la modelación geométrica, es preciso reconocer las siguientes recomendaciones para futuros estudios:

Vincular procesos de modelación tanto matemática como geométrica en la enseñanza y aprendizaje en edades tempranas para fortalecer las habilidades de representación, aplicación de conceptos y la capacidad para la resolución de problemas retadores.

Las actividades propuestas pueden ser adaptadas según los intereses de aprendizaje del estudiante y el nivel educativo, para la ampliación y el mejoramiento progresivo de los niveles de desempeño y la construcción de conceptos de orden superior.

Desarrollar habilidades sobre el uso de herramientas y recursos tecnológicos en los estudiantes para favorecer el progreso en las competencias del modelado.

Investigar las relaciones entre la modelación geométrica y la visualización matemática en la creación de problemas matemáticos para contribuir a un robusto proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en la secundaria.

BIBLIOGRAFÍA

Abel, T., Searcy, M. & Salinas, T. (2020). Sense-making with the mathematical modelling process: Developing a framework for faculty practice. *In Mathematical modelling education and sense-making* (pp. 119-128). Springer, Cham.

Alsina, À. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado.

Ancona, D. (2012). Framing and Acting in the Unknown. S. Snook, N. Nohria, & R. Khurana, *the handbook for teaching leadership*, *3*(19), 198-217.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *52*(3), 215-241.

Ayllón, M., Gómez, I. & Ballesta, J. (2016). Mathematical Thinking and Creativity through Mathematical Problem Posing and Solving. *Journal of Educational Psychology-Propósitos y Representaciones*, *4*(1), 195-218.

Barrantes, H. (2019). Simetría y transformaciones geométricas en el plano, algunas ideas para su enseñanza. *Cuadernos*, 18.

Balyakin, A. & Chempinsky, L. (2020). Experience of teaching geometric modeling at schools and universities. In Journal of Physics: *Conference Series (Vol. 1691, No. 1, p. 012042)*. IOP Publishing.

Beckschulte, C. (2020). Mathematical modelling with a solution plan: An intervention study about the development of grade 9 students' modelling competencies. *In Mathematical Modelling Education and Sense-making* (pp. 129-138*).* Springer, Cham.

Biccard, P. (2020). Sense-making in Modelling Tasks: What Can We Learn from Other Domains? *In Mathematical Modelling Education and Sense-making* (pp. 223-236). Springer, Cham.

Blomhøj, M. (2019). Towards Integration of Modelling in Secondary Mathematics Teaching. *In Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education* (pp. 37-52). Springer, Cham.

Bliss, K. y Libertini, J. (2020). Lineamientos para la evaluación e instrucción en la educación en modelación matemática. *Gaimme*. *Society for industrial and applied mathematics (SIAM).*

Bressan, A., Gallego, M., Pérez, S., & Zolkower, B. (2016). Educación matemática realista bases teóricas. *Educación, 63,* 1-11.

Bressan, C., & Lesh, R. (2021). Development in Mathematical Modeling. *In Exploring Mathematical Modeling with Young Learners* (pp. 95-110). Springer, Cham.

Brown, J., & Stillman, G. (2017). Developing the roots of modelling conceptions: 'Mathematical modelling is the life of the world' *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48*(3), 353-373.

Brown, A. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on learning problems in mathematics*, 11(1), 7-16.

Buchholtz, N. (2021). Students' modelling processes when working with math trails. *Quadrante,* 30, 140-157.

Cai, J. (2003). Singaporean students' mathematical thinking in problem solving and problem posing: an exploratory study. *International journal of mathematical education in science and technology, 34*(5), 719-737.

Chvátal, V. (1975). A combinatorial theorem in plane geometry. *Journal of Combinatorial Theory, Series* B, 18(1).

Cronos (1994). Proyecto de enseñanza de las Ciencias Sociales: el modelo didáctico: Enseñar y aprender Ciencias Sociales. Algunas propuestas de Modelos Didácticos. Madrid, *Mare Nostrum ediciones*, col. Forum Didáctico.

Davis, P. y Hersh, R. (1988). “Experiencia Matemática” editorial Labor/MEC.

Delima, N. (2017). A relationship between problem solving ability and students’ mathematical thinking. *Infinity Journal*, 6(1), 21-28.

De Guzmán, M. (1996). El Rincón de la Pizarra. Cap. 0. *El papel de la visualización*. Madrid: Pirámide.

Diaz, M. & Poblete, Á. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números, 45*, 33-41.

Diestel, R. (2017). *Extremal Graph Theory. In Graph theory*. Springer, Berlin, Heidelberg.

Edo, S., Putri, R. I., & Hartono, Y. (2013). Investigating secondary school students' difficulties in modeling problems PISA-Model Level 5 and 6. *Journal on mathematics Education*, 4(1), 41-58.

Elmiwati, E., Kartini, K. & Zulkarnain, Z. (2020). Improvement of mathematical problem-solving ability of high school students through problem-based learning. *Journal of Educational Sciences,* 4(3), 584-593.

Entrevista Yamamoto Yuriko (2021).

Falk, M. (1980). *La enseñanza a través de problemas*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

García, I., García, A., & Camacho, M. (2019). La resolución de problemas no rutinarios en el aula de Primaria y Secundaria. Un estudio con profesores.

Greefrath, G., Siller, H., Vorhölter, K., & Kaiser, G. (2022). Mathematical modelling and discrete mathematics: opportunities for modern mathematics teaching. *ZDM–Mathematics Education*, 1-15.

Greefrath, G., Hertleif, C., & Siller, H. (2018). Mathematical modelling with digital tools—a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *ZDM*, 50(1-2), 233-244.

Grima, C. (2014). Teorema de la galería de arte. Recuperado 20/03/2022. https://culturacientifica.com/2014/01/29/teorema-de-la-galeria-de-arte/

Grima, C. (2017). El diagrama de Voronoi, la forma matemática de dividir el mundo. *Abcdario de las matemáticas. España: Abc ciencia*.

González, B., & León, A. (2013). Procesos cognitivos: De la prescripción curricular a la praxis educativa. *Revista de Teoría y Didáctica de las Ciencias Sociales*, (19), 49-67.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. *In Mathematics and cognition* (pp. 70-95). The Weizmann Institute of Science.

Hershkowitz, R., Duval, R., Bussi, M., Boero, P., Lehrer, R., Romberg, T., & Jones, K. (1998). *Reasoning in geometry. In Perspectives on the Teaching of Geometry* (pp. 29-83). Springer, Dordrecht.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, L. (2014). *Metodología de la investigación (Vol. 3).* México: McGraw-Hill.

Herbst, P., & Boileau, N. (2018). Geometric modeling of mesospace objects: A task, its didactical variables, and the mathematics at stake. In Visualizing Mathematics (pp. 277-308). *Springer, Cham.*

Herbst, P. (2019). Geometric Modeling Tasks and Opportunity to Learn Geometry: The Ranking Triangles Task Revisited. *In Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development* (pp. 123-143). Springer, Cham.

Jankvist, U. & Niss, M. (2020). Upper secondary school students' difficulties with mathematical modelling. *International Journal of mathematical education in science and technology,* 51-4, 467-496.

Kaiser, G. (2020). Mathematical modelling and applications in education. *Encyclopedia of mathematics education*, 553-561.

Kadijevich, D. (2009). Simple spreadsheet modeling by first-year business undergraduate students: Difficulties in the transition from real world problem statement to mathematical model. *Proceedings of the 11th International Congress on mathematical Education.* Mexico (pp. 241-248).

Klein, R. (2005). Voronoi-Diagramme. Algorithmische Geometrie: Grundlagen, Methoden, Anwendungen.

Krutikhina, M., Vlasova, V., Galushkin, A., & Pavlushin, A. (2018). Teaching of mathematical modeling elements in the mathematics course of the secondary school. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(4), 1305-1315.

Krüger, A., Vorhölter, K., & Kaiser, G. (2020). Metacognitive strategies in group work in mathematical modelling activities–The students' perspective. *In Mathematical modelling education and sense-making* (pp. 311-321). Springer, Cham.

Krulik, S. & Rudnick, J. (1987). *Problem solving: A handbook for teachers*. Allyn and Bacon, Inc., 7 Wells Avenue, Newton, Massachusetts 02159.

Lakatos, I. (1978). Pruebas y refutaciones*. La lógica del descubrimiento matemático*. Versión de Carlos Solis.

Lesh, R., & Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. Mathematical thinking and learning, *Taylor & Francis Group, LLC* 5(2-3), 157-189.

Lesh, R. & Doerr, H. (2003). Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching. Routledge.

Lester, F. & Cai, J. (2016). Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. Posing and solving mathematical problems, 117-135.

Lieban, D. & Lavicza, Z. (2017). Geometric modelling inspired by Da Vinci: shaping and adding movement using technology and physical resources. *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10).* p.993-999.

Ludwig, M., & Jablonski, S. (2019). Doing Math Modelling Outdoors-A Special Math Class Activity designed with MathCityMap. In HEAD 19. *5th International Conference on Higher Education Advances* (pp. 901-909). Editorial Universitat Politécnica de Valéncia.

Lu, X., & Kaiser, G. (2021). Creativity in students' modelling competencies: conceptualization and measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 1-25.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically*. Harlow: Pearson.

Marcus, D. (2008). *Graph theory: a problem-oriented approach. Maa*.

Marín, Y. y Castro, L. (2016). Desarrollo de la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumen a través de la implementación de la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, (46), p.139-158.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencia*. Colombia. Pág. 84-87.

MEN. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. Colombia. Pág. 62.

Minerva, F. (2006). *El proceso de investigación científica*. Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia.

Mousoulides, N., Christou, C. & Sriraman, B. (2008). A modeling perspective on the teaching and learning of mathematical problem solving. Mathematical Thinking and Learning. *Taylor & Francis Group*, LLC 10(3), 293-304.

Odden, T., & Russ, R. (2019). Defining sensemaking: Bringing clarity to a fragmented theoretical construct. *Science Education*, 103(1), 187-205.

Paye, C. (2019). Resolución de problemas como estrategia en el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de secundaria. *Revista de Investigaciones de la Escuela de Posgrado de la UNA PUNO, 8*(2), 1028-1036.

Pérez, F. (2004). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Peña, R., & Sánchez, R. (2018). Transición de la matemática de la escuela secundaria a la de la universidad a través del énfasis en la solución de problemas matemáticos. *Paradigma, 39*(2), 130-150.

Piaget, J. (1980). Teoría del desarrollo cognitivo de Piaget. *Creative Commons Attribution-Share*, 3, 1-13.

Pineda, J. & Fraile, F. (2020). El modelo didáctico como articulador del sistema-aula: un estudio de caso en educación secundaria. *Estudios pedagógicos (Valdivia), 46(1), 285-300.*

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2012). *Educación Matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos.* Villa María, Argentina: Editorial Universitaria Villa María, p. 155

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. *In Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 205-235).

Castaño, C., & Quecedo, M. (2002). *Introducción a la metodología de investigación cualitativa.*

Real Academia Española, (2014). Diccionario de la Lengua Española [DEL] edición 23. Ed. Espasa. p.1732.

Real Academia Española, (2021). Diccionario de la Lengua Española [DEL] edición 23. Ed. Espasa. p.1402.

Rellensmann, J., Schukajlow, S., & Leopold, C. (2020). Measuring and investigating strategic knowledge about drawing to solve geometry modelling problems. *ZDM*, 52(1), 97-110.

Rodríguez, A. & Arias, A. (2022). Modelos didácticos en matemáticas: relación e influencia en el rendimiento académico. *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, *26*(1), 281-302.

Romero, N. & Moncada, J. (2007). Modelo didáctico para la enseñanza de la educación ambiental en la Educación Superior Venezolana. *Revista de Pedagogía*, 28(83).

Rigelman, N. (2007). Fostering mathematical thinking and problem solving: The teacher's role. *Teaching Children Mathematics*, 13(6), 308-314.

Riyanto, B. & Putri, R. (2019). Learning mathematics through mathematical modeling approach using jembatan musi 2 context. In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 1315, No. 1, p. 012008).

Rojas, O. (2009). Modelo didáctico para favorecer la enseñanza - aprendizaje de la geometría con un enfoque desarrollador. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Ciencias Pedagógicas José de la Luz y Caballero. Holguín, Cuba.

Schneider, W., & Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. *ZDM, 42*(2), 149-161.

Schoenfeld, A., & Sloane, A. (2016). Mathematical thinking and problem solving. Routledge.

Schoenfeld, A. (2019). *The What and the Why of Modeling. In Affect in Mathematical Modeling*.p.96. Springer, Cham.

Stillman, G. (1996). Mathematical processing and cognitive demand in problem solving. *Mathematics Education Research Journal,* 8(2), 174-197.

Stillman, G. (2015). Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt? *In Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 791-805). Springer, Cham.

Stillman, G., Kaiser, G., & Lampen, C. (2020). *Mathematical modelling education and sense-making*. Springer.

Schukajlow, S., Kaiser, G., & Stillman, G. (2021). Modeling from a cognitive perspective: theoretical considerations and empirical contributions. *Mathematical Thinking and Learning,* 1-11.

Sigarreta, J., Rodríguez, J., & Ruesga, P. (2006). La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica. Boletín de la Asociación Matemática venezolana, 13(1), 53-66.

Socas, M., Hernández, J., & Palarea, M. (2014). Dificultades en la resolución de problemas de Matemáticas de estudiantes para profesor de educación primaria y secundaria.

Suaebah, E., Mardiyana, M., & Saputro, D. (2020). How to analyze the students' mathematization competencies in solving geometrical problems? *In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 1469, No. 1, p. 012169).* IOP Publishing.

Stanic, G., & Kilpatrick, J. (1988). Historical perspectives in problem solving. Research Agenda for Mathematics Education: The Teaching and Assessing of Problem Solving. Reston: National Council for Teachers of Mathematics. *Taylor, S. & Bogdan.*

Tezer, M., & Cumhur, M. (2017). Mathematics through the 5E instructional model and mathematical modelling: The geometrical objects. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*(8), 4789-4804.

Villa, J. & López, C. (2011). Sense of reality through mathematical modelling. *In Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 701-711). Springer, Dordrecht.

Vorhölter, K., & Schwarz, B. (2020). Fostering Students' Construction of Meaningfulness of Mathematics with Mathematical Modelling Problems. *In Mathematical Modelling Education and Sense-making* (pp. 323-333). Springer, Cham.

Watson, A. (2001). Instances of mathematical thinking among low attaining students in an ordinary secondary classroom. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(4), 461-475.

Wickstrom, M. & Roscoe, M. (2020). Geometric Modeling: Determining the Largest Lake. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching* PK-12, 113(8), 643-650.

Zapata, F., Cano, N. & Villa, J. (2017). Art and Geometry of Plants: Experience in Mathematical Modelling through Projects. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education,* 14, 585-603.

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). Editor's introduction: What is mathematical visualization. *Visualization in teaching and learning mathematics, 1*(8).

ANEXOS

ANEXO 1. ENCUENTA A DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Encuesta a expertos

Objetivo: Diagnosticar la situación actual del proceso de resolución de problemas con estudiantes de básica secundaria en las aulas.

Apreciado docente, su opinión y experiencia como docente de matemáticas es muy valiosa para el desarrollo de esta investigación, que pretende favorecer la enseñanza aprendizaje de problemas retadores en el aula para el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes.

Agradezco su participación.

I. Datos Generales.

1. Licenciado en matemáticas: Sí __ No__   2. Postgrado: ______________________________

3. Años de experiencia orientado cursos de matemáticas: ____

II. Cuestionario

Marca teniendo en cuenta la escala del (5) al (1), donde (1) nunca, (2) rara vez, (3) algunas veces, (4) casi siempre y (5) siempre, a las siguientes preguntas.

PREGUNTAS	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)
1. ¿Utiliza la resolución de problemas como una estrategia en el aula de clase?					
2. ¿Presentan dificultades los estudiantes para abordar el proceso de resolución de problemas?					
3. ¿Utiliza usted recursos didácticos durante el proceso de enseñanza aprendizaje de la resolución de problemas?					
4. ¿Utiliza herramientas tecnológicas en el proceso de resolución de problemas en el aula?					
5. ¿Fomenta en el proceso de resolución de problemas con sus estudiantes la modelación geométrica?					

III. Responde las siguientes preguntas

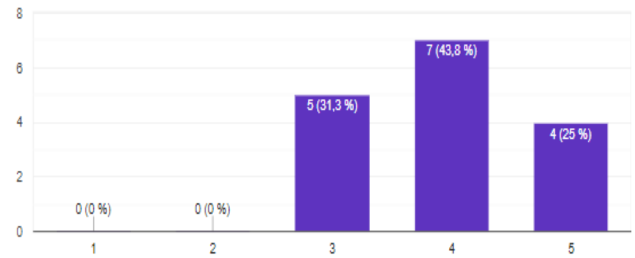
1. ¿Mencione las dificultades que presentan los estudiantes en la resolución de problemas?
2. ¿Qué recursos didácticos utiliza usted durante el proceso enseñanza aprendizaje de la resolución de problemas?
3. Describa brevemente la manera en qué fomenta la modelación geométrica en la resolución de problemas en el aula.

4. Sugiera una estrategia, metodología o actividad que permita mejorar la resolución de problemas en los estudiantes de secundaria.

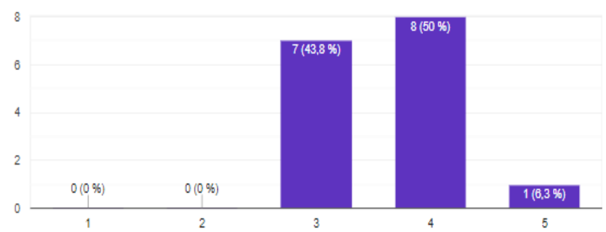
ANEXO 2. RESULTADOS DE LA ENCUESTA A DOCENTES

Resultados de la encuesta a docentes de matemáticas (Preguntas cerradas)

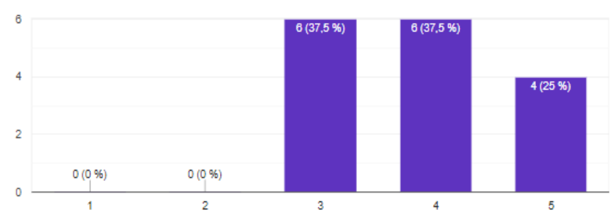
Pregunta A. ¿Utiliza la resolución de problemas como una estrategia en el aula de clase?



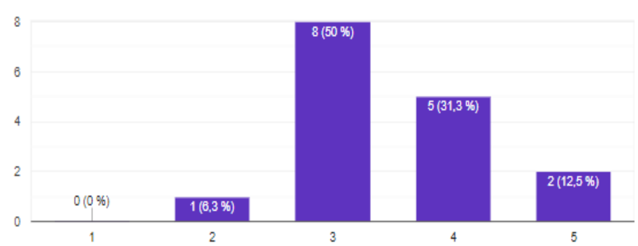
Pregunta B. ¿Presentan dificultades los estudiantes para abordar el proceso de resolución de problemas?



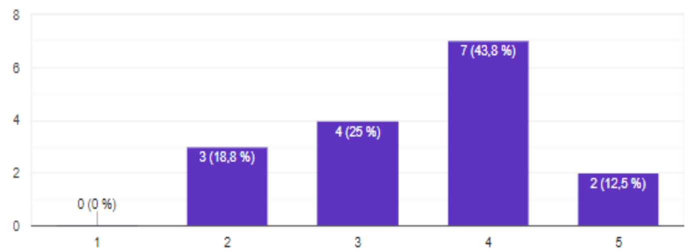
Pregunta C. ¿Utiliza usted recursos didácticos durante el proceso de enseñanza aprendizaje de la resolución de problemas?



Pregunta D. ¿Utiliza herramientas tecnológicas en el proceso de resolución de problemas en el aula?



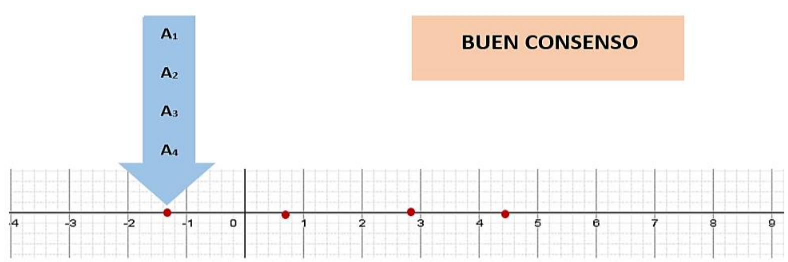
Pregunta E. ¿Fomenta en el proceso de resolución de problemas con sus estudiantes la modelación geométrica?



ANEXO 3. VALIDACIÓN POR MÉTODO DELPHI

Validación de las preguntas por Método Delphi

P	5	4	3	2	1	SUMA	PROM	N-P
A1	-0.67	0.49	4.09	4.09	4.09	12.09	2.31	-0.24
A2	-1.54	0.16	4.09	4.09	4.09	10.89	2.16	-0.09
A3	-0.67	0.32	4.09	4.09	4.09	11.92	2.17	-0.10
A4	-1.15	-0.16	1.03	4.09	4.09	8.2	2.28	-0.21
SUMA	-5.18	1.29	14.69	20.45	20.45	51.32	10.34	
PUNTOS DE CORTES	-1.04	0.26	2.94	4.09	4.09	10.34	/5	2.07
						/5	2.07	



Análisis de resultados: Atendiendo los puntos de corte y los puntos que representan las preguntas (A, B, C, D, E), ubicándolos de forma gráfica, se evidencia que cada pregunta se encuentra dentro de los intervalos de los puntos de corte, de esta forma, se afirma que las preguntas son pertinentes para el objetivo de la investigación.

ANEXO 4. ENTREVISTA A ESPECIALISTAS

Entrevista a especialistas

Objetivo: Corroborar la situación actual del proceso de resolución de problemas con estudiantes de básica secundaria en las aulas.

Estimado, su opinión es muy importante para el desarrollo de esta investigación, que pretende favorecer la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas retadores en el aula, para desarrollar el pensamiento matemático en los estudiantes de la básica secundaria. Agradezco sus aportes.

PREGUNTAS

1. ¿Cómo se concibe actualmente la resolución de problemas en la escuela secundaria?
2. ¿Qué dificultad considera usted que existe cuando se aborda la resolución de problemas retadores con los estudiantes de secundaria?
3. ¿Qué recursos didácticos se pueden utilizar en la enseñanza y aprendizaje para la resolución de problemas retadores con los estudiantes de secundaria?
4. ¿Sobre la base de la experiencia puede sugerir alguna estrategia o procedimiento para el proceso de resolución de problemas retadores en el aula apoyados por la modelación?
5. ¿De qué manera considera usted que la modelación geométrica puede aportar al abordaje de la resolución de problemas en el aula?

ANEXO 5. ACTIVIDAD EXPLORATORIA

Título: La mesa de madera

Objetivo: Comprender propiedades de un cuerpo geométrico para solucionar problemas de la vida real.

Sugerencia metodológica:

Los estudiantes reciben una guía de trabajo que contiene la actividad. El docente organiza a los estudiantes en pequeños grupos de 3 estudiantes, teniendo en cuenta la teoría de la comunidad de práctica de Wenger. Para desarrollar la actividad se recorren las fases propuestas por Brown y Stillman (2016): simplificar, matematizar, interpretar y validar. El tiempo proyectado para el desarrollo de la actividad es de aproximadamente cuatro horas, el proceso de resolución del problema planteado para la actividad es “in situ”. La docente media el proceso a través de preguntas heurísticas que orienta a los estudiantes en sus dificultades. La evaluación se realiza por la docente a través de la observación, la revisión de las evidencias de los estudiantes y su autoevaluación.

Materiales por utilizar: Mesa de madera, instrumentos para medir, hojas, cartulinas, marcadores, y fotocopias.

Se les pide a los estudiantes observar detalladamente las imágenes. Para ubicar al estudiante en el problema se le pide en plenaria participar respondiendo los siguientes interrogantes: ¿Qué formas tiene esta mesa? ¿Qué utilidad presta en el colegio? Y se les solicita a los estudiantes realizar la lectura del problema propuesto.

Figura 1. Fotografía mesa de madera

Problema Propuesto

La madera desempeña un papel relevante contra el cambio climático y la conservación del medio ambiente, se debe cuidar nuestro entorno con materiales reciclables y reutilizables. Se ha construido una mesa para el beneficio de todos en el colegio, es importante protegerla del sol, el agua y dar un aspecto más colorido. ¿Qué cantidad aproximada de pliegos de Foamy (70 x 95 cm) son necesarios para cubrir la mesa?

1. En grupo de tres estudiantes revisan nuevamente las imágenes, analizan el problema y estructuran una posible solución, producen esquemas que puede orientarlos a buscar un plan. El docente acompaña el trabajo por los equipos proporcionando preguntas que orienten a los estudiantes, tales como: ¿Qué formas se observan en la mesa?, ¿Pueden representar esas formas para encontrar variables?, ¿Si se requiere medir qué medirían?
2. El grupo visita el lugar, realizan las mediciones que acordaron y que les proporcionan bases para establecer una solución. Pueden apropiarse de las fases: entrada, ataque y revisión. Durante el acompañamiento el docente orienta el trabajo por los grupos, generando preguntas a los estudiantes: ¿Qué datos puedo tomar según las formas de la mesa?, ¿Para qué utilizaré los datos obtenidos?,

¿Cuál sería la expresión matemática que me permite relacionar los datos obtenidos?, ¿La solución obtenida tiene relación con la pregunta del problema, es coherente la respuesta?

3. Cada grupo elabora un cartel mostrando todo el proceso que los condujo a la solución, además, deberán pegarlo en una parte del salón. Cada grupo hará un recorrido silencioso observando las producciones de sus compañeros y se da un espacio para que los estudiantes generen preguntas a los grupos.

4. Los estudiantes en grupo deberán debatir sobre sus aciertos y oportunidades de mejora de su solución. El docente orienta este proceso estableciendo preguntas como: ¿Qué variables no tome en cuenta y que son necesarias para establecer una respuesta más precisa?, ¿Los esquemas realizados realmente me aportaron para llegar a una respuesta adecuada?, ¿Las mediciones fueron acertadas y aportaron a una respuesta correcta?, ¿Tuvimos en cuenta las formas de la mesa para abordar expresiones matemáticas que me permitían acercarme a una respuesta coherente a la pregunta?

5. En grupo los estudiantes realizan un debate para reconocer cómo se puede mejorar en el modelo y hacer los ajustes que se consideraron necesarios y entregar sus correcciones al docente. Los estudiantes valoran su proceso por medio de la rúbrica de evaluación expuesta en la guía anterior.

ANEXO 6. EJEMPLO DE RÚBRICA

Rúbrica de Evaluación Actividad 6

Asignación		**Indique la valoración de (1): SI cumple (0): NO cumple**		
Proceso Cognitivo	**Contenido Matemático**	Reconoce características de los triángulos equiláteros.		
		Contrasta la altura de los tres triángulos que se forman con los segmentos desde un punto a los lados de un triángulo equilátero con la altura de éste.		
		Identifica que la suma de las distancias desde un punto a cada uno de los lados es igual a la altura del triángulo solo sucede en los triángulos equiláteros.		
		Reconoce que independientemente de la posición del punto dentro del triángulo equilátero, la suma de las distancias a los lados siempre será igual a la altura del triángulo.		
	Visualización	Utiliza la visualización para comprender los conceptos matemáticos.		
		Usa representaciones visuales adecuadas y claras para comunicar los conceptos matemáticos.		
		Interpreta y analiza adecuadamente las visualizaciones matemáticas, identificando patrones, tendencias o relaciones relevantes.		
		Usa la visualización para comunicar y respaldar las ideas matemáticas de manera clara y coherente.		

	Resolución de Problemas	Comprende adecuadamente el problema e identifica los conceptos necesarios para llegar a la solución.		
		Selecciona una estrategia y la aplica para resolver el problema matemático usando elementos relacionados con la matemática.		
		Aplica conceptos y procedimientos en la resolución del problema, justificando los pasos y utilizando las propiedades y relaciones.		
		Comunica de manera clara y organizada, utilizando la terminología matemática adecuada y explica los pasos y razonamientos.		
		Valida la respuesta matemática interpretándola en el contexto real original del problema.		
	Modelación Geométrica	Identifica los elementos geométricos clave del problema del contexto real original e interpreta dentro del modelado geométrico.		
		Establece de manera clara y coherente la relación entre el problema real y los conceptos matemáticos.		
		Interpreta correctamente los resultados matemáticos y lo relaciona en el problema real con argumentos geométricos.		
		Realiza una validación del modelo demostrando una comprensión de su utilidad y sus limitaciones.		
	Sense Making	Comprende adecuadamente la información relevante y la relaciona con el contexto.		
		Identifica y analiza patrones y relaciones relevantes en la información.		
		Genera hipótesis o predicciones fundamentadas y coherentes con la información y el contexto estableciendo una estrategia de solución al problema.		
		Realiza un análisis crítico de la solución llevada a cabo y una evaluación adecuada de las soluciones, considerando diferentes perspectivas y criterios.		
		Comunica la construcción de significado de manera clara y organizada, utilizando la terminología adecuada.		
Escala de valoración		**Bajo: 0 – 10 Medio: 11 – 18 Alto: 19 - 24**	**Total**	

ANEXO 7. REJILLA DE EVALUACIÓN PARA VALIDACIÓN DE MODELOS PARA ESPECIALISTAS

En esta investigación resulta de mucha importancia su valoración de los aspectos puestos a su consideración, así como de otros criterios o sugerencias que considere pertinente ofrecernos en aras de refinar nuestra propuesta. A continuación, le ofrecemos la relación de los aspectos y una tabla para su valoración, atendiendo a las categorías de Muy adecuado (MA), Bastante adecuado (BA), Adecuado (A), Poco adecuado (PA) e Inadecuado (I). Al final se ofrece una tabla en blanco para que brinde otras opiniones o valoraciones.

Relación de los aspectos a considerar.

A1: Fundamentos del modelo.

- Son adecuados y pertinentes.
- Permiten dinamizar el Modelo.

A2: Parte 1. Identificación

- Pertinencia en la identificación de oportunidades de mejora
- Relación entre la Educación Matemática Realista
  y los propósitos que se desean conseguir

A3: Parte 2. Resolución.

- Pertinencia y relación entre de los componentes tratados.
- Si la relación entre los componentes origina la nueva cualidad: Aportar al desarrollo robusto del pensamiento matemático a través de la resolución de problemas apoyado en la modelación geométrica.

	MA	BA	A	PA	I
A1					
A2					
A3					
A4					

A4: Parte 3. Concreción práctica.

- Relación con el Modelo
- Suficiencia de la actividad
- Permiten la búsqueda del contenido diverso -para los estudiantes

A continuación, se ofrece una tabla para que usted pueda emitir sus sugerencias o recomendaciones para el refinamiento del Modelo y de las actividades

Algunas sugerencias y recomendaciones.

ANEXO 8. ENCUESTA DE SATISFACCIÓN A ESTUDIANTES

Apreciado estudiante, una vez terminada las actividades y a partir de su experiencia como participante, responda las siguientes preguntas de 5 a 1, siendo cinco (5) la mayor calificación y uno (1) la menor calificación.

1. ¿Considera usted que las actividades desarrolladas motivan el estudio de la matemática?

5 ☐ 4 ☐ 3 ☐ 2 ☐ 1 ☐

2. ¿Cree usted que su desempeño en el área de las matemáticas mejoraría si estas actividades se repitieran con frecuencia?

5 ☐ 4 ☐ 3 ☐ 2 ☐ 1 ☐

3. ¿Las actividades propuestas constituyeron un reto para usted?

5 ☐ 4 ☐ 3 ☐ 2 ☐ 1 ☐

4. ¿Se sintió motivado a desarrollar los problemas de forma autónoma?

5 ☐ 4 ☐ 3 ☐ 2 ☐ 1 ☐

5. ¿Qué aspectos le pareció interesante en las actividades?

____

____

ANEXO 9. ALGUNAS EVIDENCIAS DEL DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES