LAS CONSTRUCCIONES AUXILIARES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Erika Preciado Ramos

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Maestría en Educación Matemática

Bogotá D.C., Colombia

2017

LAS CONSTRUCCIONES AUXILIARES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Tesis que se presenta como requisito parcial para obtener

el título de Magister en Educación Matemática

Erika Preciado Ramos

Director de tesis: Dra. Mary Falk de Losada

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Maestría en Educación Matemática

Bogotá D.C., Colombia

2017

DEDICATORIA

A Dios, por darme vida,

A mi madre, por ser mi cómplice, apoyo y confianza

A Omar, por existir.

A Evy Sofia y María Salomé, mis mágicas princesas, mi todo.

AGRADECIMIENTO

Agradezco a Dios, motor latente en mi vida, creador de mí ser y mi felicidad, dador de los ángeles que brindaron su apoyo, su comprensión y su tesón. Mis ángeles, la Doctora María Falk, mi asesora de tesis, ser inigualable, que con su fuerza, inteligencia, supervisión y gran ejemplo, creyó en mí cuando más lo necesite, logró motivarme y convencerme de nuestra responsabilidad docente; el Doctor Mauro Pupo quien con su ternura, singularidad y autenticidad me convenció del carácter humano de la maestría. A mis docentes, los doctores Osvaldo, Gerardo y Rafael, personajes idóneos en su saber, caballeros en su trato y buenos seres humanos. A la Doctora María Losada y al Doctor Juan Basto, por permitirme trabajar con los jóvenes de entrenamiento y presenciar sus fantásticas clases. A la doctora Diana por su gentil colaboración. Agradecimiento gigante a los niños y jóvenes que tan gentilmente permitieron que me acercara a su trabajo y compartieron su experiencia, sus pensamientos y su alegría conmigo. A las personas de la Universidad desde doña María hasta Hermes y Andrés por acompañar los pequeños pero fundamentales detalles de nuestras clases. A las dos instituciones que fueron escenario para mi investigación, La Universidad Antonio Nariño y el Colegio Sorrento I.E.D. A mis compañeros, tanto de estudio como de trabajo, por brindar esa camaradería que hizo más sencilla la cotidianidad de mis obligaciones. A la Doctora Grace, quien es ejemplo de energía, de sencillez, de amor, por su trabajo, por lo que hace, por su familia y amigos, amor que pude sentir con fuerza y que agradezco de corazón… Amiga gracias.

Agradezco al ángel más fuerte y leal…mi madre, quien me apoya y cuida de mí y de mi familia. A mi esposo agradezco su amor, tolerancia, confianza, paciencia y comprensión. A mi hermana, su amor con las niñas, descargando mucho de mí día a día. A mis dos mágicas princesas, agradezco su infinito amor, el tiempo que les hurte y sus sonrisas desinteresadas y motivadoras de mi templanza.

Y a usted…gracias por tomar unos minutos de su tiempo para leerme.

SÍNTESIS

El objetivo de este trabajo fue aportar a la caracterización del pensamiento geométrico de estudiantes de olimpiadas y de un aula común, con el reconocimiento de la capacidad de análisis y visualización geométrica, al observar sus destrezas y dinámicas cuando utilizan construcciones auxiliares en la solución de problemas geométricos.

Para ello se utilizó una metodología con enfoque cualitativo de modo que se pudiera determinar características sobre las construcciones auxiliares en la resolución de problemas geométricos y esclarecer la relación entre el pensamiento geométrico y el pensamiento visual. Participaron dos tipos de poblaciones, la primera conformada por cuatro grupos de estudiantes que hacían parte de entrenamientos y equipos de olimpiadas, y la segunda, por cuatro grupos de estudiantes de una institución pública de Bogotá.

Dentro de los resultados se pudo observar la importancia dada por las dos poblaciones al uso de construcciones auxiliares, su reconocimiento de la interacción entre el pensamiento visual y el geométrico, y su apreciación clara de las limitaciones de las representaciones visuales por exactas que sean frente a la generalidad del razonamiento geométrico. En esta investigación se observa, en particular, en el contexto de construcción de conceptos, que los jóvenes construyen un objeto de pensamiento desde los objetos geométricos, por medio de las construcciones auxiliares y contemplación de propiedades, que permiten un acercamiento a conceptos enteramente posibles para el pensamiento.

ABSTRACT

The aim of this research was to contribute to the characterization of the geometrical thinking of math olympiad students and regular school students, recognizing their ability of analysis and geometric visualization, observing their skills and dynamics when they used auxiliary constructions in geometric problems solving.

To this end, a methodology with a qualitative approach was used, designed in such a way that characteristics of the auxiliary constructions in geometric problems solving could be determined and a contribution to clarifying the relationship between geometric thinking and visual thinking could be made. Two types of populations participated, the first composed of four groups of students who were part of training and teams of the Colombian Mathematics Olympiad, and the second of four groups of students of a public school in Bogotá.

In the results it was possible to observe the importance given by the two populations to the use of auxiliary constructions, their recognition of the interaction between visual thinking and geometric thinking, and their clear appreciation of the limitations of visual representations, however accurate they may be in relation to the generality of geometric reasoning. In this research, it is observed in particular, that in the context of the construction of concepts, young people construct a thought object from geometric objects, using auxiliary constructions and contemplating and using properties, activities which allow an approach to concepts entirely possible to be thought.

TABLA DE CONTENIDO **PÁG.**

Lista de tablas

Lista de figuras

INTRODUCCION

La belleza de la geometría en sí misma, además en su utilidad dentro de muchísimos escenarios tanto a nivel teórico como práctico, fue una de las motivaciones más fuertes para realizar el presente trabajo.

En el ICME13 de 2016, el área de geometría jugó un papel muy importante. En uno de los foros, el titulado “TSG 13 Teaching and learning of geometry – secondary level”, se congregó a académicos y profesionales de todo el mundo interesados, como su nombre lo sugiere, en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Este grupo de estudio tenía intereses diversos como computación, medios y tecnologías tradicionales, y personas interesadas en modelar la realidad con diferentes ramas de la geometría. Su objetivo fue reunir a los participantes de la conferencia para compartir resultados de investigación y nuevos desarrollos y actualizaciones sobre proyectos en curso relacionados con la geometría en el nivel secundario y universitario. Allí se trataron temas como aspectos curriculares en la geometría escolar; conexiones entre la geometría y prácticas y procesos matemáticos como la argumentación y la demostración, la visualización, la figuración y la instrumentación; concepciones y aprendizaje de ideas geométricas y su uso en la resolución geométrica de problemas; competencias geométricas de jóvenes y adultos fuera de la escuela y en el lugar de trabajo; prácticas y problemas en la enseñanza de la geometría; geometría, preparación de maestros y el conocimiento del maestro, entre otros temas.

Con base en lo anterior y bajo el criterio y experiencia de la autora en cuanto al tiempo que dedican en la escuela los estudiantes promedio al área de geometría, y con la plena convicción de que los aspectos mencionados tocan la realidad colombiana, este trabajo sobre las construcciones auxiliares en la resolución de problemas geométricos fue desarrollado con jóvenes participantes del proceso de entrenamiento de las olimpiadas matemáticas y con alumnos pertenecientes a un aula regular. Los primeros jóvenes, con deseos y capacidades volcados al aprendizaje de la ciencia, han dedicado mayor tiempo en promedio que otros muchachos de las mismas edades al estudio de las matemáticas, y los segundos muchachos, también muy capaces, pero para quienes los intereses fundamentales de vida aún no se volcán en la matemática, alumnos de aula regular.

Para caracterizar la interacción del pensamiento visual y el pensamiento geométrico de los estudiantes de olimpiadas, y poder enfatizar en las construcciones auxiliares en la resolución de problemas geométricos, se realizó un acompañamiento en las clases del entrenamiento de las Olimpiadas Colombianas de Matemáticas, y un par de pruebas bajo distintos parámetros en busca de la caracterización de la forma en que construyen y del mejor aprovechamiento que hacen de los conceptos básicos, además de verificar pautas simples sobre el proceso de aplicación de principios base en geometría. Resultó muy interesante poder trabajar con los estudiantes de olimpiadas por la percepción que ellos tienen sobre un posible problema reto o construcción geométrica. En paralelo los alumnos del colegio muestran interés, realizan las actividades y desarrollan problemas reto, con diferencias en la precisión y detalle en los trazos que hacen y la argumentación que aportan.

Hay un reconocimiento internacional de la importancia del razonamiento y la demostración en el aprendizaje de matemáticas por parte de los estudiantes en todos los niveles de la educación y de las dificultades encontradas por estudiantes y profesores en esta área (Harel, Stylianides, Boero, Miyazaki, Reid, 2017). La necesidad de caracterizar o hallar los aportes que dan las construcciones auxiliares está centrada en la resolución de problemas, y la conexión entre la geometría (sus principios, prácticas y procesos matemáticos) con la argumentación y la demostración. Wheatley, Brown y Solano (1994) en su texto comentan como algunos estudios especializados establecen que el uso de construcción de imágenes o figuras dentro de las actividades abordadas permite mejorar el aprendizaje matemático y ayuda a interiorizar el conocimiento de forma más clara.

Por medio del acompañamiento en el proceso del entrenamiento y en el aula, y a través de la atención a métodos empíricos como la observación de los jóvenes de las olimpiadas y del colegio, las pruebas en distintas fases de construcción, la encuesta, la entrevista semiestructurada grabada en video y la experiencia del investigador, se pudo evidenciar acerca de las construcciones auxiliares falta de reflexión en cuanto a:

- ¿Cuál es la percepción de su necesidad en la resolución de problemas?
- ¿Cuál es su valor en la recordación de principios y teoremas básicos de geometría?
- ¿Qué significación tienen las proyecciones y la construcción de nuevas figuras especiales?
- ¿Qué se puede concluir de nuevos trazos hechos sobre figuras existentes?
- ¿Qué implicaciones tiene el trabajar con regla y compas?

- ¿Cuáles son las implicaciones de trabajar con medidas exactas?
- ¿Cómo es la lectura sobre un bosquejo?
- ¿Cuál es la importancia del tiempo para desarrollar el pensamiento geométrico en el aula?

Consecuente a lo anterior se define como **problema de investigación**:

¿Cómo aportan las construcciones auxiliares a la interacción del pensamiento visual y el pensamiento geométrico de los estudiantes de olimpiadas y de un aula escolar en la resolución de problemas geométricos y cómo caracterizar esa interacción?

El **objeto de estudio** es el proceso de enseñanza- aprendizaje de la geometría a nivel secundario y el **objetivo de la investigación** es aportar a la caracterización del pensamiento geométrico de estudiantes de olimpiadas y de un aula común, con el reconocimiento de la capacidad de análisis y visualización geométrica, al observar sus destrezas y dinámicas cuando utilizan construcciones auxiliares en la solución de problemas geométricos.

Se plantean como objetivos específicos los siguientes:

- Estudiar investigaciones que fundamenten el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes, enfatizando en construcciones auxiliares en la resolución de problemas geométricos, con base en los tres primeros axiomas de Euclides, en problemas diseñados para que los estudiantes hagan construcciones auxiliares o, problemas tipo texto donde se busque utilizar la imaginación del estudiante. (Permitir aprender a conjeturar - uno de los citados 10 mandamientos de Polya)

- Diseñar y adaptar actividades basadas en escenarios con y sin construcciones auxiliares en problemas no rutinarios y retadores que hagan que los estudiantes de olimpiadas afronten la disyuntiva entre construir trazos auxiliares de manera cuidadosa y no hacerlo.
- Crear e implementar actividades reto para los estudiantes de un aula común, que los enfrenten a trazar construcciones en busca de la solución de un problema o situación geométrica.
- Analizar los procesos realizados en cada escenario de los problemas olímpicos de matemáticas planteados y por medio de ellos caracterizar la interacción de la visualización y el pensamiento geométrico.
- Observar las construcciones o bosquejos realizados por los niños de un aula común ante cada cuestionamiento planteado y caracterizar la interacción del pensamiento visual y el pensamiento geométrico.
- Identificar los instrumentos geométricos como regla y compás como colaboradores importantes en el desarrollo del pensamiento visual y el geométrico.

En línea con el objeto de investigación, el **campo de acción** es el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría aprovechando las representaciones visuales por medio de construcciones auxiliares. Como **hipótesis**, una estrategia de observación consciente y juiciosa de los procesos de resolución de problemas retadores permitirá aportar a la caracterización de la interacción de diversos tipos de pensamiento y proveerá nueva información sobre los resultados del acompañamiento de nuevas ayudas en la solución de algunos tipos de problemas retadores, centrados en las construcciones con regla y compás o a mano alzada como posibilitadores del desarrollo del pensamiento visual. En el estudio se excluyen los dibujos hechos con software dinámico en busca de la libertad de pensamiento geométrico inicial, pues se considera, como lo plantean Wheathey & Brown (1994) que la imagen es una construcción mental.

Las **tareas de investigación** son las siguientes.

1. Elaborar y sistematizar el estado del arte sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría a nivel secundaria, en particular sobre el proceso de desarrollo del pensamiento geométrico en correspondencia con las construcciones auxiliares de modo que se constituyan en los soportes teóricos para el desarrollo de la investigación y el análisis de los resultados.
2. Investigar los fundamentos teóricos sobre construcciones auxiliares que sustentan el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes fundamentado en los tres primeros axiomas de Euclides, remitiéndose a procesos de pensamiento sintético a la manera de la geometría sintética de los griegos abordando el problema desde las hipótesis, y desde allí hacia la solución.
3. Diseñar y/o adaptar los instrumentos y las actividades basadas en problemas retadores que permitirán obtener información para caracterizar el proceso de desarrollo del pensamiento geométrico y visual de los jóvenes participantes.
4. Aplicar las actividades e instrumentos para observar en detalle y propender hacia la caracterización del pensamiento geométrico y visual.

5. Analizar, sistematizar y valorar la pertinencia de las actividades y el cumplimiento de los objetivos propuestos.

CAPITULO 1: ESTADO DEL ARTE

En este capítulo inicial se presentan diferentes referentes e investigaciones que constituyen una base para este trabajo a nivel teórico y práctico. Se busca cubrir de manera específica referentes sobre el pensamiento visual y el pensamiento geométrico. Se incluye además una parte dedicada a las competiciones matemáticas y la geometría, dado que se busca avanzar en la caracterización de la interacción del pensamiento visual y el pensamiento geométrico de estudiantes de un aula regular, así como de estudiantes que participan en olimpiadas, y el uso que en ambos ambientes de aprendizaje se dan a las construcciones auxiliares. Para cada trabajo tenido en cuenta en esta descripción se consideran aspectos metodológicos, resultados y recomendaciones de modo que sirvan como fuente de ideas y contraste en este trabajo.

1.1 Investigaciones sobre construcciones en Geometría

1.1.1 Diseño, aplicación y evaluación de un sistema de actividades para la construcción de significado del concepto de área en una comunidad de práctica para sexto grado[1]

Pérez (2011), la autora de esta investigación, señala que se observa la deficiencia en el aprendizaje y la enseñanza de la geometría ya que el docente dedica más tiempo a la enseñanza de la aritmética lo cual dificulta el desarrollo del pensamiento espacial y geométrico de los estudiantes. También señala que lo poco que se dedica a la geometría se orienta a la memorización y uso de fórmulas para hallar áreas.

[1] Pérez (2011). Diseño, aplicación y evaluación de un sistema de actividades para la construcción de significado del concepto de área, en una comunidad de práctica para sexto grado.

Para enfrentar esta problemática propone un método de enseñanza significativo a través del tratamiento geométrico euclidiano del concepto de área, la derivación de fórmulas aritméticas mediante procedimientos netamente geométricos, y el trabajo grupal siguiendo el modelo propuesto por Wenger, a través del cual el estudiante participa en la construcción de su conocimiento mediante de la interacción, participación y vivencia de experiencias con sus compañeros en una comunidad de práctica.

En el trabajo se plantearon una serie de actividades que incluyeron rompecabezas, y problemas estructurados basados en la descomposición, recomposición y comparación como estrategia para encontrar el área de figuras o regiones, buscando privilegiar el desarrollo del pensamiento geométrico y evitando la mera aplicación de fórmulas aprendidas de memoria. Para el desarrollo de las actividades de descomposición y recomposición, la investigadora planteó varias etapas, desde la manipulación física hasta varios niveles de manipulación mental. Con la primera, buscaba apreciar de cuántas formas era posible descomponer una figura; y a través de la segunda, los estudiantes se veían obligados a usar su imaginación para hacer mentalmente procesos de descomposición y comparación del área de las figuras planas para luego representarlas mediante un dibujo que reflejara los trazos ideados por cada uno.

En las conclusiones, la autora señala que pudo confirmar que la utilización de las estrategias de razonamiento propuestas por Euclides facilitó la construcción de significado del concepto de área y la solución de problemas.

Esta investigación es un referente importante para el desarrollo del presente trabajo, porque también se busca aportar al desarrollo del pensamiento geométrico y visual a través de problemas retadores en los cuales los estudiantes deben usar descomposición de figuras utilizando trazos y allí mediante construcciones auxiliares verificar o deducir principios geométricos y construir significado de conceptos.

1.2 Investigaciones sobre el pensamiento visual

1.2.1 The role of visual representations in the learning of mathematics[2]

Escrito por Abraham Arcavi (2003), el artículo informa que hay un movimiento en la comunidad de educación matemática y de matemáticas que ve la posibilidad de que se llegue a aceptar el razonamiento visual como demostrativo (una demostración verídica de un resultado matemático) en contraposición a la exigencia de Hilbert (y muchos otros) de que toda demostración debe tener sus raíces en la aritmética (y por extensión, el álgebra y el análisis). El afirma "La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensando en y desarrollando ideas previamente desconocidas y avanzando entendimientos" y que en educación matemática se está fortaleciendo.

Arcavi define la visualización, sus ventajas y desventajas en el trabajo con los estudiantes, pero también aborda el pensamiento visual y sus manifestaciones,

[2] Arcavi, A (2003). Educational Studies in Mathematics. Vol 52; 215-241. doi.10.1023/A:1024312321077

realizando inmersión en distintas ramas de la matemática, como la geometría y la estadística.

En uno de sus apartados titulado “Seeing the unseen – More tan just believing it? Perhaps also proving it?”, Arcavi informa que se encontró que la visualización consistía en procesos de naturaleza diferente. Sin embargo, todos parecen corroborar la afirmación de Fischbein de que la visualización "no solo organiza los datos disponibles en estructuras significativas, sino que también es un factor importante que guía el desarrollo analítico de una solución" (Fischbein, 1987, p.101). Y termina la idea proponiendo que la visualización puede ser incluso más que eso: puede ser el proceso analítico mismo el que concluye con una solución formal y general. Este documento responde a los intereses de esta investigación al resaltar el razonamiento visual como medio demostrativo y resaltar la importancia de las construcciones como estructuras significativas.

1.2.2 Exploring the potential role of visual reasoning tasks among inexperienced solvers[3]

Este artículo fue escrito por Intisar Natsheh y Ronnie Karsenty, en 2014. El trabajo es un estudio de caso colectivo que explica los enfoques de solución a una tarea que requiere el razonamiento visual por parte de estudiantes y profesores que no están familiarizados con dichas tareas. El contexto de este estudio es la enseñanza y el aprendizaje del cálculo en el sistema educativo palestino. Los autores señalan que, en el currículo matemático palestino, los roles de las representaciones visuales rara

[3] Natsheh, I., & Karsenty, R. (2014). Exploring the potential role of visual reasoning tasks among inexperienced solvers. ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 46(1) doi:10.1007/s11858-013-0551-1

vez van más allá de lo ilustrativo y complementario, mientras que las tareas que exigen razonamiento visual no son evidentes.

El estudio involucra diez profesores y doce estudiantes universitarios de segundo semestre seleccionados en un intento de explorar el razonamiento visual. La motivación para esta investigación surgió de hallazgos previos de uno de los autores y su propósito puede articularse como exploración del razonamiento conceptual inferencial visual, concentrándose en las definiciones de la visibilización y el razonamiento visual en el contexto de la educación matemática, con algunas ideas obtenidas de la neurociencia.

Los hallazgos incluyen aspectos afectivos del uso del razonamiento visual, mediante la diferenciación en las conductas de los solucionadores y de las creencias acerca de los posibles roles del uso de las tareas de razonamiento visual en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Y entre sus conclusiones se señala que el desarrollo del razonamiento visual es percibido como un objetivo importante por parte de los educadores matemáticos. Los académicos defienden la posición que ayudar a los estudiantes a coordinar el pensamiento visual y analítico puede contribuir a la consolidación de los conceptos matemáticos, posición compartida por otros investigadores que citan en su artículo. También señalan que, aunque los estudiantes pueden ejercitar desde el dibujo de un gráfico esquemático hasta una representación simbólica dada de una función, no se encuentran tareas en las que la visualización sea la principal fuente de información a partir de la cual pueden obtenerse inferencias. Se puede decir que los sujetos de este estudio de caso colectivo carecían de alfabetización visual, un término que describe la competencia de los estudiantes en la "visualización combinada con el pensamiento lógico" (Mudaly 2010, p.67).

Este es un referente importante para el desarrollo del presente trabajo, pues como parte del mismo se indagó a los estudiantes sobre la importancia y uso que dan a las construcciones geométricas auxiliares que usan al momento de resolver un problema geométrico, de modo que este conocimiento aporte a la caracterización del pensamiento geométrico. Por otro lado, en el documento se afirma que el razonamiento visual no se usa, ni se necesita, para fines tales como explicar, establecer y proporcionar nueva información, o demostrar, contrario a los propósitos que tiene esta investigación sobre el uso del razonamiento visual en la solución de problemas.

1.2.3 Investigating Taiwanese Students' Visualization Competence of Matter at the Particulate Level[4]

En este estudio escrito por Hsin-Yi Chang (2017), se sintetiza la investigación sobre visualización y representación para proponer un modelo que consta de cuatro componentes principales de la competencia de visualización en el aprendizaje de la ciencia: construcción, interpretación, transformación y crítica, como se observa en la siguiente figura. En su investigación se desarrolló y validó una evaluación con 22 ítems de respuesta abierta para involucrar a los estudiantes en los cuatro componentes de la práctica de visualización señalados.

---

[4] Chang, HY. & Tzeng, (2017). Investigating Taiwanese Students' Visualization Competence of Matter at the Particulate Level. International Journal of Science and Mathematics Education. Pp. 1-20. doi.10.1007/s10763-017-9834-2.

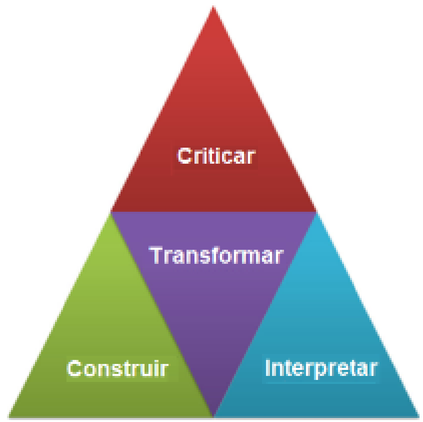


Figura 1. Cuatro componentes de la competencia visualización. Tomado de Chang (2017)

Para los autores el componente construir implica generar un conjunto de representaciones múltiples externas para formar tablas, diagramas, gráficos o imágenes para representar fenómenos o conceptos científicos; el componente interpretar, implica comprender el significado de una visualización externa dada para inferir de la visualización usando conceptos científicos; la transformación está relacionada con la creación de nuevas visualizaciones externas para reemplazar o complementar la visualización original, y, la crítica de visualizaciones implica juzgar o evaluar una visualización externa basada en un determinado criterio. Si bien los componentes de construcción e interpretación son más básicos, los componentes de transformación y crítica son más avanzados y pueden basarse en las habilidades básicas.

En particular, para el presente estudio, las componentes construir y transformar tienen un papel determinante y es por ellas que Investigating Taiwanese Students' Visualization Competence of Matter at the Particulate Level es referenciado en esta investigacion.

1.2.4 To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception[5]

Esta investigación fue escrita por Hagar Gal & Liora Linchevski (2010). En ella, se investigó sobre las teorías relacionadas con procesos de percepción visual y percepción basada en la representación del conocimiento (VPR) para explicar las dificultades encontradas en el procesamiento de figuras en tareas de alto rendimiento en la escuela.

Para analizar tales dificultades, se tomaron las siguientes perspectivas de VPR:

(1) Organización perceptiva: principios Gestalt,

(2) Reconocimiento: procesamiento ascendente y descendente;

(3) Representación del conocimiento basado en la percepción: representación verbal versus representación pictórica, imágenes mentales y estructura jerárquica de imágenes.

Los ejemplos fueron extraídos del estudio de Gal (2005) que buscaba identificar y analizar situaciones problemáticas de aprendizaje (según Gal & Linchevski, 2000) en clases de geometría. El estudio de Gal (2005) sugiere que, si bien esta perspectiva teórica se convirtió en parte del conocimiento de contenido pedagógico de los docentes, los profesores fueron conscientes de los procesos de pensamiento de sus alumnos y mejoraron su capacidad para analizar y afrontar las dificultades de geometría de sus alumnos.

[5] Gal, H. & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. Educational Studies in Mathematics, vol. 74 (2), pp. 163-183

Para la presente investigación es relevante la noción de procesamiento visual (VP) que "implica la visualización y la traducción de relaciones abstractas e información no gráfica a términos visuales. También incluye la manipulación y transformación de representaciones visuales e imágenes visuales "(p.184).

La categorización de Bishop coincide con los términos anteriores de percepción visual (IFI) y visualización (VP). Los términos visión, percepción visual y visualización pueden necesitar alguna aclaración. Hoffer (1977, p.85) se refiere a la percepción visual como "la capacidad de ver e interpretar". Las habilidades de percepción visual incluyen, entre otras, la percepción figura-fondo, percepción de relaciones espaciales, discriminación visual y memoria visual (Hoffer, 1977; Del Grande, 1990). Según Duval (1999), "visión" se refiere (desde un punto de vista psicológico) a la percepción visual y, por extensión, a las imágenes visuales. La visión implica dos funciones cognitivas esenciales:

(1) La epistemológica, que consiste en dar acceso directo a cualquier objeto físico. Entonces, la visión es lo opuesto a la representación (incluso de las "imágenes mentales") que se encuentra en lugar de otra cosa.

(2) La sinóptica, que "consiste en aprehender simultáneamente varios objetos o un campo completo. En este sentido, la visión es lo contrario del discurso, de la deducción, que requiere una secuencia de actos de enfoque en una cadena de enunciados" (Duval, 1999, p.12).

A diferencia de la visión, que proporciona un acceso directo al objeto, la visualización se basa en la producción de una representación semiótica que "muestra relaciones o, mejor, organización de relaciones entre unidades representacionales" (p.13).

"Imágenes mentales" y "representaciones mentales" pueden ser una extensión de la percepción visual o una mera visualización (Duval, 1999). Bishop (1983) propuso dos tipos diferentes de construcciones de habilidades.

(1) Interpretación figurativa de información (IFI) que "implica comprender el vocabulario de las representaciones visuales y espaciales. "El IFI" se refiere a la lectura, comprensión e interpretación de tal información. Es una capacidad de contenido y de contexto, y se relaciona particularmente con la forma del material de estímulo" (p.184);

(2) Procesamiento visual (VP) que "implica la visualización y la traducción de relaciones abstractas e información no gráfica en términos visuales. Eso también incluye la manipulación y transformación de representaciones visuales e imágenes visuales" (p.184). La categorización de Bishop coincide con los términos anteriores de percepción visual (IFI) y visualización (VP).

En conclusión, el trabajo en mención sirvió como punto de comparación en términos conceptuales, pero para este estudio el pensamiento visual y la visualización son fundamentales en la exploración de la resolución de un problema geométrico y su demostración.

1.3 Investigaciones sobre construcciones geométricas y aprendizaje

1.3.1 Geometric Construction with the Compass Alone[6]

La afirmación de que cada construcción de regla y compás podría lograrse con un compás se debe a Lorenzo Mascheroni (1750-1800) y apareció en su tratado de 1797 The Geometry of Compasses. El autor de esta investigación es Alexander Bogomolny, un ex Profesor Asociado de Matemáticas de la Universidad de Iowa convertido en desarrollador de software, Cut The Knot Software. En este documento se hace una referencia histórica de sobre el concepto de construcciones geométricas utilizando tan solo compás, y menciona unos problemas de construcción para ser resueltos tan solo con compás, direcciona a otras páginas donde se realizan construcciones geométricas. Con respecto a la presente investigación se concuerda con el sitio web en la importancia de las construcciones, y la posibilidad de tomar un problema y volverlo en otros problemas más simples.

1.3.2 What is a construction? Paul Kunkel[7]

Este autor es docente de matemáticas y ha dedicado su investigación de muchos años a recrear construcciones de geometría de una manera muy visual y didáctica; en su página web se puede disfrutar sus trabajos sobre construcciones geométricas.

Sobre una construcción geométrica afirma: Las construcciones geométricas se remontan a la antigüedad griega. A menudo se llaman construcciones euclidianas,

---

[6] Alexander Bogomolny, construcción geométrica solo con la brújula de la Miscelánea interactiva de matemáticas y los rompecabezas http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/compass.shtml# , consultado el 02 de noviembre de 2017

[7] Paul Kunkel, **What is a construction?** http://whistleralley.com/construction/reference.htm

pero ciertamente son anteriores a Euclides. El compás y la construcción con regla pueden mostrar la geometría más descriptiva. La regla y el compás son los únicos instrumentos permitidos. El compás establece la equidistancia, y la regla establece la colinealidad. Todas las construcciones geométricas se basan en esos dos conceptos.

Kunkel afirma que el compás no simplemente dibuja curvas. No puede ser reemplazado por una plantilla de círculo o una lata de café. El compás está anclado en un punto central y mantiene el lápiz a una distancia fija desde ese punto. Todos los puntos en la curva dibujados por un compás son equidistantes del punto central. Aunque se usan a menudo en las reglas, las marcas de graduación no se pueden usar. No se permiten mediciones. La regla se usa solo para dibujar líneas. Dado dos puntos distintos, este instrumento puede dibujar el conjunto de todos los puntos que sean colineales con ellos.

En la página se comenta que las medidas de las reglas y los transportadores tienen su lugar en la geometría, pero éstos no son instrumentos de construcción. Todas las medidas son aproximaciones. En realidad, el compás y la regla también están sujetos a errores. Una línea tiene ancho cero, pero el dibujo de una línea no lo hace. Sin embargo, la construcción es un ejercicio teórico. Si no estuviéramos limitados por las imperfecciones físicas de los instrumentos, la superficie de dibujo y la persona que los usa, entonces los instrumentos de construcción darían resultados exactos. Esto no es cierto para los instrumentos de medición.

En Geometry Construcción Reference[8], se puede hallar una guía de construcciones básicas.

La importancia de este sitio web para la presente investigación radica en los principios del trabajo con instrumentos geométricos y la apropiación de los conceptos con ayuda de las construcciones de diversos bosquejos para diferentes problemas.

1.4 Las Olimpiadas de Matemáticas y la Geometría de Competición

Esta investigación se acercó a una población que estaba participando en entrenamientos para competiciones matemáticas, ese es el motivo por el cual el estado del arte dedica unas letras a este tema, que direccionó a la autora de este documento hacia la comprensión de las dinámicas que desarrolla esa población, no se consideró para el marco teórico porque más que una teoría, las olimpiadas matemáticas son una práctica.

1.4.1 Las Olimpiadas Matemáticas y los problemas retadores

Las competencias de resolución de problemas matemáticos son una vieja tradición en muchos países. Son famosas las competencias para resolver ecuaciones cúbicas que se realizaron en el siglo XVI en Italia. En Francia hubo competencias matemáticas en el siglo XVIII y Hungría comenzó a realizar en 1894 las competencias Eötvös, las cuales (con el nombre Kürschák a partir de 1947) han continuado hasta el día de hoy y son el más cercano antecedente de las modernas Olimpiadas Matemáticas. Las competencias Eötvös tuvieron enorme influencia en el desarrollo de la matemática húngara, gran parte de cuyos mejores matemáticos pasaron por ellas. La primera Olimpiada Matemática, con ese nombre, tuvo lugar en

[8] http://whistleralley.com/construction/reference.htm

Leningrado (actual San Petersburgo) en 1934, y la segunda en Moscú en 1935, organizadas por B. N. Delone y G. M. Frijtengolts. Las Olimpiadas Matemáticas se popularizaron en toda la (para entonces) Unión Soviética y luego se extendieron a países como Rumania, Polonia, Alemania, Bulgaria y Checoslovaquia.[9]

La Olimpiada Internacional de Matemática, en ingles International Mathematical Olympiad (IMO) es una competencia que se realiza cada año. Ella se enfoca en estudiantes de bachillerato. La primera IMO se celebró en Rumania en 1959 y hasta el momento se realiza anualmente (con la excepción de 1980). En 2017 se presentaron 111 países, pero el promedio es de 100 países, que envían 6 participantes como máximo, quienes van acompañados por un líder de equipo, un tutor - o colíder - y observadores. La IMO es la competencia más antigua entre las Olimpiadas internacionales dedicadas a las diferentes ciencias.

En general las pruebas realizadas abarcan geometría, teoría de números, álgebra y combinatoria. Existen parámetros para las pruebas, los problemas son tres por prueba, cada una vale 7 puntos, se dispone de 4 horas y media para resolverlos, y se realizan dos pruebas dando como puntaje total 42 puntos. Los galardones son medallas de oro, plata, y bronce, y menciones honoríficas. En 2017 se otorgó premio a la mujer que obtuvo el puntaje más alto en cada una de las regiones establecidas, premio dado en honor a Maryam Mirzakhani, de origen iraní, única mujer ganadora de la prestigiosa medalla Fields en matemáticas y también medallista de oro en la Olimpiada Internacional de Matemáticas en 1994 y 1995. Esta matemática murió el 15 de julio de 2017, en California, Estados Unidos, a los 40 años.

[9]* Combinatoria para Olimpiadas Matemáticas, José Heber Nieto Said 2014

La idea es que, más que dones excepcionales, para participar con éxito en la IMO y otras competiciones internacionales, se requieren dedicación, interés, destreza e ingenio que deben ser nutridos y fortalecidos bajo entrenamiento.

Los objetivos de la IMO son:

- Descubrir, estimular y apoyar a los jóvenes con talento matemático.
- Estimular relaciones amistosas entre las comunidades matemáticas de los diversos países.
- Crear una oportunidad para el intercambio de información sobre la educación matemática

Las preguntas de la IMO son un compendio de problemas reto originales propuestos por los países competidores a un Comité de Selección de Problemas organizado por el país anfitrión que es el encargado de reducir el número de problemas. Los seis problemas finales son seleccionados por un jurado internacional compuesto por el líder de la delegación de cada país participante.

El proceso de selección del equipo que lo representa es diferente según el país en general la selección consiste en una serie de pruebas que van filtrando el número de estudiantes en cada una.

1.4.2 From the Life time Experience of a Seasoned Math Educator—Thoughts, Hopes, Views and Impressions-RomualdasKašuba[10]

Romualdas Kasuba (nacido el 23 de marzo de 1931 en Kaunas, Lituania) es un académico lituano-americano, ingeniero mecánico, dedicado a la preparación de matemática de competición. En este documento revisa la evolución de un problema pensado especialmente para estudiantes jóvenes, y que se desarrolla desde oraciones nítidas y abreviadas hasta largas, con un lenguaje embellecido y, en la narración, lleva al lector a través de una tierra de fantasía matemática.

El autor de este artículo afirma que al escribir cualquier artículo que muestre contenido matemático notable debería propender por ser exacto; en consecuencia, los materiales propuestos deberían estar bien estructurados y de fácil acceso. Así es como deberían arreglarse las cosas y eso es lo que trabaja este artículo, afirma también que cuando se habla de tal materia vivida como solución de problemas, es casi imposible evitar influencia de un componente subjetivo o humanista. Es decir, según la visión personal del autor, no siempre es mala. A veces incluso puede agregar más encanto y ser muy atractivo para estudiantes y lectores.

La relación de este artículo con la presente investigación radica en el hecho de propender por el desarrollo del pensamiento de los estudiantes ante la resolución de problemas y el sentido humanista donde se percibe al estudiante como un ser inteligente con derecho a pensar y disfrutar de la matemática.

[10] Kašuba R. (2017) From the Lifetime Experience of a Seasoned Math Educator—Thoughts, Hopes, Views and Impressions. In: Soifer A. (eds) Competitions for Young Mathematicians. ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

1.4.3 Competition Aims to Develop Flexibility in the Classroom-Ingrid Semanišinová, Matúš Harminc and Martina Jesenská[11]

Los autores de este artículo, que enmarca el papel de las competiciones en el aula, son Ingrid Semanišinová, Matúš Harminc, y Martina Jesenskáde de Eslovaquia. Presentan un método para una implementación de soluciones múltiples a un mismo problema y afirman que las tareas en el aula deben buscar una manera de motivar a los estudiantes a resolver problemas de diferentes maneras. Ellos exponen una estrategia que se refiere a una competencia sobre un problema que se debe ir resolviendo por grupos de estudiantes.

Cada grupo tiene que encontrar y registrar una solución de un problema determinado que, en su opinión, aparece con la menor frecuencia entre las soluciones de todos los grupos en la clase. Presentan algunos problemas y las correspondientes estrategias diferentes que surgieron en el aula y muestra cómo se demostró la flexibilidad durante la competencia.

Este trabajo es muy diciente para la presente investigación y tal como se presenta allí se revela ese puente que comunica los dos escenarios de este trabajo y presenta esa cercanía entre los problemas reto y cualquier estudiante, sea de competición o de aula regular.

Los autores también discuten otros beneficios de incluir competiciones en el aula, es decir, crear conexiones entre conceptos matemáticos y estimular una comprensión

[11]Semanišinová I., Harminc M., Jesenská M. (2017) Competition Aims to Develop Flexibility in the Classroom. In: Soifer A. (eds) Competitions for Young Mathematicians. ICME-13 Monographs. Springer, Cham

más profunda de los conceptos para los estudiantes. Para el maestro, el método abre la posibilidad de desarrollar flexibilidad y analizar la calidad del conocimiento de los estudiantes y su nivel de comprensión de conceptos matemáticos y relaciones entre ellos.

Esta investigación abrió otro panorama para su autora, sobre la competición y concuerda con este artículo en la posibilidad de implementar competencias en el aula y favorecer destrezas en los jóvenes estudiantes de aula regular.

Conclusiones del capítulo 1

Este capítulo ha explorado investigaciones sobre construcciones en geometría, sobre el pensamiento visual, sobre el pensamiento geométrico y sobre la práctica de las Olimpiadas Matemáticas, a partir de diversos autores y dinámicas que llevan a afirmar que el estudio de las construcciones geométricas es apasionante y requiere esa paciencia del pescador. El realizar cuidadosamente la traducción de un texto a lenguaje simbólico, o apreciar un bosquejo e identificar la teoría que hay detrás de cada trazo es un arte, que además de necesitar algo de talento, requiere constancia y entrenamiento. La necesidad de la geometría en el aula ligada a toda esa camaradería que se logra con amigos que comparten intereses son dos particularidades que este estudio y la teoría previa hacen evidentes.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

La geometría es una de las ramas de la matemática que tiene mayores aplicaciones en el ámbito de percepción de la realidad; cada construcción arquitectónica o artística, hasta de modas, ha trabajado con conceptos tan comunes y básicos como el punto, la línea, el plano, sin olvidar la simetría o el uso deliberado de la asimetría. Esta rama propicia el desarrollo del pensamiento espacial y el pensamiento abstracto y logra en el ser humano una apropiación de la creación. En este trabajo se abordan las construcciones auxiliares para ver su inherencia en el análisis del pensamiento geométrico con el objeto de mostrar nexos específicos de éste con la visualización sustentado en: la teoría de la resolución de problemas; teorías existentes sobre el pensamiento geométrico y la visualización; referentes del contenido geométrico y construcciones con regla y compas; la geometría en las competiciones de solución de problemas matemáticos; y la comunidad de práctica de Wenger.

A continuación se explican las categorías y elementos más importantes de cada una de ellas.

2.1 Pensamiento geométrico

El pensamiento geométrico es intrínseco en el ser humano. Desde la perspectiva de la autora de la presente tesis, se necesita la comparación, la simetría, las semejanzas y otras nociones de geometría en la mayoría de los procesos de la vida cotidiana. Pero es válido preguntar si el pensamiento geométrico es igual para todos.

2.1.1 How Humans Learn To Think Mathematically: Exploring The Three Worlds Of Mathematics David Tall – PensamientoGeométrico

En esta obra de 2013, David Tall hace un recorrido por el pensamiento geométrico desde la niñez hasta la adultez, haciendo distinción en la importancia y agrado del conocimiento matemático para algunos individuos como el desencanto para otros. El autor desea colaborar en generar una visión más amplia, afirmando que su objetivo es presentar un marco que permita a todos los interesados en pensamiento matemático, a cualquier nivel, comunicarse con los demás de acuerdo a sus necesidades. Tall plantea la pregunta: ¿Cómo podemos formular una única teoría que permita mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en un mundo en el que para algunas personas las matemáticas son un asombro de la belleza, mientras que para otros son una fuente de ansiedad problemática? Es algo que se percibe en el ambiente de las olimpiadas de matemáticas en las cuales, además de resolver problemas originales y retadores, los participantes ven y gozan la belleza de las matemáticas y transmiten una sensación de agrado y satisfacción que es admirable. ¿Sera posible provocar sensaciones similares en prácticamente todos los individuos?

Sobre la geometría, Tall afirma que comienza con el niño jugando con objetos, reconociendo sus propiedades a través de los sentidos y describiéndolos usando el lenguaje. Con el tiempo, las descripciones se hacen más precisas y se utilizan como definiciones verbales para especificar figuras que pueden ser construidas por regla y compás y, finalmente, las propiedades de las figuras pueden relacionarse en el marco formal de la geometría euclidiana. Para aquellos que estudian matemáticas en la universidad, esto puede generalizarse a diferentes formas de geometría, como geometrías no euclidianas, geometría diferencial y topología.

Sobre Los Tres Mundos[12]

Tall afirma que existe un mundo de “encarnación” (conceptual) que se construye sobre las percepciones y acciones humanas desarrollando imágenes mentales

[12]Pág 133 del libro HOW HUMANS LEARN TO THINK MATHEMATICALLY: EXPLORING THE THREE WORLDS OF MATHEMATICS

verbalizadas de maneras cada vez más sofisticadas para convertirse en entidades mentales perfectas en la imaginación.

Un mundo de simbolismo (operativo) que se desarrolla a partir de acciones humanas “encarnadas” (hechas realidad observable) en procedimientos simbólicos de cálculo y manipulación que pueden comprimirse en procesos para permitir un pensamiento operacional flexible.

Un mundo de formalismo (axiomático) que construye el conocimiento formal en sistemas axiomáticos especificados por la definición de teoría de conjuntos, cuyas propiedades se deducen mediante demostraciones matemáticas.

Tall afirma también que, en la geometría euclidiana, las propiedades de las figuras se conceptualizan a través de la abstracción estructural en cuatro etapas:

- reconocimiento práctico
- descripción
- reconocimiento teórico euclidiano de la noción
- demostración.

En la aritmética y el álgebra, las operaciones se encapsulan como objetos mentales a través de la abstracción operativa, y los conceptos matemáticos formales axiomáticos se construyen a través de la abstracción formal, basada en la teoría y la demostración de la teoría de conjuntos. En los tres mundos, los conceptos se dominan a través de la abstracción estructural que implican reconocimiento, descripción, definición y deducción en formas apropiadas para cada contexto.

2.1.2 Euclides Libro I

"Estudió y casi dominó los seis libros de Euclides, dado que fue miembro del Congreso. Inició un curso de rígida disciplina mental con el deseo de mejorar sus facultades, especialmente su capacidad para la lógica y su lenguaje. De aquí su inclinación hacia Euclides que no le abandonó hasta que pudo demostrar con facilidad todas las proposiciones de los seis libros; muchas veces estudiaba, hasta bien entrada la noche, con una bujía cerca de su almohada, mientras sus compañeros, media docena en una habitación, llenaban el aire con interminables ronquidos. ABRAHAM LINCOLN (Breve autobiografía, 1860)"[13]

Euclides, matemático y filósofo griego, es identificado históricamente por su legado geométrico plasmado en su gran obra *Los Elementos*, en la cual fundamenta axiomáticamente la construcción de los elementos geométricos y la aritmética (teoría de números) y álgebra desarrolladas para ese momento. La obra se divide en trece libros. Los libros I, II, III, IV, y VI se dedican a la geometría plana, y los libros XI, XII y XIII a la geometría del espacio o geometría sólida. El libro V es dedicado a la teoría de la proporción y el libro X a la clasificación de las longitudes irracionales. Los libros VII, VIII y IX están dedicados a la aritmética. Es uno de los textos históricamente más conocidos a nivel mundial y se dice que luego de la biblia es el segundo en número de ediciones publicadas. Hasta nuestros días es un texto base de geometría.

[13] Bell, E.T. Men of Mathematics: The Lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré. N.Y. Simon & Schuster. 1965.

En el primer libro, Euclides desarrolla 48 proposiciones a partir de 23 definiciones (como punto, línea y superficie), 5 postulados y 5 nociones comunes (o axiomas, exigidos por Aristóteles para las “ciencias demostrativas”).

Las nociones comunes de *Los Elementos* son:

- Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.
- Si se añaden iguales a iguales, los todos son iguales.
- Si se sustraen iguales a iguales, los restos son iguales.
- Las cosas que coinciden una con otra son iguales entre sí.
- El todo es mayor que la parte.

Los postulados de *Los Elementos* son[14]:

- Trazar una línea recta de cualquier punto a cualquier punto.
- Extender una línea recta indefinidamente en línea recta.
- Trazar un círculo con cualquier centro y distancia.
- Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
- Postulado de las paralelas. Si una línea recta corta a otras dos, de tal manera que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado sea menor que dos rectos, las dos rectas se cortan, al prolongarlas, por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

14https://es.wikipedia.org/wiki/Elementos_de_Euclides

Su equivalente, es más conocido, Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única línea recta paralela a la recta dada. El último postulado es el factor detonante en la creación de las geometrías no euclidianas.

Euclides demuestra proposiciones de tipo “teórico” y lleva a cabo construcciones o proposiciones tipo “problema”, y en ambos propósitos utiliza construcciones basadas en sus primeros tres axiomas o en construcciones logradas con anterioridad. Este proceder es la base de su utilización en esta investigación; el desarrollo con regla y compás de la gran mayoría de las proposiciones, tanto teóricas como de construcción, será quien permita evaluar las dinámicas en la solución de las actividades y dictaminar el poder de la abstracción y conjetura de los estudiantes, valiéndose de que sus trazos sean con regla y compás o a mano alzada, todo hacia la caracterización del pensamiento geométrico en las construcciones auxiliares.

En la presente investigación, los problemas reto trabajados con los participantes de los entrenamientos de olimpiadas utilizan construcciones, abordando problemas basados no sólo en la geometría euclidiana clásica, sino también en la geometría euclidiana clásica generada en la era moderna y apartes importantes de la geometría proyectiva. Con los niños de colegio también se trabajó problemas reto sobre construcciones desde la del triángulo equilátero hasta las propiedades de los paralelogramos entre dos rectas paralelas. Es significativo verificar que los principios del pensamiento geométrico ya fundamentado surgen en los niños en los dos escenarios.

2.2 Fundamentos de la visualización para el proceso de enseñanza aprendizaje de las construcciones auxiliares

“La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, empleo de y reflexión sobre cuadros, imágenes y diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensando y desarrollando ideas desconocidas y anticipando el entendimiento”.[15]

En el Diccionario Enciclopédico “*Color*” (1999) se define que visualizar es *“… representar mediante imágenes ópticas fenómenos de otro carácter. Imaginar con rasgos visibles algo que no se tiene a la vista”[16].*

Varios investigadores han trabajado en el tema y definido visualización; entre ellos se menciona a Zimmermann y Cunningham (1991), de Guzmán, (1996), Duval (1999), Arcavi (2003), y Presmeg (2006), entre otros. Además de hablar de visualización ellos han indagado sobre su importancia en la educación matemática y como ésta puede beneficiar el aprendizaje en el aula de clase de matemática.

Para autores como Cantoral y Montiel (2001) y López (2005) la visualización es una habilidad, para entrenadores de olimpiadas es una estrategia que puede resultar valiosa en la solución de problemas, que es la motivación de estudio en el presente trabajo. Como la visualización con frecuencia resulta ser fundamental en el proceso de solución de un problema reto, para Hernández (2002) constituye un elemento heurístico y para Rojas (2009) es un principio heurístico.

[15] https://es.wikipedia.org/wiki/Visualizaci%C3%B3n_en_matem%C3%A1tica
[16] Diccionario Enciclopédico Color. Ed. Océano. Barcelona, 1999.

Cantoral y Montiel (2001) entienden a la visualización como una habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. De Guzmán (1996) plantea que *"… la visualización aparece como algo profundamente natural tanto en el nacimiento del pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos, y también, naturalmente, en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático."*[17]

Arcavi (2003), afirma que la visualización *"… es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar en la comprensión"*[18]. Esto último se evidencia al trabajar problemas reto tanto con los estudiantes de olimpiadas como con los estudiantes en el aula de clase común.

Zimmermann y Cunningham (1991), plantean que: *"… la visualización matemática es el proceso de formar imágenes (mentalmente, con lápiz y papel o con ayuda de materiales o tecnologías) y utilizar estas imágenes de manera efectiva para el descubrimiento y la comprensión matemática"*(p. 3). Está formación de imágenes y la prolongación de ideas con ayuda de las construcciones auxiliares es lo que se desea caracterizar en el presente estudio, preguntando ¿hasta dónde la formación de imágenes provoca vislumbrar un camino de resolución de un problema reto en geometría?

---

[17] De Guzmán, M. (1996). El Rincón de la Pizarra. Cap. 0, el papel de la visualización. Pirámide, Madrid, p. 3.
[18] Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics 52:215–241. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands, p. 217

La visualización posee ciertas potencialidades para el trabajo con construcciones auxiliares en la resolución de problemas de competiciones matemáticas, como las que se detallan a continuación.

- Creación y uso de imágenes y representaciones.
- Búsqueda de una interpretación o reinterpretación geométrica de los objetos matemáticos y sus interrelaciones.
- Desarrollo del pensamiento geométrico.
- Exploración de diversas vías en la resolución de problemas.
- Activación de conceptos básicos a través de imágenes, dibujos y representaciones mentales, externas o materiales, para construir el contenido geométrico.

2.3. Teoría de la resolución de problemas

Paul Halmos, quien fuera uno de los importantes matemáticos del siglo XX, escribió en su famoso artículo titulado *El corazón de la matemática*: "La principal razón de existir del matemático es resolver problemas, y por lo tanto en lo que realmente consisten las matemáticas es en problemas y soluciones." En el mismo sentido se pronunció el insigne matemático y educador George Pólya (1887–1985): "Entender la matemática significa ser capaz de hacer matemática. ¿Y qué significa hacer matemática? En primer lugar, significa ser capaz de resolver problemas matemáticos."

La diferencia entre un ejercicio y un problema matemático consiste en que un ejercicio se resuelve más o menos mecánicamente, si se ha comprendido el material instruccional que lo precede. En cambio, ante un verdadero problema, el estudiante no tiene a mano un procedimiento que le permita resolverlo, sino que debe utilizar su imaginación, creatividad e ingenio. Y éstas son precisamente las capacidades intelectuales que le permitirán tener éxito en su vida profesional, hallando soluciones creativas a los innumerables problemas del mundo actual que carecen de soluciones prefabricadas (Nieto, 2014).[19]

Antes de enmarcar la teoría se darán algunas definiciones del concepto de problema.

2.3.1 Problema

"*Para que una situación constituya un problema para una persona, debe estar enterada de la existencia de la situación, reconocer que debe ejecutar algún tipo de acción ante ella, desear o necesitar actuar, hacerlo y no estar capacitado, al menos en lo inmediato, para superar la situación".* Teaching and Learning Mathematics, F. Bell, (1978).

Por su parte Polya (1945) dice que *"Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata"*[20]*.*

Es *"… una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma"*[21]*.* Krulik y Rudnik, (1980)

[19] Combinatoria para Olimpiadas Matemáticas, José Heber Nieto Said 2014

[20] Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. México: Ed. Trillas.p. 28.

[21] Krulik, S., & Rudnik, J. (1980). *Problem solving: a handbook for teachers.* Boston: Allyn and Bacon . p. 4.

“La presencia de una situación desconocida para el sujeto, no se conoce la vía de solución, la persona que se enfrenta a ella está motivada para trabajar en él, y se poseen los elementos necesarios para darle solución.” Mazarío, (2002)

“Es cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida, otras un tanto confusamente perfilada, y no conozco el camino que me puede llevar.” De Guzmán, (1991)

Uno de los trabajos del docente de matemáticas debe ser el propiciar los espacios para que sus estudiantes piensen, imaginen y resuelvan problemas, generando en ellos ese gusto e inquietud por ir siempre más allá.

2.3.2 Problemas reto

Para Pérez (2004) un problema reto es aquel que invita a que el estudiante piense de manera autónoma, indague, cuestione, razone y pueda explicar su razonamiento**”.** Por otra parte, Pérez (2004) plantea que los problemas retadores exigen la integración de conceptos relacionados y el establecimiento de nexos con otras áreas de la matemática”. Los problemas retadores por sus características son propicios para generar motivación e interés en los estudiantes, para lograr este objetivo estos problemas deben presentar ciertas particularidades. Estas particularidades son resumidas por Falk (1980), al expresar “… que sea una situación que estimule el pensamiento, que sea interesante para el alumno, y que la solución no sea inmediata” (p. 16). En este sentido la resolución de un problema retador exige del estudiante: compromiso, responsabilidad, integración de saberes, habilidades, creatividad y sentido de pertenencia, para propiciar el desarrollo de nuevas estrategias.

2.3.3 Resolución de problemas

La enseñanza de las matemáticas propicia el desarrollo de actividades mentales que facilitan el razonamiento y motivan el aprendizaje de los estudiantes. Pero en ocasiones no se permite que los estudiantes naveguen a sus anchas por un problema, sea por afán del currículo o la inmediatez del momento. La resolución de problemas se dirige a este fin, y es parte esencial del origen y desarrollo de la matemática. La teoría de la resolución de problemas radica en situaciones con algún grado de complejidad, que implican que el estudiante vuelque todo su interés en la solución de su nuevo reto y conciba para sí esa gratificación personal. La resolución de problemas se ha convertido en una teoría que ha ocupado a numerosos investigadores: Polya (1965), Ballester (1992), Schoenfeld (1985), Campistrous y Rizo (1996), Puig (1996), Lester y Kehle (2003), Sigarreta (2004), Lesh y English (2005), Cruz (2006), Lesh y Zawojewski (2007), Santos (2007), Sriraman y English (2010), Pochulu y Rodríguez (2012), entre otros. Cada uno de los anteriores autores ha definido desde su perspectiva qué es un problema y así ha fortalecido la teoría respectiva.

Polya (1965), por su parte, afirma que: "… resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados", criterios que se comparten en esta este trabajo y que son observados y verificados en las actividades propuestas en los dos escenarios.

Sriraman y English (2010), citando a Schoenfeld, recomiendan que la resolución de problemas en la enseñanza de la matemática, es factible para:

- Propiciar en los estudiantes una habilidad para utilizar estrategias que lo vinculen con el contexto.
- Fomentar en los estudiantes estrategias meta-cognitivas para que se apropien del contenido matemático.
- Mejorar las creencias que tienen los estudiantes acerca de su entorno.

La resolución de problemas como actividad consta, según Polya, de fases o estrategias (1965):

- Orientación hacia el problema.
- Trabajo en el problema.
- Solución del problema.
- Evaluación de la solución y de la vía tomada para lograrla.

Ballester y otros (1992) explican cada una de estas fases en los siguientes términos.

Orientación hacia el problema. Esta fase se dirige a la búsqueda o motivación, del planteamiento y comprensión del problema. Por su parte la motivación está relacionada con las potencialidades del problema para contribuir a la educación integral de los estudiantes (Ballester y otros, 1992). Para lograr que el estudiante resuelva el problema de forma independiente, el docente formula, entre otras, las siguientes preguntas heurísticas: ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?, ¿cuál es la condición?

Trabajo en el problema. En esta fase se debe tener presente la precisión y análisis del problema, y búsqueda de la idea de la solución. La precisión y análisis del problema están dados por la comprensión de su estructura, lo que implica determinar los datos dados y buscados para comprender la formulación matemática (Ballester y otros, 1992). También en esta fase viene al caso aplicar los procedimientos heurísticos, y además el docente puede formular las siguientes preguntas al estudiante: ¿es semejante a un problema conocido?, ¿ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?, ¿conoce algún teorema que le pueda ser útil?, ¿le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar?, ¿puede usted construir una figura de análisis? También se le puede formular ¿podría imaginarse un problema análogo más simple / general / particular?, ¿puede resolver una parte del problema?, entre otras.

Solución del problema. En esta fase se debe desarrollar la realización del plan de solución y la representación de la solución (Ballester y otros, 1992). Para lograr una adecuada orientación en el estudiante, se le sugiere al docente que les formule a los estudiantes las siguientes preguntas: ¿puede comprobar cada uno de los pasos al ejecutar su plan de la solución?, ¿puede usted ver claramente que el paso es correcto?, ¿puede usted demostrarlo?, entre otras.

En el presente trabajo luego de una observación del trabajo de los estudiantes en los dos escenarios (jóvenes de las olimpiadas y jóvenes en un aula regular), se verifican procesos, pasos como se mencionaba en el anterior apartado y luego se realizan unas entrevistas que indagan los puntos de convergencia sobre los objetivos planteados en cada actividad.

Evaluación de la solución y de la vía tomada. En esta fase se debe tener presente la comprobación de la solución frente al problema, la cual debe desarrollarse en su enunciado. Se logra una mayor comprensión del estudiante cuando el docente es capaz de formularle las siguientes preguntas: ¿puede usted verificar el resultado?, ¿puede verificar el razonamiento?, ¿puede obtener el resultado en forma diferente?, ¿puede verlo de inmediato?, ¿puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema? También es propicio utilizar las estrategias heurísticas "trabajo hacia adelante" y "trabajo hacia atrás".

Los fundamentos teóricos abordados sobre la resolución de problemas sustentan también a los problemas retadores, los cuales tienen importancia para el desarrollo del pensamiento lógico y matemático en general, así como del pensamiento geométrico. También favorece el desarrollo de habilidades y estrategias en la resolución de situaciones geométricas en los estudiantes. Pérez (2004) afirma sobre los problemas retadores y sobre dónde alínear la atención

- *"Hacer que el estudiante piense productivamente.*
- *Desarrollar su razonamiento.*
- *Enseñarle a enfrentar situaciones nuevas.*
- *Darle la oportunidad de involucrarse con las aplicaciones de la matemática.*
- *Hacer que las clases de matemática sean más interesantes y desafiantes.*
- *Equiparlo con estrategias para resolver problemas.*

- *Darle una buena base matemática".*[22]

2.4. Teoría de comunidades de práctica de Wenger

Artículos publicados sobre teorías socioculturales en el marco interpretativo de las investigaciones en la educación matemática se han dado en varias revistas, como la Educacional Studies in Mathematics, y Journal for Research in Mathematics Education (JRME). También se han presentado diferentes reportes de investigación en las conferencias del International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME).

Las bases de las perspectivas socioculturales constituyen los principios generales de la teoría sociocultural del aprendizaje, que en un principio fue desarrollada por Vygotsky (1985). Esta teoría plantea que los procesos cognitivos individuales tienen sus raíces en la interacción social, a través de la comunicación que se lleva a cabo en actividades culturales realizadas colectivamente. La presente investigación asume este enfoque que se evidencia significativamente en los procesos de entrenamiento de olimpiadas.

Lerman (1996) y Goos (2004) señalan que el aprendizaje sucede en el proceso de internalización en el cual los eventos sociales se transforman en fenómenos psicológicos que se llevan a cabo en el plano mental. En la cotidianidad del estudiante, las clases pueden ser vistas como el momento de interacción social en el cual pueden participar en actividades colectivas, para discutir acerca del objetivo de

[22]Resolución de problemas. Documento electrónico. Recuperado el 13 de octubre de 2017l. https://issuu.com/avirtual/docs/001_mundomate_estrategias_de_matematica2

dichas actividades. En cuanto a este apartado, encaja muy bien con el escenario de los muchachos en el aula de colegio.

Forman (1996) propone que la interacción experto-aprendiz inicia el proceso que le permite al aprendiz acercarse o llegar a la condición de experto a través de su participación en actividades colectivas. También hace referencia al aprendizaje como participación en actividades de la comunidad; incluso puede existir fuera o dentro de la institución educativa.

Origen de la comunidad de práctica de Wenger

Nacido en 1952 en el cantón suizo de Neuchâtel, Etienne Wenger es un teórico de la educación y un profesional reconocido por su formulación (con Jean Lave) de la teoría de la cognición situada y por su más reciente trabajo en el campo de las comunidades de la práctica.

Definición

Una comunidad de práctica de Wenger es un grupo de personas que comparten una preocupación, un conjunto de problemas o un interés común acerca de un tema, y que profundizan su conocimiento y pericia en esta área a través de una interacción continuada. Wenger, McDermott y Snyder (2002).

Wenger (1998) menciona cuatro aspectos que considera parte importante de la naturaleza del conocimiento y el aprendizaje:

i) “Somos seres sociales y éste es un aspecto esencial del aprendizaje.”

ii) “El conocimiento es un asunto de competencia en relación con ciertas actividades valoradas socialmente.”

iii) “Conocer es cuestión de participar de manera activa en la consecución de estas empresas (actividades intencionadas).”

iv) “El producto del aprendizaje es el significado, visto como nuestra posibilidad de experimentar el mundo en que vivimos y nuestro compromiso con él.” (Wenger, 1998)

La anterior definición y los aspectos mencionados enmarcan muy bien en los grupos que se forman en los entrenamientos de olimpiadas. Sobre esto revisaremos las fases de la comunidad de práctica de Wenger.

Figura 2. Modos de pertenencia a la comunidad de Práctica de Wenger

- Wenger (1998) enuncia: *“… la participación, la imaginación y la alineación son tres modos de pertenencia a una comunidad de práctica por la cual los estudiantes pueden construir su identidad.”*
- COMPROMISO
    - Contextualizar el problema de una manera que se conectará con los alumnos y sus intereses, se encuentre cerca de sus vidas o sea algo que les concierne.

- Ofrecer una situación que sale de las actividades habituales.
- Poner a los alumnos en condiciones de apropiarse de la situación para que puedan desarrollar por sí mismos la comprensión de su participación.
- Favorecer la libre circulación de información, estrategias, y otras.
- Poner a los alumnos en interacciones, haciéndoles trabajar en equipo o como un grupo.
- Ofrecer una situación en la que los alumnos tendrán como objetivo común la resolución de un problema usando las matemáticas.
- Solicitar el compromiso voluntario de los alumnos en cierta situación.
- Asegurarse de que el objeto sea claro para los estudiantes.

Promover en los estudiantes autoría en la ruta de la resolución y en las soluciones que producen

- AJUSTE
  - Ofrecer un problema dirigido a toda la clase como un grupo.
  - Decidir con los alumnos la ruta de acceso general para la solución de un problema.
  - Asegurarse que los estudiantes tengan una visión general de la situación.
  - Hacer el ajuste necesario para cada uno, para la producción de los equipos, individuales y de toda la clase.

- Apoyar el pensamiento crítico sobre las soluciones y la interpretación, sobre todo, donde se favorezca la aparición de las conclusiones contradictorias.
- Animar a los estudiantes a identificar las ideas matemáticas exploradas en una situación de composición abierta, y para establecer vínculos explícitos con el plan de estudios.
- De vez en cuando imponer normas para la aproximación matemática de una situación (con un concepto dado, probando un procedimiento determinado).
- Validar con los estudiantes la concordancia entre su comprensión de conceptos y sus estrategias con el “estándar” de las definiciones y procedimientos.
- Colectivamente decidir el momento de dejar de investigar una situación, decidir lo que se considera como una resolución del problema.
- Comparar con los alumnos sus estrategias y acuerdos.
- Pedir a los alumnos un resumen de su investigación.
- Animar al debate y a la adopción de un número limitado de estrategias o soluciones.

- IMAGINACION
    - Dibujar un contexto con el que los estudiantes serán capaces de establecer vínculos con los aspectos de sus vidas cotidianas.

- Ofrecer una situación en la que la resolución tendrá un efecto fuera del aula.
- Utilizar la información real para que los estudiantes realicen enlaces con la forma en que lo utilizan y con que lo utilizan en otros lugares.
- Dar un problema en el que la resolución da a los estudiantes un sentimiento de competencia “en el mundo” (por ejemplo, un problema real).
- Ofrecer una situación “práctica” donde los estudiantes observan el sentido de la utilización de las herramientas matemáticas.
- Ofrecer una situación de composición abierta para dar oportunidades a los estudiantes a explorar y ser inventivos.
- Animar a los estudiantes a crear sus propias estrategias de uso de sus conocimientos matemáticos estableciendo vínculos entre los conceptos.
- Animar a los estudiantes a generar la articulación de una comprensión global de la situación, mirando a los conocimientos matemáticos que se utilizan, en su propio aprendizaje de la situación y los momentos importantes o elementos de la realización de la solución.
- Valorar el pensamiento crítico de la situación, debatir los objetivos y sus logros.
- Introducir y analizar diferentes caminos para explorar la situación, y estar abierto a otras posibilidades.

- Plantear una duda en el aprendizaje de las matemáticas (¿Por qué las matemáticas? ¿Por qué utilizamos estas matemáticas en particular?)
- Discutir el enfoque matemático de una situación como una forma de verlo.
- Fomentar una transformación de la práctica matemática de las aulas, y poner de relieve las transformaciones que se producen.[23]

Los tres modos de pertenencia se presentan en los dos escenarios, en la comunidad de las olimpiadas con una fuerte carga de autoestima y reconocimiento, en el aula de clase como un trabajo que corresponde a todo un grupo. Wenger (1998) argumenta que la teoría social del aprendizaje debe integrar los componentes necesarios para caracterizar la participación social como un proceso del aprendizaje y del conocimiento, como se muestran en la Figura 3.

Figura 3. Componentes de una teoría social del aprendizaje: inventario inicial.

[23] Fuente: ICME 11 TopicStudyGroup 37.

- *Significado*: definido como la posibilidad que se tiene individual y colectivamente de establecer el cómo se considera el mundo en nuestras experiencias, algo que tiene sentido y es valioso, es decir significativo.
- *Práctica:* es la forma de entender los sucesos históricos y sociales, el marco de referencia y las perspectivas compartidas que pueden sustentar el compromiso mutuo en la acción.
- *Comunidad:* es una manera de analizar las diferentes configuraciones sociales donde se define como valioso y es reconocible como competencia.
- *Identidad*: es entender el cambio que conlleva el aprendizaje en cuanto a nuestra percepción de quiénes somos y de cómo se crea la historia de forma individual y colectiva en el contexto de las comunidades.

Wenger (1998, 2001) argumenta que estos componentes están interrelacionados y se definen mutuamente, y es a partir de ellos que él construye la teoría de comunidad de práctica. Algunos términos importantes dentro de la teoría de Wenger (1998) se definen a continuación.

Aprender: hace referencia a la participación del individuo en tomar parte activa en alguna actividad, situada en su contexto particular, y al mismo tiempo que se establecen relaciones en comunidad.

Significado: se fundamenta en la experiencia que surge de la participación en prácticas colectivas de un individuo que participa en una comunidad. Este proceso lo denomina negociación de significados.

Participación periférica legítima: aquí hace referencia al proceso por el cual los recién llegados se integran a una comunidad. En lo educativo, la clase se considera como una comunidad de práctica para la evolución personal de los estudiantes a medida en que se avanzan colectivamente en las actividades propuestas.

Repertorio compartido: es el conjunto de recursos que la comunidad adquiere y produce durante su participación activa, pues ello pasa a formar parte de la práctica que genera una producción local de significado, combinando aspectos de participación y de materialización.

La comunidad de práctica ha sido valorada por Rogoff (1997), Goos (2004) y Clark (2005) como: comunidades de práctica de la clase, comunidades de práctica inquisitiva y comunidades de aprendices, respectivamente. Camargo (2010), hace referencia a estos trabajos en los siguientes términos: *"… algunos autores se refieren a dichas comunidades como ámbitos en donde los estudiantes pueden considerarse a sí mismos capaces de producir matemáticas y hay un reconocimiento público a la posibilidad de desarrollar competencias matemáticas a través de actividades conjuntas y de los roles asumidos. Los estudiantes reconocen el valor de trabajar colectivamente hacia el logro de significados comunes, comparten vías de comportarse, lenguajes, hábitos, valores y herramientas; las clases se llevan a cabo con la participación activa de los estudiantes y, por momentos, se ve que todos están comprometidos en la misma actividad"*[24].

[24]Camargo, L. (2010). Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria. Tesis para optar al Grado de Doctora en Matemáticas. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia. p. 14.

En este trabajo de investigación se ha podido tener un acercamiento a comunidades diferentes pero no contrarias, los participantes de las olimpiadas van por un camino claro dirigido con metas fijas y camaradería orientada al aprendizaje constante, lo que casa perfectamente a lo referido por Camargo (2010).

Por otro lado, en la comunidad del colegio existe una preocupación diferente por lograr un resultado que puede ser grupal o individual dado la situación, donde el compartir también es una de las prioridades, y el éxito de un proceso también es tangible e importante. La autora de la presente tesis considera que para el ser humano el reconocimiento de sus pares es bastante importante y en los dos escenarios es un factor que moviliza a los muchachos a conseguir la resolución del problema.

Conclusiones del capítulo 2

Cada uno de los componentes descritos tiene gran influencia en el desarrollo de esta investigación. Lo que se reafirma al leer a Tall es una diferenciación entre la abstracción estructural, la abstracción operativa y la abstracción formal. Según Tall, en la primera se anida el pensamiento geométrico, en la segunda el pensamiento algebraico, aritmético, y de medición, y en la tercera la teoría y la demostración fundamentadas en la teoría de conjuntos. Para este estudio es clave el poder evidenciar que en el pensamiento geométrico también existe la abstracción operativa y los principios para la abstracción formal; tal tesis espera ser examinada en el capítulo de resultados y conclusiones.

En cuanto a la creación de actividades y problemas, los lineamientos de la geometría euclidiana son la base y el evaluador en los objetivos a desarrollar.

La habilidad para interpretar, representar y reflejar información visualmente permite que los problemas sean afrontados y abordados por los estudiantes que pertenecen a los dos escenarios considerados en este estudio. Ese poder que permite formar imágenes y analizar y generar ideas por medio de la representación y pensamiento visual es primordial para los propósitos de la presente tesis.

La base de esta investigación es el trabajo de resolución de problemas, y toda su teoría es esencial para el desarrollo y la culminación de los procesos y análisis del trabajo en mención. En particular, de allí se sigue la pregunta ¿Qué significa hacer una construcción auxiliar? ¿Manifiesta la abstracción operativa? ¿Manifiesta el pensamiento visual? ¿Qué significa hacer una construcción auxiliar apropiada? ¿Manifiesta el pensamiento geométrico?

En los dos escenarios estudiados la teoría de la comunidad de práctica de Wenger es pertinente. Y este trabajo plantea evidenciar singularidades, intereses, dinámicas y competencias propias de los jóvenes involucrados en él.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

Este capítulo tiene como objetivo general explicar el diseño del estudio y el enfoque investigativo que se le ha otorgado según las dinámicas y actividades creadas en busca de cumplir con el objetivo propuesto; se especificará el tipo de estudio, la población que participó y la muestra que se tomó trabajando en paralelo con el diseño de las actividades, y la concepción de los instrumentos adicionales de información y análisis, como son las entrevistas semiestructuradas.

3.1 Enfoque metodológico

Esta investigación utiliza un enfoque cualitativo, “el método de investigación cualitativa es la recogida de información basada en la observación de comportamientos naturales, discursos, respuestas abiertas para la posterior interpretación de significados” como señalan Sampieri, Fernández y Baptista (2014). En esta investigación la observación es estratégica para poder interpretar los comportamientos, necesidades y resultados de las distintas poblaciones. Esta metodología reconoce diferentes fuentes de información para la recolección de datos.

Las características del enfoque cualitativo son: la exploración y la descripción para identificar aspectos teóricos; la consecución de la información se realiza de manera verbal, escrita o visual, y por métodos no estandarizados. Esta investigación pretende determinar características sobre las construcciones auxiliares en la resolución de problemas geométricos y avanzar en el esclarecimiento de la relación entre el pensamiento geométrico y el pensamiento visual, por lo cual esta metodología es apropiada.

3.2 Población

En este estudio participaron cinco poblaciones en total, cuatro estaban conformadas por estudiantes que hacían parte de equipos de olimpiadas y estaban en entrenamientos, primera cohorte; y la quinta fueron estudiantes de aula regular de grados sexto y séptimo de una institución pública. A continuación se describe cada cohorte en detalle.

3.2.1 Cohorte 1 – Participantes de entrenamiento y/o olimpiadas matemáticas

Se trabajó con tres grupos de jóvenes integrantes de equipos de entrenamiento para Olimpiadas de Matemáticas a nivel nacional e internacional.

Grupo 1. Grupo de entrenamiento de olimpiadas en geometría de nivel inicial del primer semestre de 2017 en la Universidad Antonio Nariño.

Este grupo estaba conformado por jóvenes de grados sexto y séptimo de distintas partes del país, en total fueron 15 individuos, el 88% niños y el 12% niñas cuya faja etaria se encontraba entre 11 y 14 años. La actividad con este grupo fue bastante enriquecedora para la autora de esta investigación, y la dinámica fue de acompañamiento en las clases del entrenamiento y de observación, con el fin de tener un acercamiento a las dinámicas de trabajo y su comportamiento como comunidad, en la cual primaban intereses comunes. Con esta población no se hizo ninguna intervención, pero fue fundamental este acercamiento para la definición y planteamiento de la investigación realizada, porque se pudo constatar la importancia de las construcciones auxiliares en la resolución de problemas, por lo cual se buscó profundizar sobre este aspecto.

Grupo 2. Grupo de entrenamiento de olimpiadas en geometría, nivel inicial, del segundo semestre del 2017 en la Universidad Antonio Nariño.

De este grupo hacían parte jóvenes de grados sexto y séptimo de diferentes instituciones educativas del país. En total fueron 28 individuos, el 68% niños y el 32% niñas, cuya faja etaria se encontraba entre 12 y 14 años. Con este grupo se realizó inicialmente un acompañamiento y luego se escogió una muestra voluntaria de 15 individuos, el 73,3% niños y el 26,7% niñas para quienes se diseñaron y aplicaron algunas actividades que se describen más adelante.

Grupo 3, equipo representante de Colombia en la Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO) 2017.

Este grupo lo integraron seis estudiantes de diferentes colegios a nivel nacional, de grados noveno, décimo y undécimo, el 50% eran niños y el otro 50% niñas, y su faja etaria se encontraba entre 15 y 18 años.

Grupo 4, equipo representante de Colombia en la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas 2017

Este grupo estaba conformado por cuatro integrantes congregados en entrenamiento en el mes de septiembre, el 75% eran niños y el 25% niñas, y su faja etaria se encontraba entre 13 y 17 años.

3.2.2 Cohorte 2 – Estudiantes de aula regular grados sexto y séptimo en colegio oficial

Este grupo estuvo conformado por estudiantes de grados sexto y séptimo del Colegio Sorrento Institución Educativa Distrital, ubicado en la localidad de Puente Aranda de la ciudad de Bogotá; en total participaron cuatro cursos que se describen en la siguiente tabla.

Tabla 1. Población participante

Curso	Niños	Niñas	Total	Edades
605	20	15	35	11 a 13 años
704	17	14	31	13 a 15 años
705	22	14	36	12 a 16 años
706	15	15	30	12 a 16 años

3.3 Recolección de información

Para la recolección de información que permitiera profundizar sobre el uso de las construcciones auxiliares en la solución de problemas geométricos se diseñaron y aplicaron actividades para cada una de las poblaciones participantes, se realizaron algunas entrevistas semiestructuradas y se aplicó una encuesta. A continuación se describe cada uno de estos instrumentos, sus particularidades y la población con la que se utilizó.

3.3.1 Encuesta

Este método de recopilación de información fue usado para tener una concepción inicial de los niños sobre la importancia y uso de las construcciones con regla y compás[25]. Con esta información se realizaron contrastes con otras herramientas como las actividades, y entrevistas semiestructuradas. La encuesta se aplicó al grupo No. 2, de entrenamiento de olimpiadas en geometría a nivel inicial. En los anexos se puede ver en detalle las preguntas incluidas.

3.3.2 Entrevista semiestructurada

Se realizaron entrevistas de manera personal y semiestructurada (grabada en video previa autorización de la persona responsable del menor en Bogotá); las entrevistas se hicieron con los grupos 2, 3 y 4. Estas entrevistas se enfocaron en indagar, a partir del análisis de las actividades, por las ideas que tuvieron los estudiantes al enfrentar los problemas propuestos[26] y en profundizar sobre la importancia de la realización o no de trazos auxiliares. En el caso del grupo No 2, en la encuesta también se validaron algunas de las respuestas dadas en la encuesta.

3.4 Diseño de las actividades

Se diseñaron actividades con enfoques diferentes, de modo que se pudiera tener información diferenciada sobre el uso de las construcciones auxiliares en la solución de problemas geométricos con las poblaciones involucradas. En este sentido las diferentes actividades fueron elaboradas a partir de problemas de olimpiadas, o adaptaciones y también creaciones propias de la autora del presente trabajo.

---

[25]Ver anexo 5.Encuesta

[26] Ver anexo entrevista semiestructurada

3.4.1 Actividades para la Cohorte 1

Se estableció que, para contribuir al objetivo, las actividades propuestas deberían enmarcar diferentes escenarios y estar basadas en principios de competencia, además de ser acorde a los niveles de cada grupo. Los problemas fueron adaptados de literatura de olimpiadas matemáticas, específicamente del libro *A Primer for Mathematics Competitions*[27], con la potencialidad de propender a la construcción auxiliar para avanzar hacia la solución de un problema. Para estos grupos se diseñaron tres tipos de actividades (A, B y C).

Actividad tipo A: corresponde a un problema que se presenta al estudiante sin bosquejo.

Actividad tipo B: corresponde a un problema que se presenta al estudiante con bosquejo básico.

Actividad tipo C: corresponde a un problema que se presenta al estudiante con bosquejo más completo.

Cada participante de cada grupo resolvió dos tipos de actividades diferentes. Se buscaba con esto confrontar la forma de abordar un problema de geometría (con o sin bosquejo). Las actividades de cada grupo fueron diferentes, en el caso de los integrantes del grupo 4 (Olimpiada Iberoamericana) todos los problemas propuestos eran de tipo A.

---

[27] Tomado de: A Primer forMathematicsCompetitions, Alexander Zawaira and Gavin Hitchcock Published in the United States., by Oxford University Press Inc., New York© Alexander Zawaira and Gavin Hitchcock 2009.

Los problemas requerían conocimientos previos de geometría, brindados en los entrenamientos, relacionados con el teorema de Pitágoras, círculos y sus propiedades, cevianas, criterios de congruencia, entre otros. En los anexos se puede observar en detalle cada actividad.

3.4.2 Actividades para la Cohorte 2

Para este grupo, se diseñaron cinco actividades cortas (individuales o en grupo), a través de las cuales se buscaba establecer la habilidad de los jóvenes en la búsqueda de solución o de apropiación de un problema con la ayuda de construcciones o trazos auxiliares. La estructura fue basada en las proposiciones iniciales de Euclides donde prima el arte de demostración por construcción.

Las actividades se diseñaron para estimular la creatividad de los estudiantes utilizando el reto, la visualización, la imaginación y su destreza en la elaboración de soluciones. Por otro lado, en la parte grupal se buscó identificar y fortalecer en los niños el modelo de comunidad de práctica de Wenger. Se esperaba que realizaran contribuciones a sus compañeros de equipo en cuanto sugerencias y reflexiones de tal manera que ideas nuevas surgieran y llevaran a conclusiones más robustas.

En la construcción de algunos de los problemas se tuvo en cuenta los componentes de la teoría social del aprendizaje propuestos por E. Wenger (1998), y se contextualizó buscando situaciones de interés actual y etario que los vincularan y crearan un sentido de pertenencia social. En cuanto a contenidos, tácitamente o directamente salen a colación conceptos como, figuras geométricas (triángulo, cuadrado, rombo, hexágono, rectángulo, paralelogramo, círculo) y sus características y elementos, área, perímetro, simetría, unidades de medida, semejanza.

Acción metodológica en la implementación de las actividades

En primer lugar se propende a preparar el aula para que tenga las mejores condiciones en cuanto a comodidad de los estudiantes, se explica a los estudiantes sobre los objetivos académicos del taller y su libertad de contestar lo que deseen sin pensar en la evaluación cuantitativa, pues dicha actividad no la posee. Seguido a esto se hace entrega del material preparado y se solicita el empleo de sus materiales propios tales como regla y compás, lápiz, y de ser deseado colores. Se explica que en un principio las actividades son individuales y que se desea que los estudiantes lean y analicen cada situación presentada y realicen la formulación, los esquemas, o los bosquejos que les permitan responder los cuestionamientos presentados y solucionar los problemas. Las dos primeras actividades fueron realizadas en una sesión de clase cada una (dos horas reloj), y las otras tres (juntas) en una sesión o dos, dependiendo del grupo y su destreza hacia la actividad.

Todas las actividades contaron con la compañía de la autora de este estudio y al culminar cada actividad se realizó una socialización pertinente y el proceso de retroalimentación.

3.5 Análisis de información

Para evaluar las actividades se realizó un proceso inicial de recolección de datos indagando la totalidad de respuestas presentadas, luego se enfocó en la descripción cualitativa buscando poder responder, a través de observar las respuestas o construcciones establecidas, a los interrogantes: ¿los jóvenes realizaron trazos?, ¿esas construcciones revelan intencionalidad o se percibe aleatoriedad?, ¿analizaron lo producido con sus construcciones?, ¿el análisis se puede considerar acertado o no hay procesos acertados?, ¿luego del proceso realizado concluyeron, es decir llegaron a una respuesta acertada o no?, ¿justificaron lo realizado?, y por último ¿se hallaron procesos que se salieran de lo esperado?, ¿qué llamo la atención?.

Conclusiones del capítulo 3

En el capítulo se presenta el enfoque a utilizar, de tipo cualitativo, los instrumentos a utilizar y la manera de realizar el análisis, de modo que se pueda avanzar en la caracterización del pensamiento geométrico, específicamente relacionado con el uso de construcciones auxiliares para resolver problemas. Se describen las actividades adaptadas o diseñadas específicamente para esta investigación acorde con las diferentes poblaciones con las que se trabajó.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

4.1 Caracterización general

El estudio acompañó cuatro entrenamientos de olimpiadas y cuatro cursos en aula de colegio regular. En los dos entrenamientos iniciales se realizó un proceso de observación y acompañamiento más prolongado que con los entrenamientos finales. Los entrenamientos brindaron una caracterización humana descrita netamente por la percepción de la autora de este escrito; dicha caracterización radica en la interacción que hubo con los protagonistas de este estudio. Antes de hablar de los estudiantes se debe dedicar un par de líneas a sus mentores en las olimpiadas. En el primer entrenamiento en el nivel inicial en geometría el docente fue Juan Basto, un hombre muy carismático, idóneo en su saber, muy responsable y respetuoso. En el segundo entrenamiento la docente fue la Doctora María Losada, una persona que, con su dominio del tema, ejemplo de valores, destreza e ingenio, logra infundir en los chicos motivación para continuar ese camino de ciencia.

Figura 4. Grupo de entrenamiento olimpiadas en geometría, 2017-1

Los dos entrenamientos iniciales estuvieron enmarcados en valores humanos como la puntualidad y el respeto.

La sencillez y la pasión por los conceptos tratados favorecía todo el proceso de atenuar a estos chicos en sus períodos inquietos y volcar todo su dinamismo en el hallazgo de nuevos saberes que les proporcionaban esa confianza y seguridad al saber que los problemas reto para ellos eran esos nuevos juegos que los divertían. Estos jóvenes sí mantienen unas particularidades (son miembros de una comunidad de práctica de Wenger, pues comparten el interés por la matemática, profundizan su conocimiento y pericia en los entrenamientos, conviven con la resolución de problemas retadores y su interés común sobre todo lo que representan las olimpiadas), la principal estar en un entrenamiento de olimpiadas matemáticas.

Figura 5. Grupo de entrenamiento olimpiadas en geometría, 2017-2

Como se mencionó en el estado del arte, para estos jóvenes las matemáticas son un tema animado y atractivo, son muchachos que a una edad temprana descubren y despliegan ese don que les permite ser tan competitivos y ser nuevos líderes en este campo. Aunque son amables, su espíritu ya es diferente a un niño que está fuera de este círculo, manejan unas competencias intelectuales y emocionales distintas, su cotidianidad es la competencia en cualquier escenario que les interese y la frustración por no figurar es bastante notoria. Saben que estar allí es un privilegio, pero la gran mayoría desea llegar más lejos.

En cuanto a los otros dos entrenamientos el acompañamiento fue más discreto, por ser de equipos titulares de las competencias internacionales IMO e Iberoamericana; su tiempo estaba completamente dedicado a su entrenamiento, tan serio y estructurado como el de cualquier equipo deportivo de alta competencia; los valores de estos jóvenes han sido fortalecidos y su constancia y responsabilidad es evidente.

Sus tutores fueron bastante amables, hicieron posible realizar intervenciones como encuesta, pruebas y entrevista semiestructurada.

4.2 Resultados observación grupo 1.

En los entrenamientos se realizan pruebas los miércoles y los sábados. En los dos primeros entrenamientos se realizaron cuatro pruebas de geometría en las cuales los estudiantes siempre estaban acompañados de un representante del entrenamiento. Cabe resaltar que en la mayoría de estas pruebas no les dieron a los jóvenes ningún bosquejo, sólo la última posee un bosquejo básico. A continuación se muestran algunas de las producciones de los estudiantes:

Problema

El paralelogramo ABCD es tal que su ángulo ∠B<90 y AB<BC. Sea ω el círculo que pasa por los tres vértices del ⊿ABC. Desde el punto D trazamos las tangentes al círculo ω, las cuales lo tocan en los puntos E y F. Si se sabe que los ángulos ∠EDA y ∠FDC son iguales, ¿cuál es el valor del ángulo ∠ABC?

En la siguiente figura se evidencia que un estudiante realiza el bosquejo y trazos adicionales que le permiten visualizar de una manera más tangible el problema propuesto. El estudiante prolonga segmentos para construir un cuadrilátero cíclico, halla paralelismo y utiliza propiedades y características de los ángulos siempre mostrando intencionalidad, y luego logra concluir acertadamente.

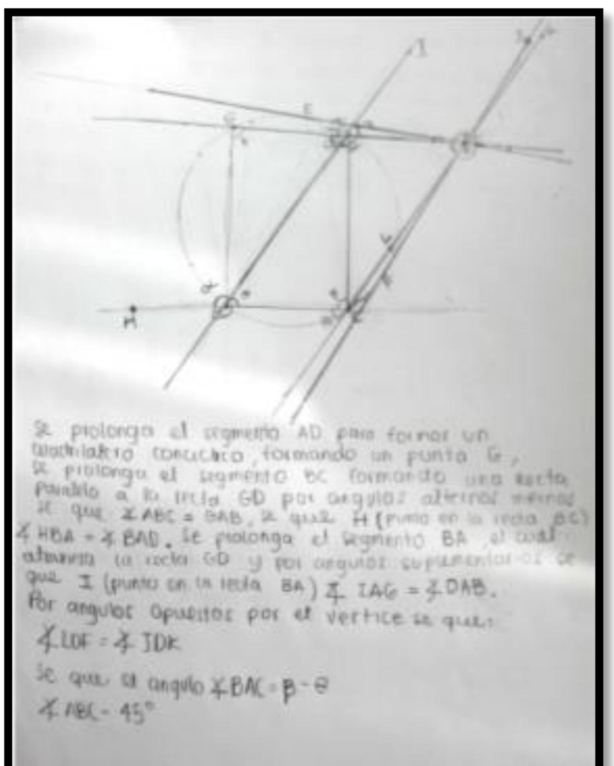


Figura 6. Ejemplo 1, trabajo realizado por un participante del grupo 1

Problema

El pentágono ABCDE tiene un circulo S inscrito adentro. El lado BC es tangente a S en el punto K. Si AB = BC = CD, demostrar que ∠EKB es un ángulo recto.

En la siguiente figura se muestra el trabajo de uno de los estudiantes quien construye el bosquejo, identifica puntos concíclicos, semejanzas y triángulos isósceles, realiza su esquema con regla y compás en busca de mejorar la percepción de la equidistancia en los segmentos mencionados, trabaja con las propiedades de los ángulos que luego transfiere a los segmentos y logra concluir acertadamente

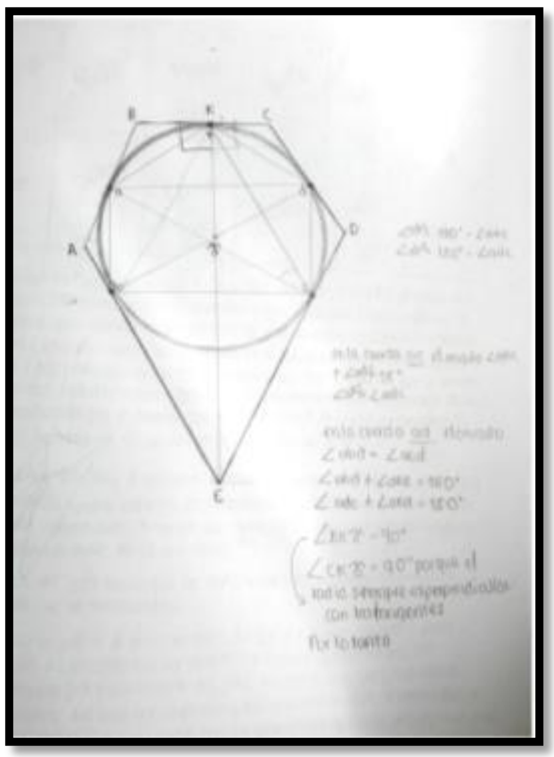


Figura 7. Ejemplo 2, trabajo realizado por un participante del grupo 1.

Este ejercicio de observación permitió hacerse una idea sobre el tipo de problemas a adaptar y usar con los siguientes grupos para poder indagar sobre la forma e importancia de las construcciones auxiliares.

4.3 Resultados participación individual, grupo 2 – olimpiadas

La descripción que se hace a continuación de los estudiantes está fundamentada por la respuesta real entregada por cada uno de los estudiantes tanto con la encuesta escrita como por la entrevista semiestructurada. Es importante para claridad de lo que se presenta a continuación, que los chicos se enfrentaron a pruebas de tres tipos, como se describió en el capítulo anterior:

Prueba tipo A: esta prueba corresponde a un problema sin bosquejo

Prueba tipo B: esta prueba corresponde a un problema con bosquejo básico

Prueba tipo C: esta prueba corresponde a un problema con bosquejo más completo

4.3.1 Estudiante Número 1

Es un niño de 13 años que cursa sexto grado. Considera que nunca se puede resolver un problema de geometría sin construir su bosquejo, porque es de geometría y el dibujo sirve como guía. Nunca trabaja con regla y compás, porque es lo mismo con o sin, porque el dibujo es una guía. Casi siempre realiza más trazos sobre el dibujo, porque normalmente se pide encontrar un lado o una medida y entre mas información ponga en el dibujo, más le guía para el siguiente paso. Afirma que casi nunca un bosquejo debe tener medidas exactas, porque es solo una guía. Las pruebas que respondió el estudiante se presentan en los renglones siguientes, en la entrevista semiestructurada ratifica la encuesta y agrega comentarios como los siguientes. Sobre la primera prueba, al estudiante le fue entregada una prueba tipo B (bosquejo básico), explica que debió realizar construcciones auxiliares, porque el triángulo relacionado con el desarrollo del problema no estaba bosquejado y que además dichos trazos, le permitirían identificar áreas y semejanza de triángulos. El estudiante con sus dedos enmarca el bosquejo mostrando como logra conjeturas a partir de los trazos, aunque informa que esas primeras conjeturas no lo llevaron a la solución.

Al ser reiterativos con el tema de la necesidad de trazar nuevos elementos al esquema, reafirma que es necesaria e indispensable la construcción auxiliar, que él no trabaja con regla y compas, pero que un dibujo “bonito”, “perfecto” ayudaría bastante.

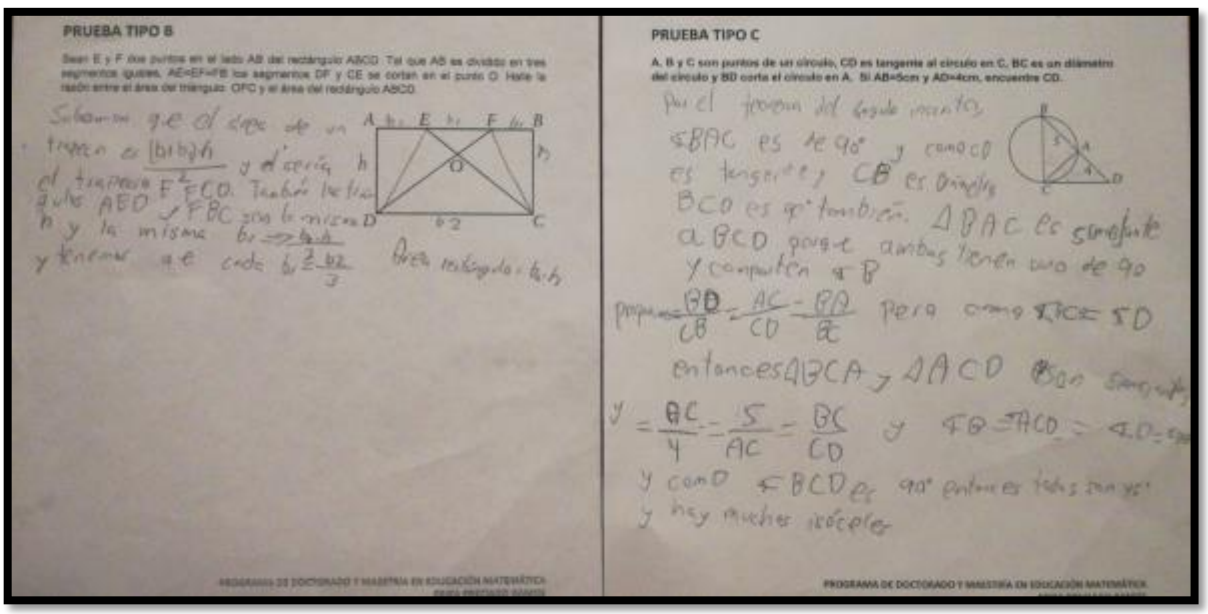


Figura 8. Trabajo realizado por estudiante 1

La segunda prueba fue tipo C (bosquejo más completo) y en ella dice que recordó la teoría y aunque no pudo dar la conclusion total al problema considera que existia mayor facilidad por el bosquejo y que normalmente hace trazos sobre ellos. Al preguntarle de dónde surgen las ideas para elaborar nuevos trazos, indica que es por la necesidad de hallar mayor guia …o nuevos angulos, que es posible que en un principio una línea no dé informacion, pero que tal vez sirva para después y si no se hace en el instante puede olvidarse, que mientras se sigue observando es posible que ella indique propiedades, que las medidas exactas no son esenciales, que los problemas son más de interpretación y de análisis.

4.3.2 Estudiante Número 2

Es un niño de 13 años que cursa séptimo grado, considera que casi nunca se puede resolver un problema de geometría sin construir su bosquejo, porque la geometría consiste de construcciones dentro del plano, ya sea euclidiano o no euclidiano.

A menos que la solución sea obvia, es necesario ver lo que se está tratando, nunca trabaja con regla y compás porque para resolver un problema, se debe abstraer lo que se está viendo para verlo de manera general. Dice además que siempre realiza trazos adicionales porque son necesarios para entender los problemas, y que nunca es necesario realizar un bosquejo con medidas exactas porque se debe abstraer y generalizar lo que se ve.

En la entrevista semiestructurada ratifica la encuesta y agrega los siguientes comentarios de la primera prueba, una prueba tipo A (sin bosquejo). Afirma que inicialmente debió dibujar el bosquejo para poder determinar relaciones y áreas entre triángulos y que su dibujo radica en la descripción dada en el planteamiento del problema. Las líneas que trazó ayudan a entender la estructura y por ende el problema con mayor facilidad. Además, relata que puede determinar áreas y semejanza con respecto al resultado generado por los nuevos trazos y cuenta que si la solucion de un problema es obvia el no tiene necesidad de hacer bosquejo, pero de lo contrario lo realiza. No le gusta trabajar con regla y compás por que piensa que la abstraccion es más importante, que ver las propiedades de manera general es mejor, pues lo importante son los principios de la geometria, los teoremas, y “eso”, no importa la exactitud del dibujo.

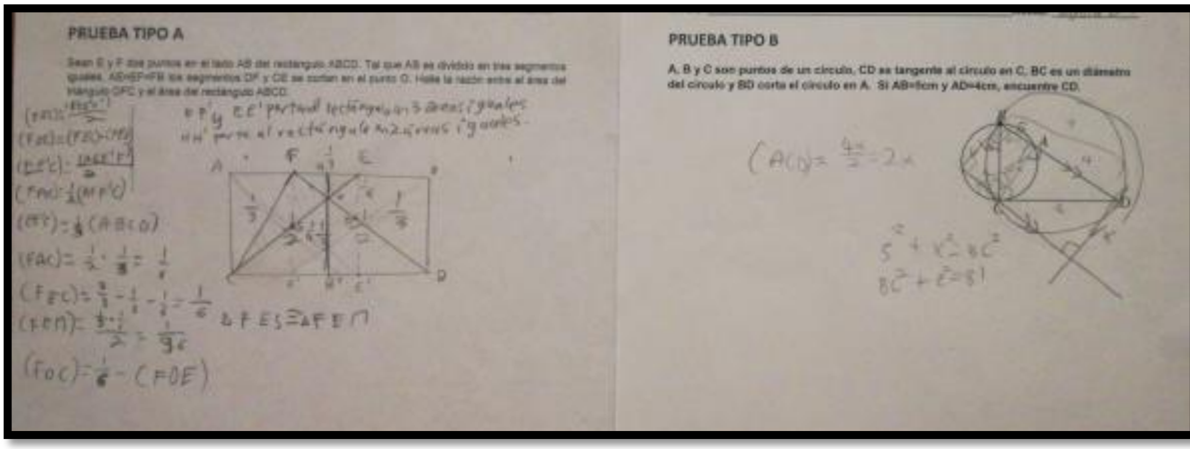


Figura 9. Trabajo realizado por estudiante 2

La siguiente prueba entregada al estudiante número 2 fue tipo B (bosquejo básico) y al respecto de esta prueba hizo los comentarios siguientes. Que se esforzó, que construyó un circuncírculo y un cuadrado en busca de conjeturas pero no llegó a ellas. Comenta que en un problema de geometria es necesario ver qué se necesita para llegar a la solución del problema o para simplificarlo y más adelante llegar a solucionarlo. El estudiante concluye la entrevista, narrando su intento de solución al construir unas líneas paralelas y un cuadrado, eso sin dejar de mostrar sus trazos como si sus dedos fuesen el lapiz.

4.3.3 Estudiante Número 3

Es un niño de 13 años que cursa sexto grado, considera que casi nunca se puede resolver un problema de geometría sin construir su bosquejo, porque hay que guiarse con el dibujo para no confundirse y poder usar teoremas. Siempre desea trabajar con regla y compás, para crear bosquejos a escala y guiarse. Esto le asegura que su figura es correcta. Dice además que a veces realiza más trazos sobre el bosquejo para usar conocimiento previo y ver el problema de otra forma.

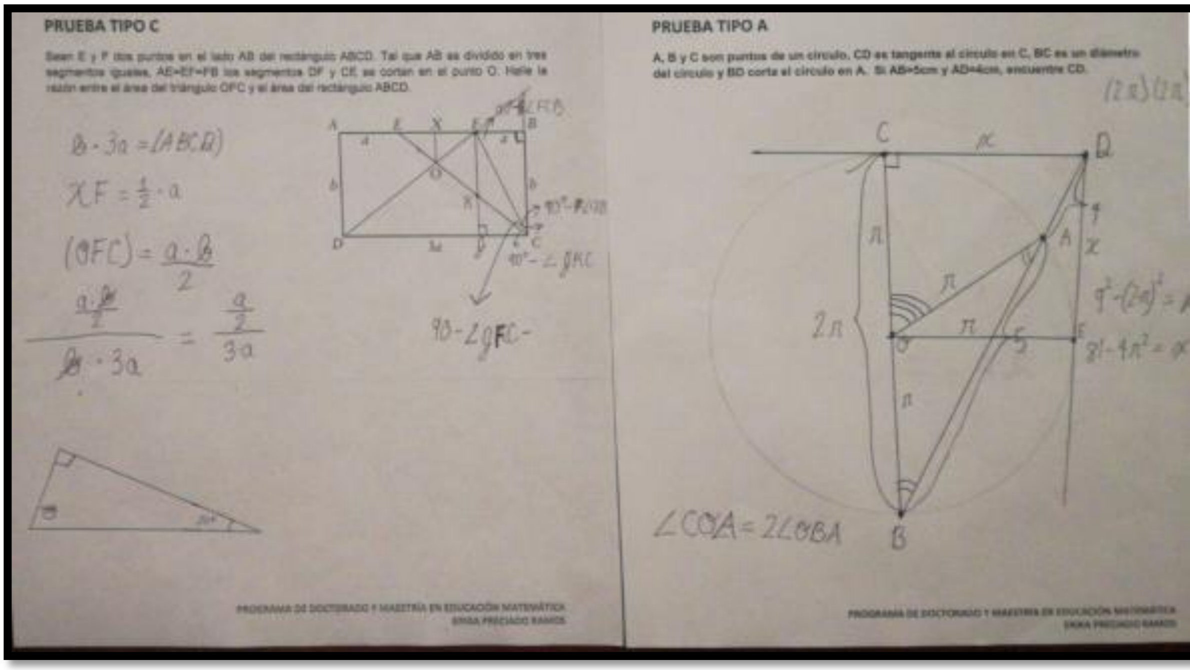


Figura 10. Trabajo realizado por estudiante 3

Considera que a veces un bosquejo debe tener medidas exactas para saber que sea aproximado al original. En la entrevista semiestructurada ratifica la encuesta. A él se le entregó como primera prueba una prueba tipo C (bosquejo más completo) y frente a ella explica que trató de hallar congruencias, que debió realizar construcciones auxiliares y además dibujar un triángulo auxiliar al que se encontraba en el bosquejo dado, porque el triángulo le permitía observar mejor los ángulos y hallar propiedades en el dibujo, como se observa en la figura anterior (izquierda).

La segunda prueba fue tipo A (sin bosquejo); él construyó el bosquejo y señala que no está construido a escala y sobre él empezó a conjeturar sobre tangentes y radios, mencionó la colinealidad y llegó a utilizar el teorema de Pitágoras, y aunque no concluye, siempre mostró intencionalidad (ver figura anterior, derecha).

Sobre la utilización de regla y compás manifiesta que le agrada utilizarlos y que siente mayor cercanía con el problema, que puede tener más detalle del problema dado y utilizar el conocimiento que se posee. En las pruebas y las sesiones de entrenamiento este estudiante se caracterizó por manejar regla y compás.

4.3.4 Estudiante Número 4

El estudiante número 4 es un niño de 13 años que cursa sexto grado quien considera que casi nunca se puede resolver un problema de geometría sin construir su bosquejo, porque se necesita hacer el bosquejo para saber qué es lo que se busca y cómo encontrarlo. Casi siempre trabaja con regla y compás, porque así es más exacto al hacer las figuras geométricas, a veces realiza más trazos sobre un bosquejo dado, porque casi siempre se pueden hallar las respuestas haciendo más cosas sobre el dibujo. Afirma que a veces es bueno que un bosquejo tenga medidas exactas, porque con proporciones y escribiendo las medidas aunque no sean reales se puede hallar las respuestas.

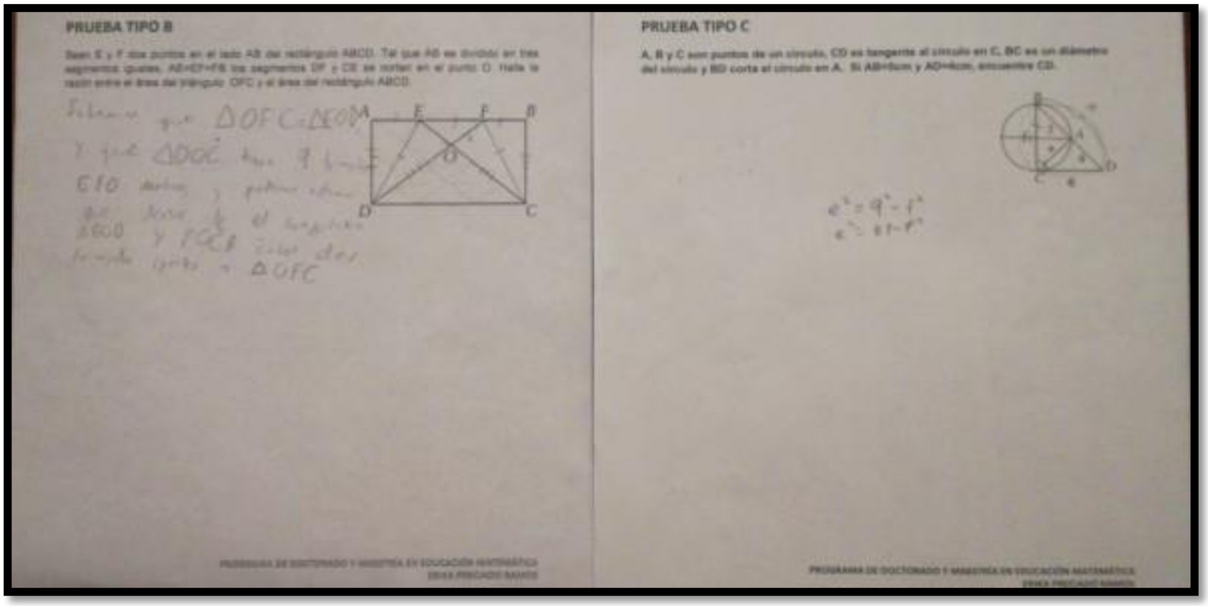


Figura 11. Trabajo realizado por estudiante 4

Al estudiante se le entregó primero una prueba tipo B (bosquejo básico), y la segunda prueba fue tipo C (bosquejo más completo). En la entrevista señala que debió dibujar el bosquejo para guiarse y saber cómo encontrar la razón viendo el tamaño de los triángulos, y entre los lados de sus trazos escribe conjeturas. Para el segundo problema se torna más gráfico, no escribe su desarrollo sino que utiliza más detalle en completar elementos del bosquejo aunque no logra hallar la respuesta. Le gusta trabajar con regla y compás, y al respecto dice que de ese modo es más preciso lo realizado.

4.3.5 Estudiante Número 5

Es una niña de 13 años que cursa sexto grado. Considera que a veces se puede resolver un problema de geometría sin construir su bosquejo, porque uno puede pensar el problema en la cabeza o dibujarlo en la mente, y entonces no hace falta pintarlo. A veces trabaja con regla y compás, porque, aunque no es tan necesario ya que decir cuanto mide no sirve, sino sirve saber por qué. A veces realiza más trazos sobre un dibujo si se puede y dice que a veces es preferible. Ratifica que la medida exacta no es lo que cuenta sino saber por qué..

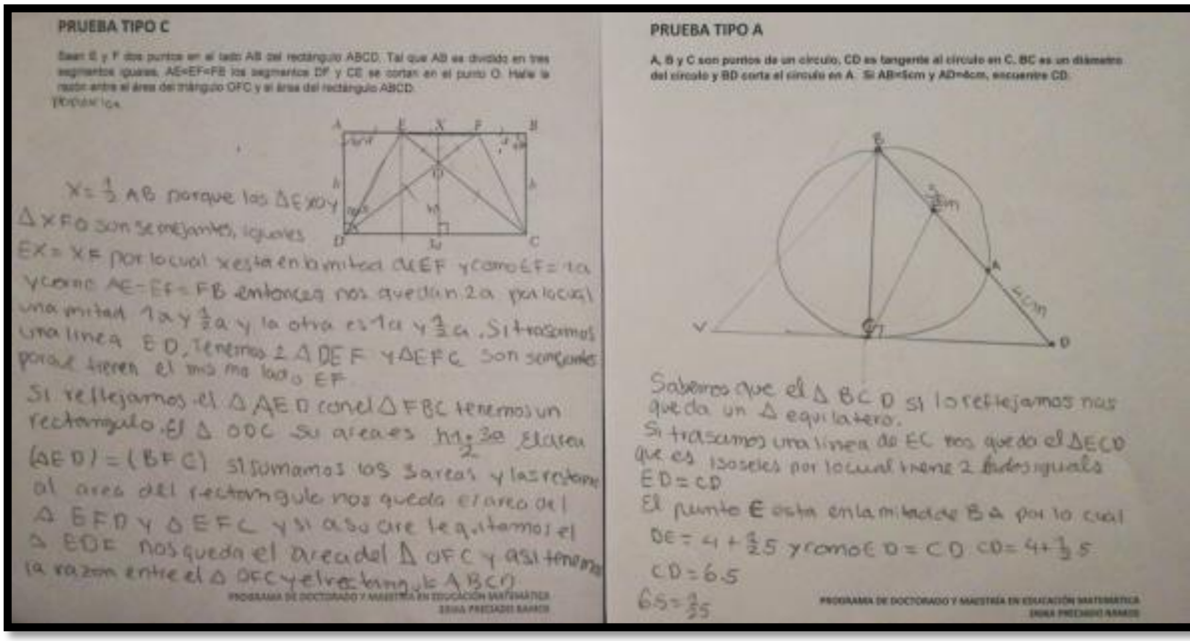


Figura 12. Trabajo realizado por estudiante 5

A la estudiante se le entregó primero una prueba tipo C (bosquejo más completo) y la segunda prueba fue tipo A (sin bosquejo). En la entrevista dice que le parece más sencillo trabajar con bosquejo, pues ya se tienen datos y se suponen medidas exactas. Afirma que encontró semejanzas y congruencias y las señala mientras narra, agrega que debió trazar más rectas para continuar conjeturando, que la imagen es una ayuda en el problema sin bosquejo y que cuando tiene la construcción hecha es más fácil. Sobre trabajar con regla y compás afirma que da igual.

4.3.6 Estudiante Número 6

La estudiante número 6 es una niña de 13 años que cursa séptimo grado. Considera que nunca se puede resolver un problema de geometría sin construir su bosquejo, porque se necesita tener algo visual. Afirma que casi nunca trabaja con regla y compás, porque no es buena utilizándolos, siempre realiza más trazos sobre los bosquejos para ver formas y semejanzas en el problema, y considera que no es necesario que un bosquejo tenga las medidas exactas.

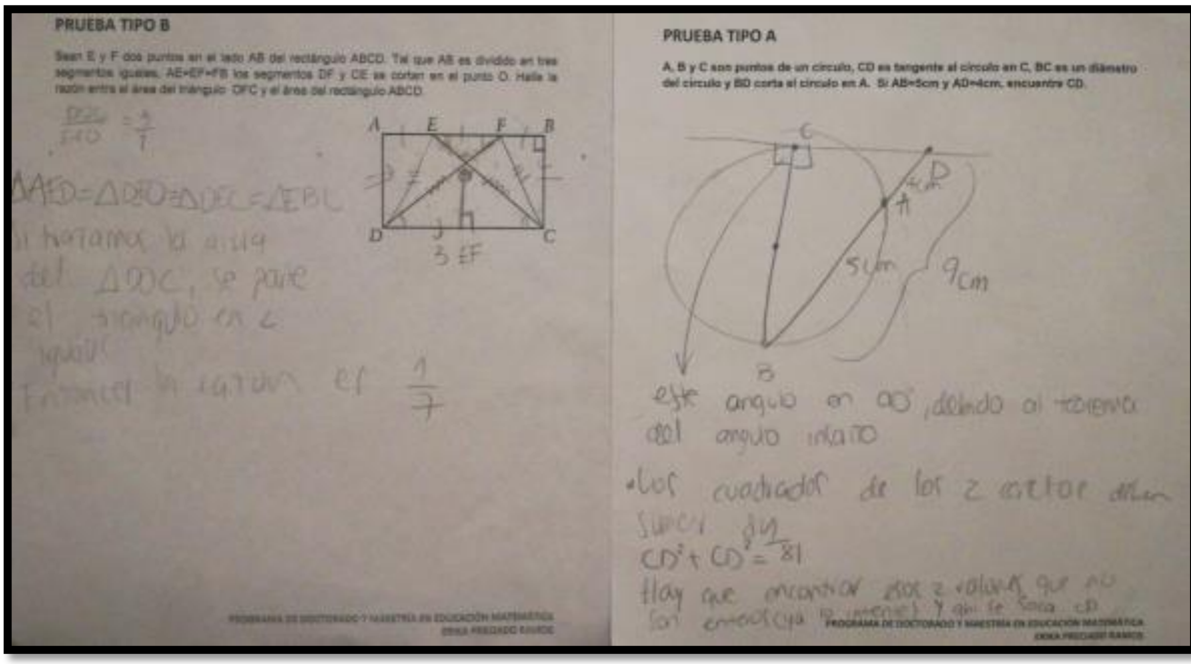


Figura 13. Trabajo realizado por estudiante 6

A la estudiante se le entregó primero una prueba tipo B (bosquejo básico), y la segunda prueba fue tipo A (sin bosquejo). En la entrevista cuenta que luego de observar el dibujo, trazó unas rectas, buscando triángulos congruentes y semejanza para determinar razones entre áreas, lo cual se ve en detalle en el dibujo anterior (izquierda).

En el ejercicio sin bosquejo, relata que le tocó dibujarlo. Dice que se necesita ver lo que dice el enunciado para poder dar solución al problema. Sin mencionarlo, narra el teorema de Pitágoras señalando en el dibujo sus características.

Agrega que trabaja con regla pero no con compás, porque no lo sabe utilizar bien, y además que el problema se prueba para todo tipo de dibujo de modo que no se necesitan dibujos de medidas exactas.

4.3.7 Estudiante Número 7

El estudiante número 7 es un niño de 13 años que cursa séptimo grado. Considera que nunca se puede resolver un problema de geometría sin construir su bosquejo, ya que se necesita seguir los pasos y observar los casos para poder resolver el problema. Siempre prefiere trabajar con regla y compás, porque es más fácil representar o dibujar el caso, a veces realiza más trazos sobre el dibujo que le dan ya que necesita rayar, las líneas etc..., para poder resolver el problema. A veces prefiere los bosquejos a medida, ya que es mejor dibujar las cosas con las medidas exactas, aunque sin dibujar con las medidas darían la misma respuesta.

A este estudiante se le entregó primero una prueba tipo B (bosquejo básico) y luego tipo A (sin bosquejo). En la entrevista menciona que las pruebas tenían dificultad para determinar semejanzas, por lo cual realizó trazos auxiliares con intencionalidad para poder establecerlas, como se observa en la siguiente figura (izquierda). En la otra prueba no había esquema por lo cual hizo el dibujo siguiendo las condiciones dadas: coloca los puntos correspondientes sobre el círculo, halla semejanzas, construye un triángulo rectángulo e identifica que puede utilizar las propiedades de los triángulos rectángulos, como se aprecia en la figura (derecha).

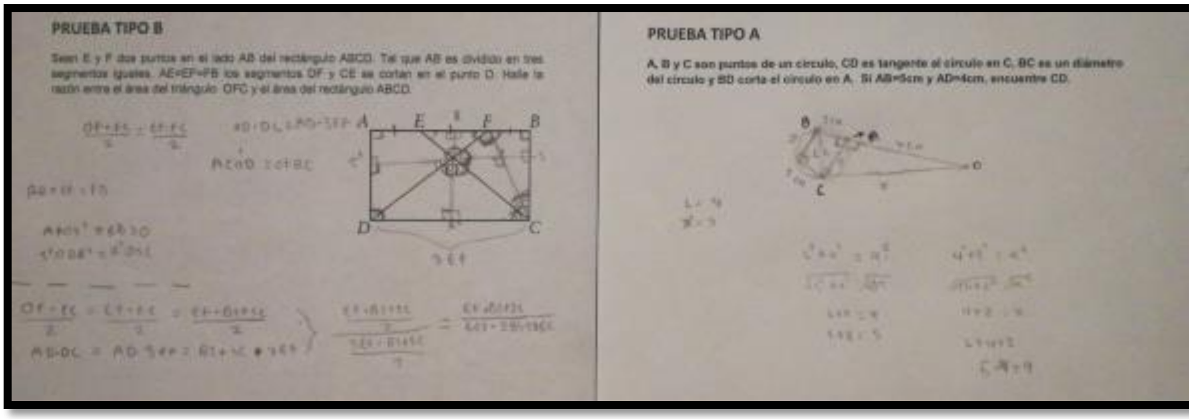


Figura 14. Trabajo realizado por estudiante 7

Señala que le gusta trabajar con regla y compás porque es más fácil realizar los dibujos. Afirma que es bueno que un bosquejo tenga medidas exactas porque se pueden verificar medidas, aunque si no es exacto también debe poder solucionarse.

4.3.8 Estudiante Número 8

El estudiante número 8 es una niña de 13 años que cursa séptimo grado. Se le entregó primero una prueba tipo C (bosquejo más completo) y la segunda prueba fue tipo B (bosquejo básico). Considera que casi nunca se puede resolver un problema de geometría sin construir su bosquejo, porque es una forma de entender mejor el problema y facilita su resolución. Dice que a veces trabaja con regla y compás, porque le gusta que las cosas /construcciones queden bien hechas, y que casi siempre realiza más trazos sobre el dibujo dado. Señala que a medida que va encontrando ángulos o probando diferentes cosas, le gusta ponerlas en el dibujo. Manifiesta que un bosquejo con medidas exactas casi nunca es obligatorio, porque no se debe encontrar valores con regla, entonces no es necesario.

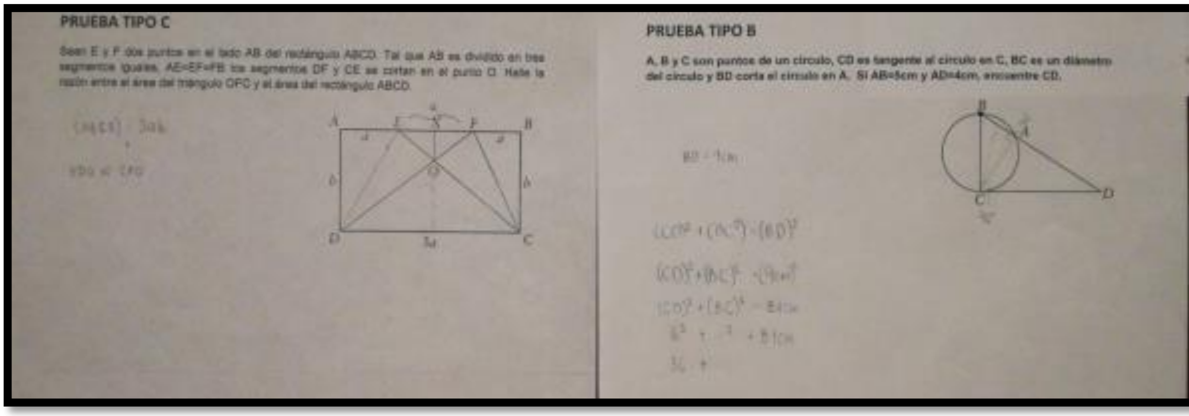


Figura 15. Trabajo realizado por estudiante 8

Por otra parte, aunque en los esquemas escribe poco, como se observa en las figuras anteriores en las cuales identifica algunas propiedades, afirma que con el esquema se pueden ver más cosas, diámetros, segmentos, ángulos, y establecer relaciones entre ellos. Trabajó con intencionalidad, pero no concluyó. Señala que suele usar regla y compás cuando siente que el problema es más difícil, pero que no es con uso de regla que se pueden encontrar propiedades, ni siquiera si el dibujo presenta medidas exactas.

4.3.9 Estudiante Número 9

Es un niño de 13 años que cursa séptimo grado. Considera que casi nunca se puede resolver un problema de geometría sin construir su bosquejo, ya que sin hacer un dibujo no se da cuenta de lo que pasa en el problema. Casi siempre prefiere trabajar con regla y compás, porque es bastante perfeccionista y se ilustra mejor, casi nunca realiza más trazos sobre un bosquejo, porque hay muchos trazos pero pocos son útiles, casi siempre trabaja con medidas exactas, para ver el dibujo de una forma más realista.

Al estudiante se le entregó primero una prueba tipo A (sin bosquejo) y la segunda prueba fue tipo C (bosquejo más completo). En la entrevista semiestructurada comenta que primero identificó los elementos, las congruencias, que tuvo que cambiar el dibujo porque colocó de manera errada dos puntos, después sí pudo encontrar bastantes propiedades sobre distancias, opuestos por el vértice y congruencias, que lo orientaban correctamente. Afirma que el bosquejo lo ayuda a visualizar el problema y entenderlo mejor como se aprecia en la siguiente figura (izquierda).

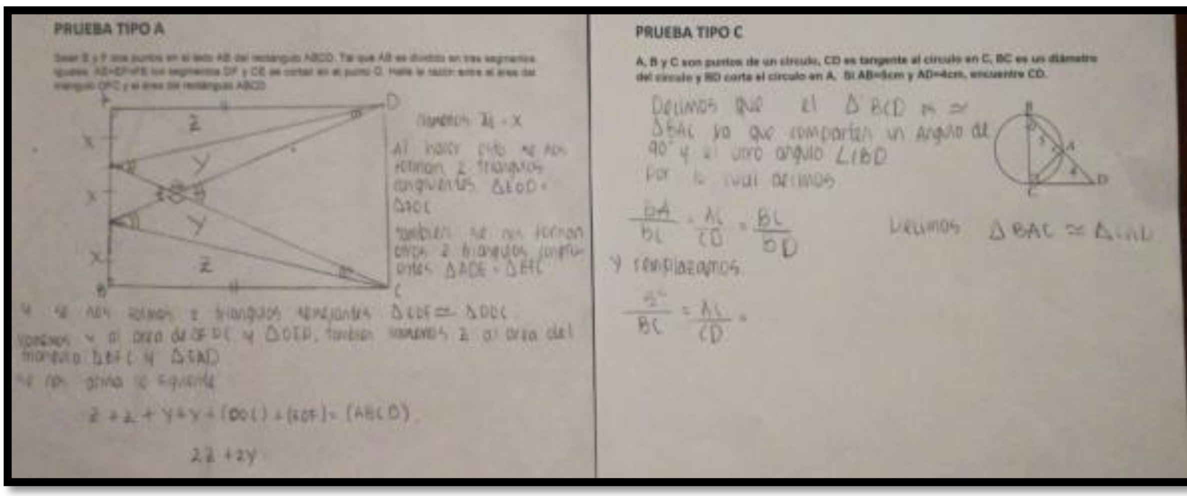


Figura 16. Trabajo realizado por estudiante 9

Para el otro problema con esquema, inicia con la identificación de propiedades siempre con intencionalidad de concluir acertadamente, afirma que al hacer las construcciones con regla y compás el esquema es más realista, que no es posible llegar a la solución sin construcciones y que hacerlas requiere imaginación.

4.3.10 Estudiante Número 10

El estudiante número 10 es un niño de 13 años que cursa séptimo grado. Al estudiante se le entregó primero una prueba tipo A (sin bosquejo) y la segunda prueba fue tipo B (bosquejo básico). Considera que casi nunca se puede resolver un problema de geometría sin construir su bosquejo, porque es más fácil ver la ilustración; a veces prefiere trabajar con regla y compás, porque en algunos casos es más claro si el dibujo tiene exactitud. Siempre realiza más trazos sobre el bosquejo dado para lograr un dibujo más exacto, y dice que debe ver para entender, que necesita los bosquejos. Sobre los problemas propuestas dice que primero lee muy bien, para el tipo A fue trazando sus propiedades, determina equidistancia y triángulos congruentes, como se observa en la figura (izquierda).

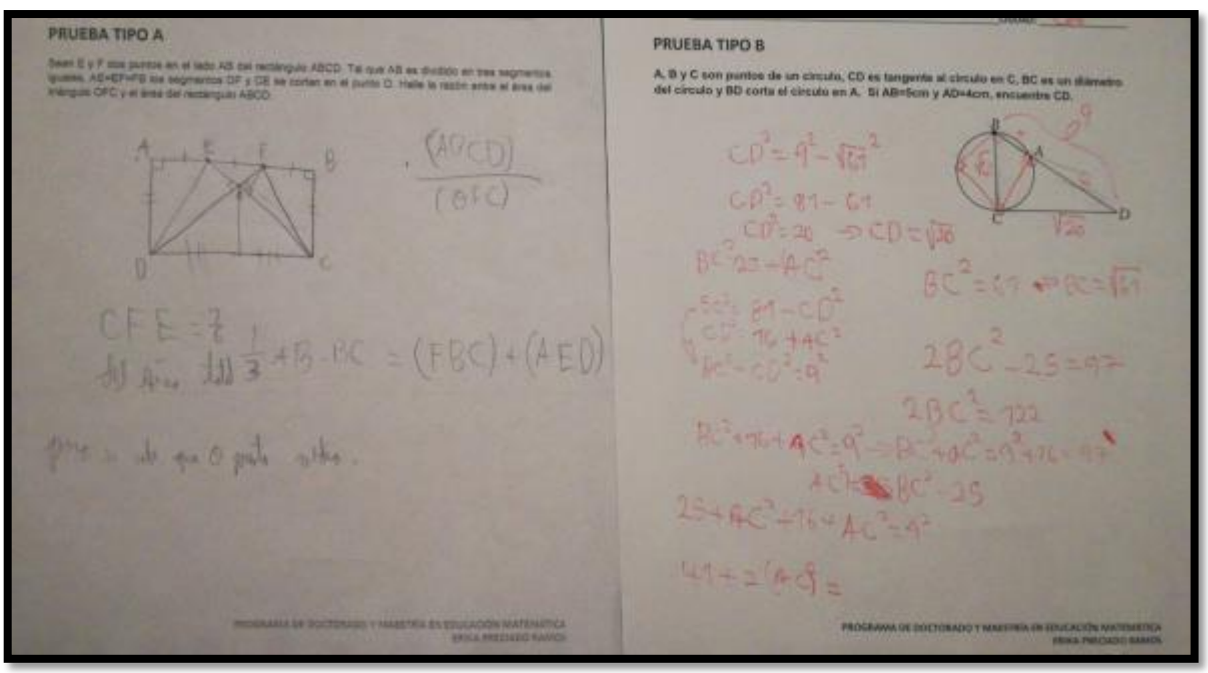


Figura 17. Trabajo realizado por estudiante 10

Sobre la prueba con bosquejo dice que iniciar fue más sencillo, porque el dibujo es más exacto, y halló un triángulo rectángulo y ángulos inscritos (figura derecha). Aunque no concluyó correctamente, dice que es porque tuvo un error en sus cálculos. Señala que no es necesario hacer bosquejos con medidas exactas porque se pueden asumir cosas que no son verdad. Finalmente dice que le gusta trabajar con regla y compás si dispone de ellos y que las ideas de hacer más trazos surgen de la creatividad.

4.3.11 Estudiante Número 11

El estudiante número 11 es un niño de 14 años que cursa séptimo grado; se le entregó primero una prueba tipo A (sin bosquejo) y la segunda prueba fue tipo C (bosquejo más completo).

Considera que casi nunca se puede resolver un problema de geometría sin construir su bosquejo porque es necesario como un punto de referencia, y prefiere trabajar con regla y compás porque le ayuda a hacer dibujos más exactos. Señala que cuando parte de un bosquejo, siempre realiza más trazos para encontrar diferentes valores y poder resolver la situación; que así puede ser más exacto, ver e imaginar. Aunque señala que no siempre se necesitan las medidas exactas, menciona metafóricamente las homotecias y la realidad. Al resolver el problema tipo C, utiliza el teorema de Pitágoras, pero tuvo errores aritméticos por lo cual no pudo concluir correctamente como se observa en la figura.

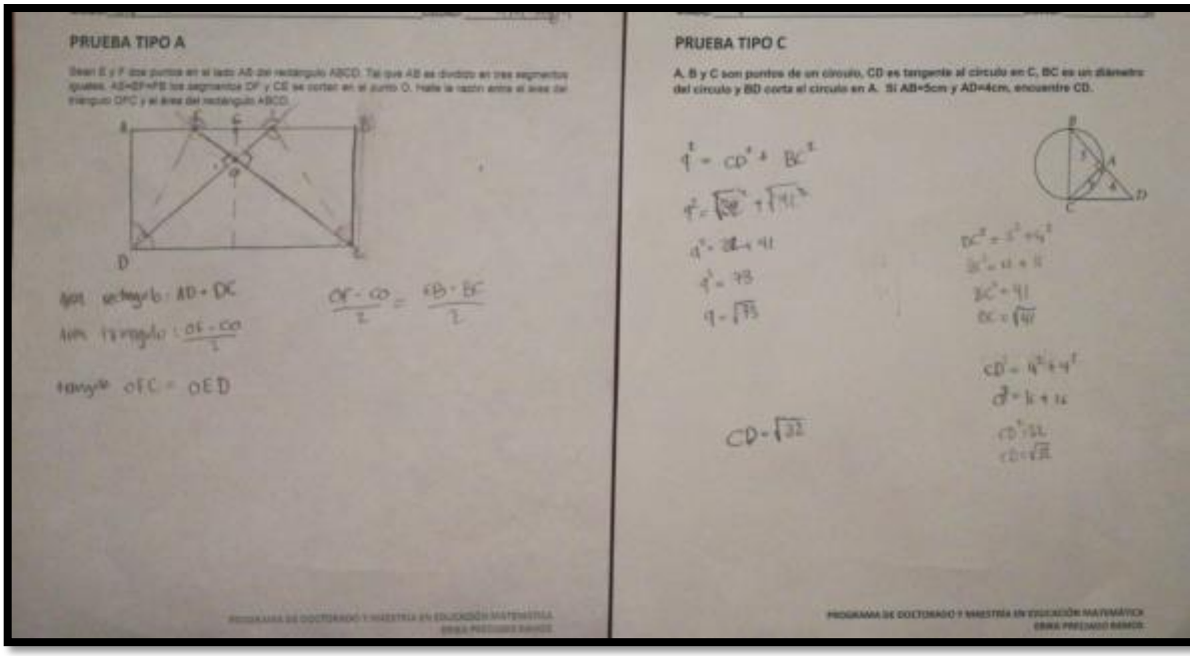


Figura 18. Trabajo realizado por estudiante 11

4.3.12 Estudiante Número 12

Este estudiante es un niño de 13 años que cursa sexto grado. Al estudiante se le entregó primero una prueba tipo B (bosquejo básico) y la segunda prueba fue tipo A (sin bosquejo). Considera que a veces se puede resolver un problema de geometría sin construir su bosquejo, pero que es mucho más sencillo si se hace, y que siempre necesita referencias visuales, por eso hace trazos sobre el dibujo; prefiere trabajar con regla y compás porque así se siente más seguro del resultado.

Durante la entrevista explica para el primer problema dividió el rectángulo en dos cuadrados, para ver los triángulos de una manera más sencilla y encontrar una respuesta. Aunque identificó triángulos rectángulos y exploró sus propiedades, no pudo concluir, como se muestra en la figura siguiente (izquierda).

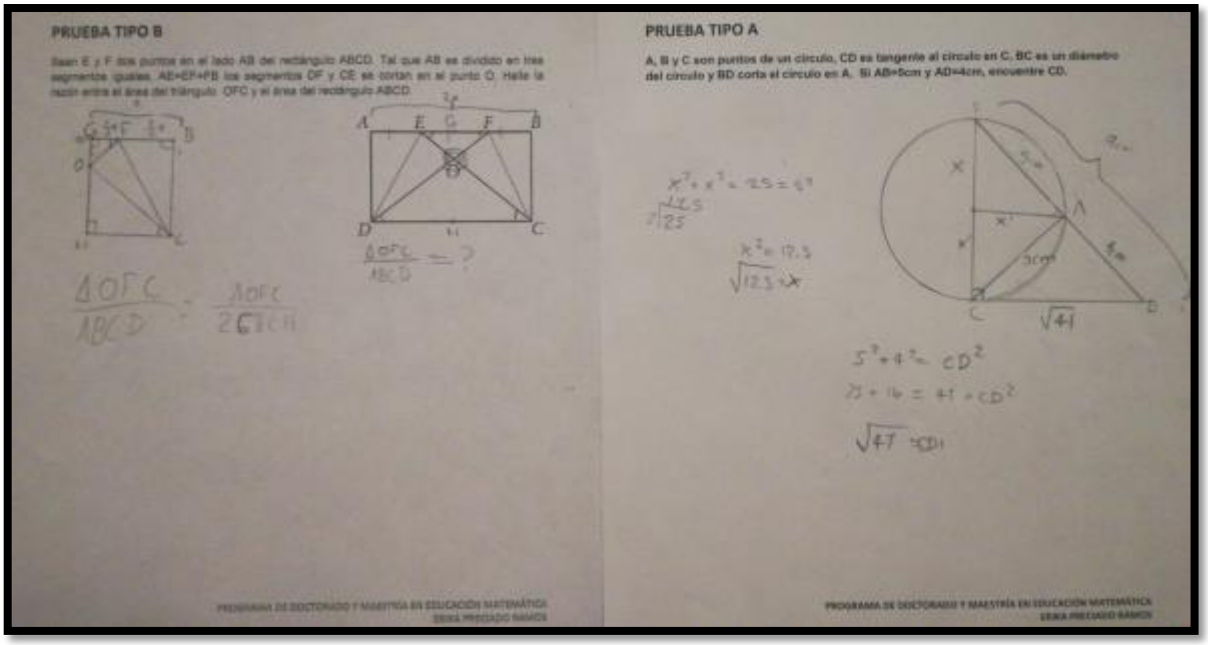


Figura 19. Trabajo realizado por estudiante 12

Sobre el problema sin bosquejo, dice que lo primero que hizo fue construirlo pero fue complicado, buscó hallar la distancia usando el teorema de Pitágoras en un triángulo no rectángulo, se dio cuenta y no pudo concluir correctamente, como se observa en la figura anterior (a la derecha).

4.3.13 Estudiante Número 13

El estudiante número 13 es una niña de 13 años que cursa séptimo grado; se le entregó primero una prueba tipo A (sin bosquejo) y la segunda prueba fue tipo C (bosquejo más completo). Considera que nunca se puede resolver un problema de geometría sin construir su bosquejo, porque para ella la geometría es un tema de papel y lápiz, el dibujo permite ir mas allá, por eso siempre realiza más trazos sobre el bosquejo dado para intentar hallar más figuras dentro del dibujo y facilitar la solución. Afirma que nunca un bosquejo debe tener medidas exactas, sino que hay que demostrar y estar seguro de lo que se está diciendo para cualquier caso, no volverse tan mecánico y sólo resolver con un caso específico, es cuestión de ingeniarse un bosquejo de tal manera que sea visible para cualquier caso. También señala que casi siempre prefiere trabajar con regla y compás, pero que no se debe depender de estos elementos.

En la entrevista afirmó que en la primera prueba que se preguntaba sobre áreas, trazó triángulos rectángulos para establecer semejanzas, le resulto fácil realizar el bosquejo puesto que era claro el enunciado, como se observa en la figura (izquierda).

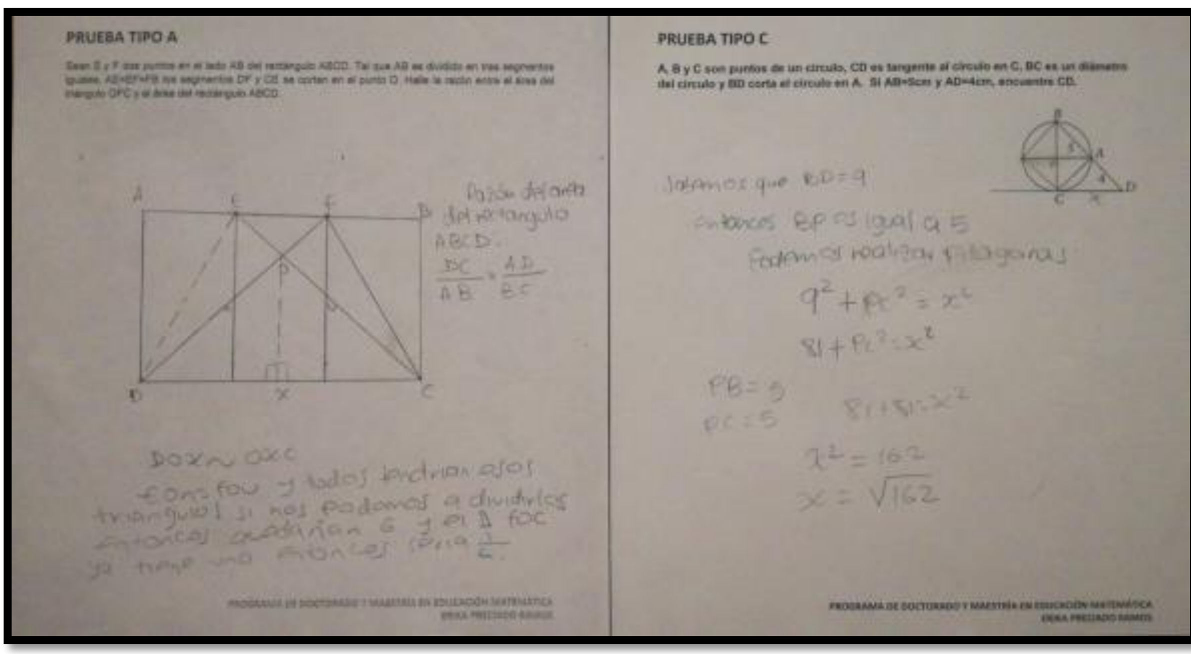


Figura 20. Trabajo realizado por estudiante 13

Para el segundo problema utilizó el teorema de Pitágoras y realizó más trazos sobre el bosquejo en busca de propiedades, tangentes y semejanzas, como se muestra en la figura anterior (derecha).

4.3.14 Estudiante Número 14

El estudiante número 14 es un niño de 13 años que cursa séptimo grado. Al estudiante se le entregó primero una prueba tipo C (bosquejo más completo) y la segunda prueba fue tipo A (sin bosquejo).

Este estudiante considera que a veces se puede resolver un problema de geometría sin construir su bosquejo, depende de la dificultad del problema, pero que siempre realiza más trazos sobre el dibujo para que le den proyecciones; también dice que dependiendo del tipo de problema, un bosquejo debe tener medidas exactas. Afirma que casi siempre prefiere trabajar con regla y compás, porque así tiene mejor precisión, y afirma que si el bosquejo no tiene medidas exactas no puede concluir si es realizable.

Sobre la primera prueba dice el esquema completo facilitó el análisis por lo que realizó construcciones auxiliares en las que se evidencia intencionalidad y dinamismo. Añade que saber qué trazos hacer es parte del ingenio geométrico, sin dibujo no hubiese podido concluir lo necesario. En su trabajo determina semejanzas y logra concluir, como se observa en la siguiente figura (izquierda).

Para el segundo problema, realizó un esquema y así logra analizar, aunque no escribe. Durante la entrevista narra con fluidez sus ideas, dice que no se ingenió la solución (figura derecha).

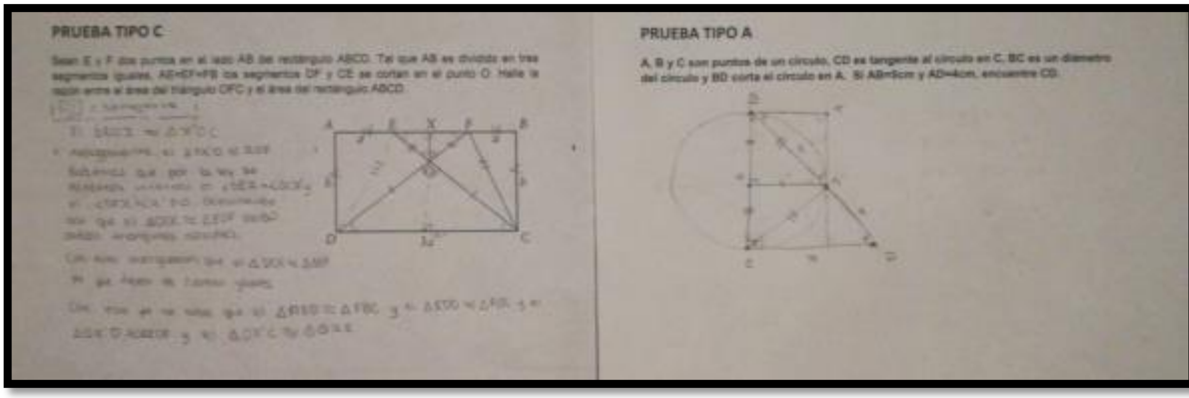


Figura 21. Trabajo realizado por estudiante 14

4.3.15 Estudiante Número 15

El estudiante número 15 es un niño de 14 años que cursa séptimo grado. Al estudiante se le entregó primero una prueba tipo A (sin bosquejo) y la segunda prueba fue tipo B (bosquejo básico).

Considera que casi nunca se puede resolver un problema de geometría sin construir su bosquejo, que se necesita apoyo visual y a través de éste darle sentido, por lo que casi siempre realiza más trazos sobre el bosquejo dado o realiza todo el diagrama si sólo está el enunciado. De los nuevos trazos dice que son para formar nuevas figuras que pueden ayudar, y que a veces es mejor que un bosquejo esté realizado con medidas exactas, porque es mejor no suponer.

En el primer problema hizo el esquema, y contó que le resultó complicado, aunque se observó congruencia de triángulos, figura parte izquierda. Para el segundo problema el bosquejo ya estaba, de modo que utilizó el teorema de Pitágoras y concluyó; nuevamente dice que el esquema le facilitó muchas las cosas.

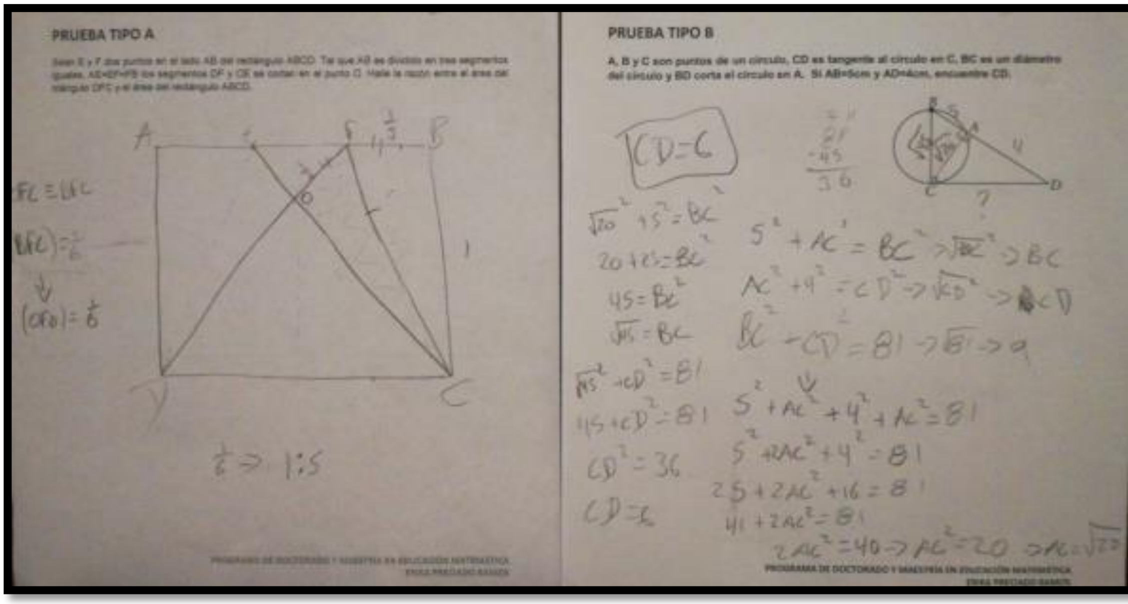


Figura 22. Trabajo realizado por estudiante 15

4.4 Resultados participación individual, grupo 3 – olimpiadas

El grupo 3 estaba conformado por seis estudiantes que integraban el equipo IMO, quienes están en los grados noveno, décimo y undécimo, como se observan en la siguiente foto.

Figura 23. Grupo Equipo de IMO, 2017

4.4.1 Estudiante Número 16

El estudiante realizó pruebas tipo A y tipo B, en las cuales se denota intencionalidad y conclusión, como integrante del equipo de Colombia para las olimpiadas internacionales de Matemática ha participado en varios entrenamientos. En el primer problema construye el triángulo equilátero inscrito en el círculo, y luego se remite al Teorema de Ptolomeo, para concluir de manera clara y directa; dice que conocía el teorema, no obstante el estudiante realizó trazo para verificar su primera percepción y al estar en lo correcto concluye, como se observa en la figura (izquierda).

En la siguiente actividad debe realizar el bosquejo, identificando razón entre áreas y razón entre segmentos, y el análisis sigue por ese camino hasta hallar lo solicitado. Dice que resultó de mayor complejidad, pero que en ésta el bosquejo permite realizar un análisis certero al poseer varias simetrías. Afirma que una de sus construcciones fue la de alargar cuerdas y cortarlas con la unión de los centros y hallar la potencia de un punto y con semejanzas llegar a la solución, como se muestra en la figura (derecha).

Sobre la necesidad de realizar un bosquejo en un problema de geometría, afirma que depende del problema y que la experiencia implica poder simplificarlos en ocasiones, pero para pruebas de alto nivel es indispensable. Sobre el dibujar con regla y compás afirma que es una ayuda extra, sobre los bosquejos perfectos dijo: “La geometría es el arte de dibujar mal y pensar bien”. Se refiere a una de las pruebas del entrenamiento, en la que el problema era de mayor complejidad, y donde realizó tres dibujos buscando la perfección y no perder puntos en la prueba. Reafirma la importancia de las construcciones. Las ideas sobre los trazos surgen de los puntos que cita el problema, y sobre los que se siente falta de algo. Priman la simetría, talento e instinto de cada uno al realizar nuevas construcciones.

Finalmente dice que las ideas sobre los trazos surgen de los puntos que cita el problema, y que se siente falta de algo, y que para hacerlos prima la simetría, talento e instinto de cada uno al realizar nuevas construcciones.

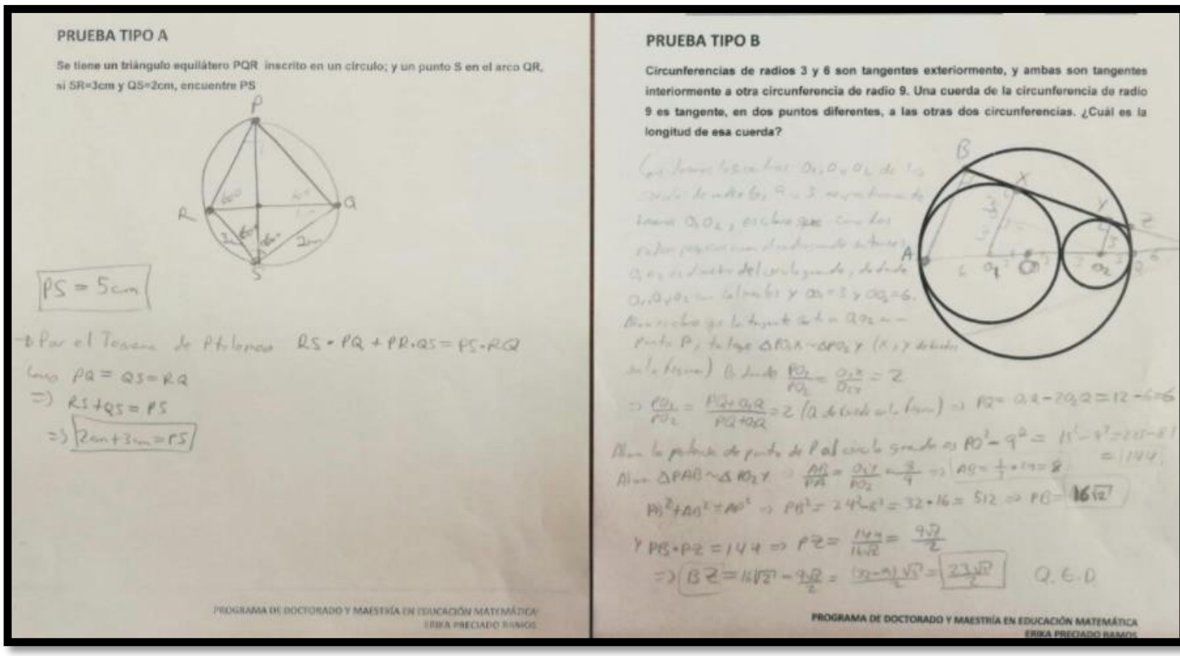


Figura 24. Trabajo realizado por estudiante 16

4.4.2 Estudiante Número 17

En las pruebas se nota la destreza y la manera consciente e intencionada de realizar las construcciones, y evidencia conocimientos diferentes, dados por los entrenamientos. Hace referencia al teorema de Ptolomeo, construye lo enunciado y permite observar simetría en sus dibujos. Utilizó Pitágoras e identificó más datos, mientras que en otra de las pruebas utilizó envolvente convexa y trazos básicos, como se observa en la figura.

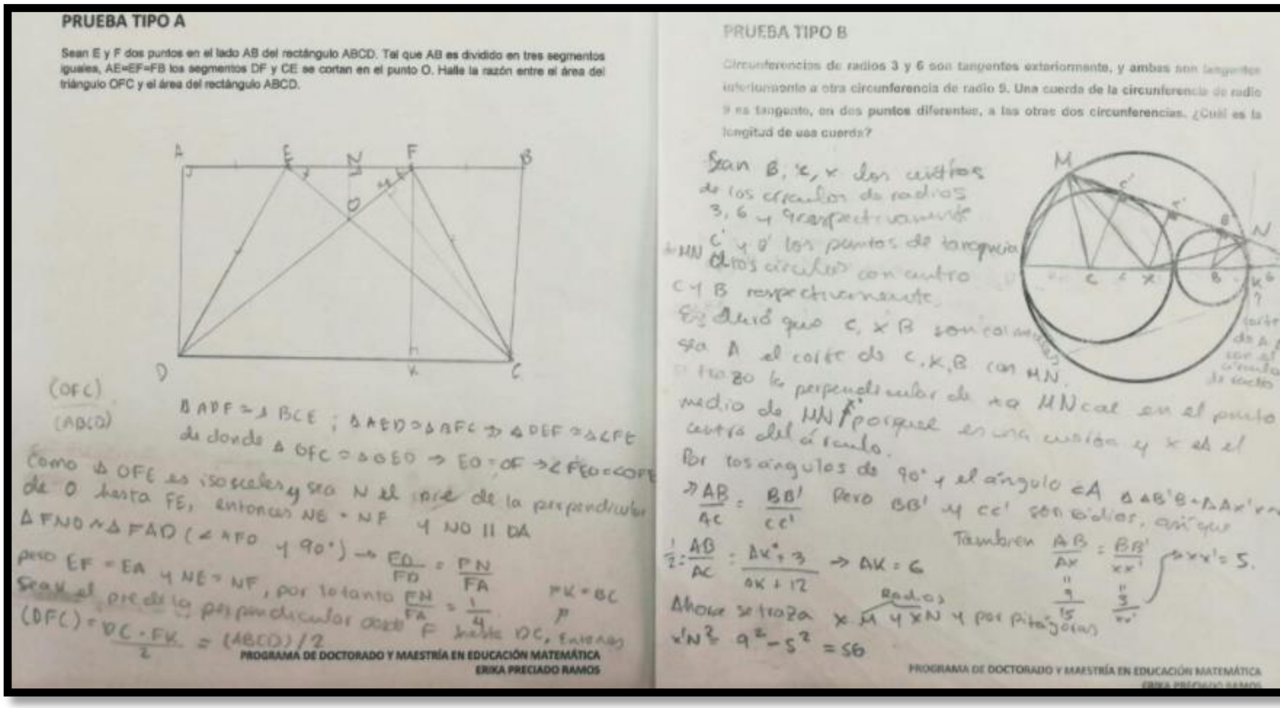


Figura 25. Trabajo realizado por estudiante 17

En la entrevista afirma que lo primero que hizo fue detallar su bosquejo y que trabaja con dibujos para que no se le olvide algo que puede ser importante. Los bosquejos son extremadamente indispensables. Habla de dibujar grande, porque en condiciones diversas varios dibujos pueden ser la guía. Que la regla sí la utiliza, y es más indispensable que el compás "*La gracia no es sacar el dibujo y hallar la medida, la gracia es hacer un dibujo lo suficientemente claro para direccionarse*".

4.4.3 Estudiante Número 18

El estudiante construye trazos auxiliares y en su bosquejo se evidencian círculos, triángulos, cevianas, y mucho trabajo con ángulos. Muestra poca precisión pero bastantes conjeturas, como se observa en la siguiente figura siguiente.

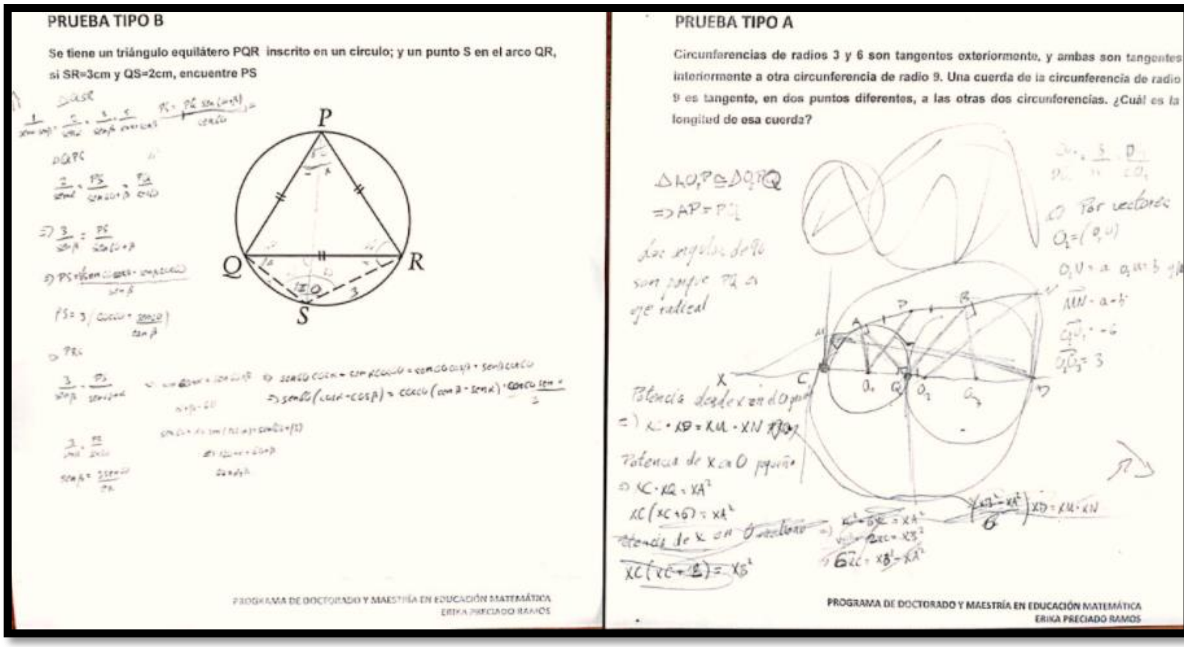


Figura 26. Trabajo realizado por estudiante 18

El estudiante habla de que hay inmediatez en la resolución de algunos problemas cuando se han relacionado muchos previamente, que él ha realizado varios problemas y los presentados los identificó para ser trabajados por potencia de puntos y envolvente convexa. Dice que, si no se le hubiera presentado con bosquejo en uno de los ejercicios, él hubiese tenido que realizarlo. Afirma que es prácticamente imposible conservar el esquema en la memoria y a la vez poder construir otros ángulos y figuras, y que las construcciones bien realizadas propenden a que el problema fluya naturalmente. Continúa diciendo que los dibujos no deben tener medidas exactas, que ellas son una referencia, y que las construcciones son una guía. Aunque ha expresado intencionalidad, no llega a concluir correctamente.

4.4.5 Estudiante Número 19

La estudiante afrontó los problemas dados con y sin bosquejo, y en el segundo caso realizó el trazo correspondiente a mano alzada. Se percibe intencionalidad, y manejo de líneas, puntos notables y propiedades adyacentes como la proporcionalidad y ángulos, como se observa en la siguiente figura.

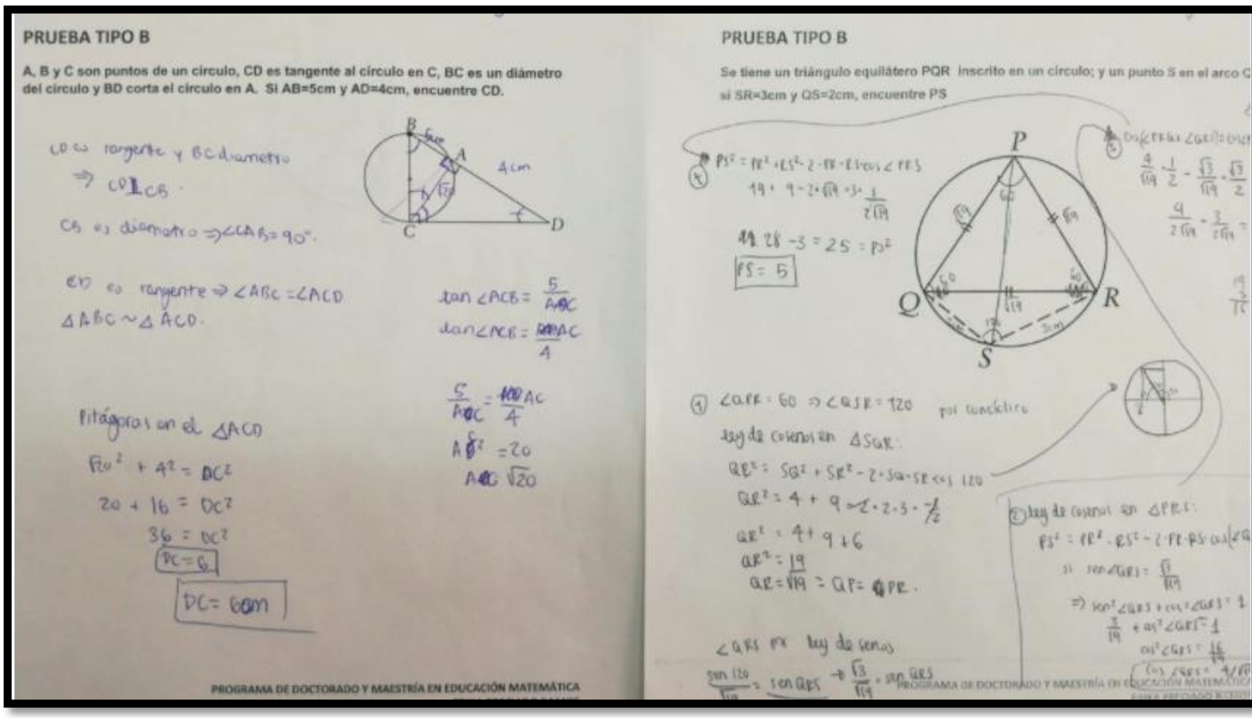


Figura 27. Trabajo 1 realizado por estudiante 19

En la entrevista dice que observó las tangencias a través del bosquejo, ratifica la importancia de la visualización, y afirma que en ocasiones el no tomarse el tiempo para observar hace que se tomen caminos más largos y complicados.

Para el segundo problema, que no tenía esquema dice que realizó varias construcciones hasta que logró percibir las propiedades de las tangencias y como debía ser el esquema del problema, aunque se observa intencionalidad, no logró concluir de manera acertada, como se observa en la figura.

Nuevamente señala que el dibujo le da la posibilidad de tener toda la información visualmente sin tener que recordarla, que el trabajar con regla y compás uno de los ejercicios planteados hubiese sido una fantástica idea, pues hubiese sido más claro y no tan mezclado como resulto. Para otro de los problemas si utilizó esas herramientas y se tornó más amable su visualización. Dice que la exactitud de las medidas no es esencial, pero sí puede ayudar el tener el esquema dentro de unos parámetros cercanos a ellas. Se le dificultan las construcciones auxiliares, pero sabe que son esenciales no sólo por el propio entendimiento sino por el de las personas que pueden leer un desarrollo, facilitan el entendimiento.

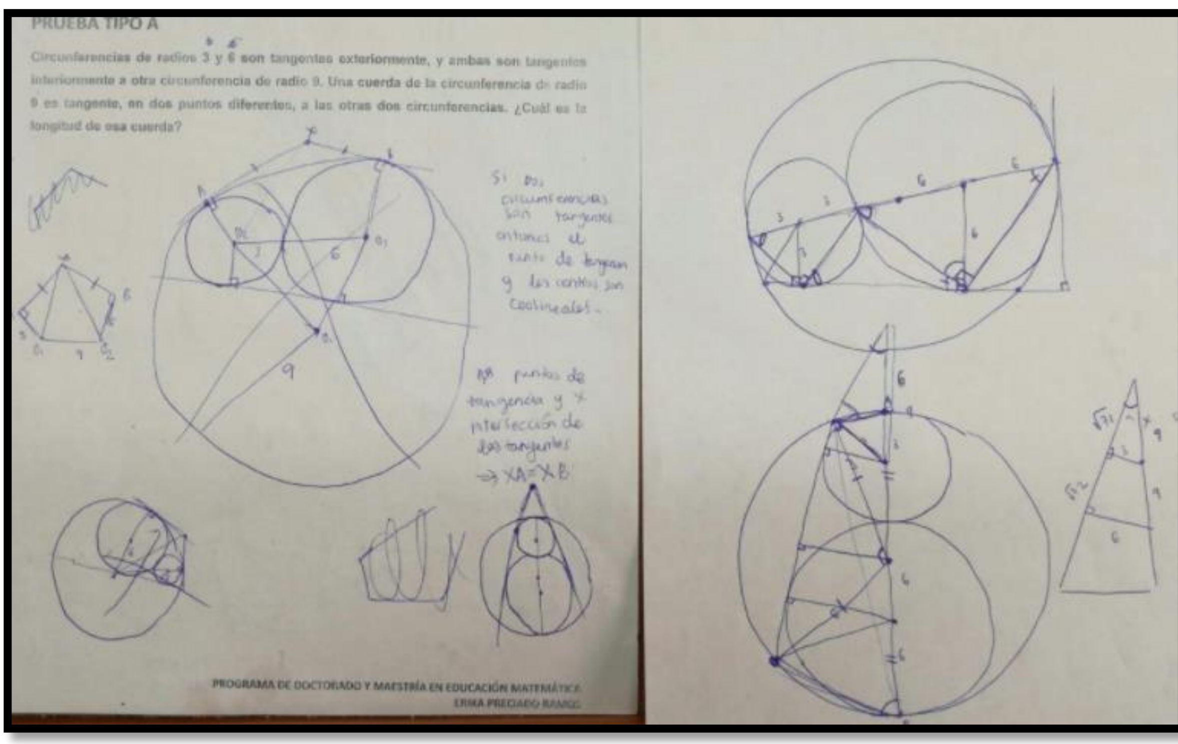


Figura 28. Trabajo 2 realizado por estudiante 19

4.4.5 Estudiante Número 20

El estudiante realizó pruebas que no tenían bosquejo, realiza los dibujos a mano alzada sin dejar de mostrar intencionalidad, pero no es muy prolífico en sus justificaciones. Construye el triángulo inscrito en el círculo, y luego se remite al Teorema de Ptolomeo, para concluir, como se observa en la figura (izquierda). En la entrevista semiestructurada afirma que con la construcción que hizo visualizó que podía usar el teorema de Ptolomeo, habla de las propiedades de los triángulos semi inscritos y la tangencia, aunque en ese ejercicio en particular no concluye.

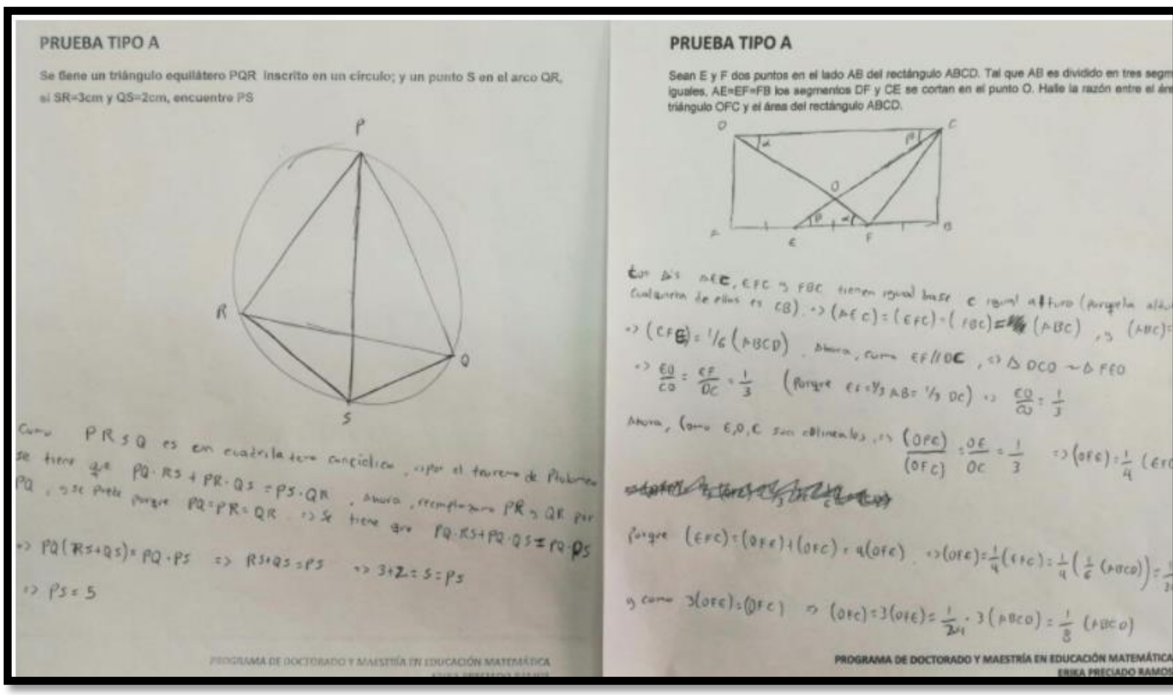


Figura 29. Trabajo realizado por estudiante 20

Dice que el bosquejo ayuda a visualizar lo que se quiere conseguir, que depende del problema y de la experiencia para poder simplificarlos, pero para pruebas de alto nivel es indispensable.

4.4.6 Estudiante Número 21

La estudiante realizó pruebas con bosquejo suficiente y que no tenía bosquejo. Sobre ellas habla de la configuración de triángulo equilátero y dos medidas más (lados), menciona que en olimpiadas les enseñaron una fórmula para cuadriláteros cíclicos que les ayudaba a encontrar la medida de las diagonales en función de los lados (Ptolomeo) y fue lo que utilizó para concluir. Con respecto al segundo problema intentó calcular las cosas que veía pero no logró concluir, como se observa en las siguientes figuras.

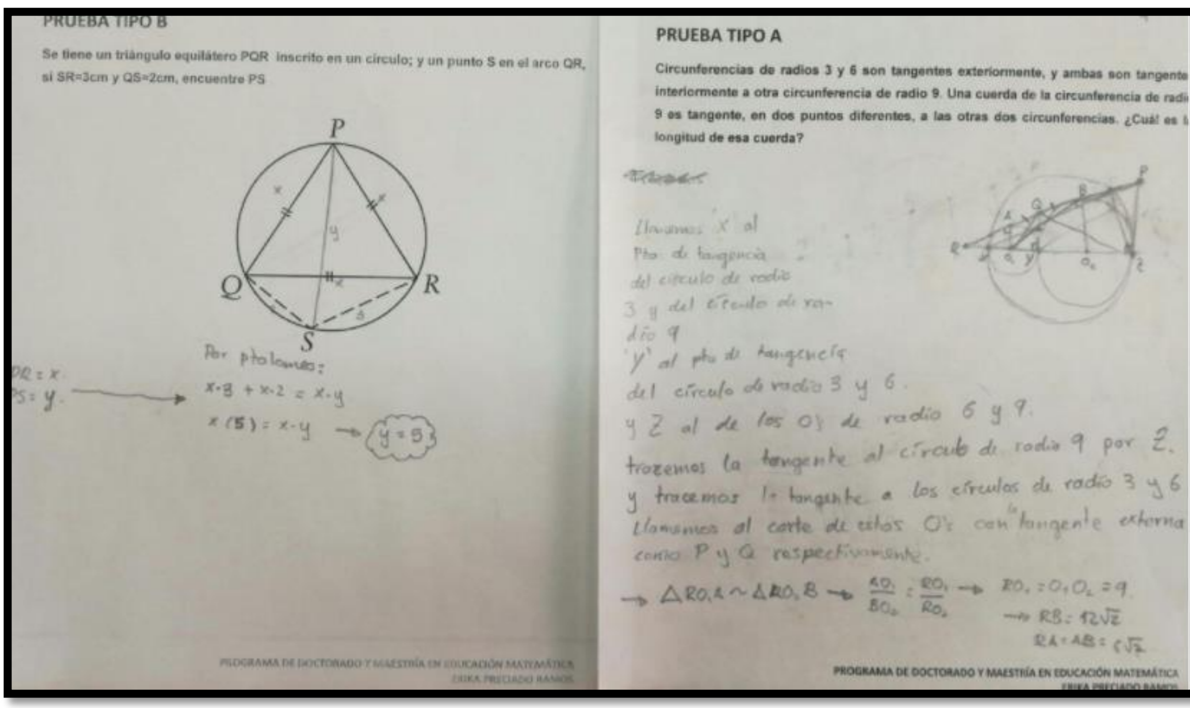


Figura 30. Trabajo realizado por estudiante 21

Sobre los bosquejos, afirma que no es necesario la construcción de bosquejos si tiene una estrategia muy marcada, pero si no se tiene claro es indispensable. Habla de un cálculo por potencia de puntos, y aparentemente posee mucho bagaje en estrategias de olimpiadas, aunque en ocasiones no concluye. Dice que utilizar la regla y compás a veces puede ayudar a ver cosas que no se ven normalmente en el dibujo. A veces se da una sensación de perfección que puede confundir y suscitar que se piense que no debe demostrarse, y en olimpiadas no puedes utilizar hasta que no demuestres, pero es muy útil para darse cuenta de más cosas, como concurrencia.

Sobre las construcciones auxiliares dice que dependen de los datos que da el problema, sí el problema da segmentos que son iguales, una construcción auxiliar que siempre funciona es intentar formar triángulos isósceles con esos segmentos, si dan tangentes mirar cortes que se presentan en los dibujos, si dan puntos concíclicos unir los segmentos y buscar angulitos. Todas son construcciones que son muy naturales en ocasiones, y el no hacerlas puede hacer perder información clara.

4.5 Resultados participación individual, grupo 4 – OLIMPIADAS

En este apartado se describen los resultados del grupo de la Olimpiada Iberoamérica, grupo que se observa en la siguiente figura.

Figura 31. Grupo Equipo de la Iberoamericana, 2017

4.5.1 Estudiante Número 22

Al observar el trabajo escrito del estudiante se ven diferentes trazos que, en principio, denotan algo de aleatoriedad. Sin embargo, los elementos que se verifican sí tienden a la conclusión positiva del problema, realiza varias construcciones auxiliares, mostrando medianas y paralelismo entre otras, como se observa en la figura.

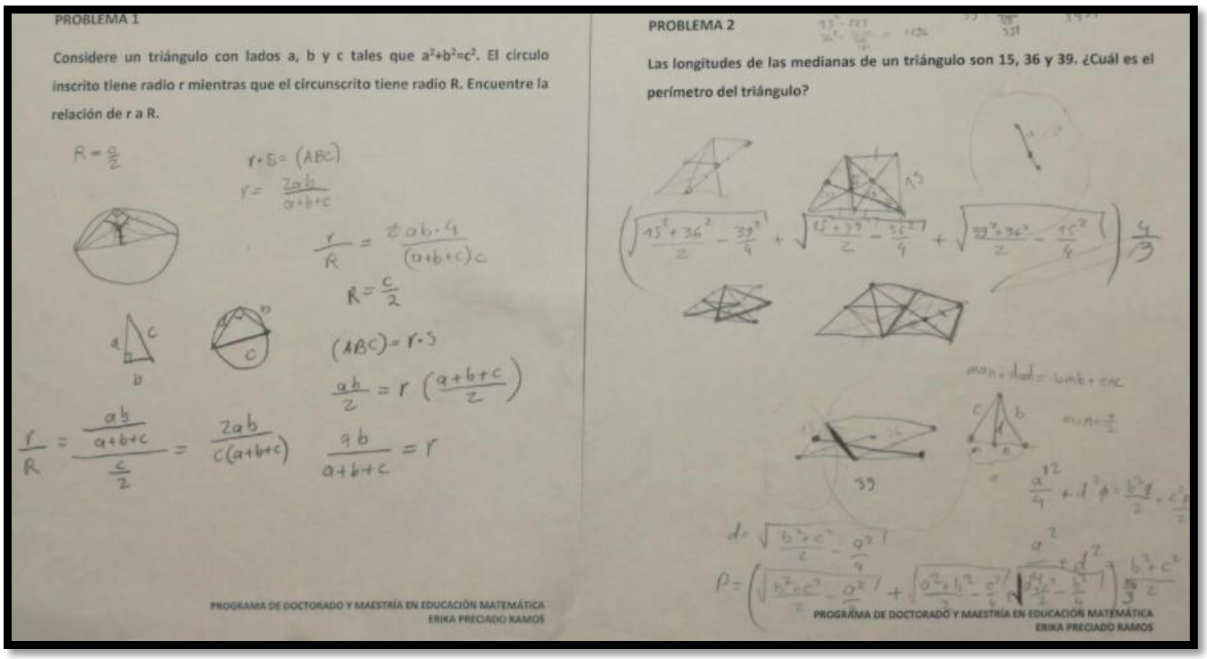


Figura 32. Trabajo realizado por estudiante 22

Durante la entrevista se evidencia que nada fue al azar, el estudiante explica su desarrollo en la ejecución de cada uno de los problemas mostrando las construcciones auxiliares e intencionalidad y ampliando la información que es visible en el papel y las ideas que hay detrás. Muestra destreza en sus explicaciones y fluidez en el lenguaje, afirma que sin las construcciones auxiliares no hubiese podido concluir, en todo momento muestra intencionalidad y concluye acertadamente. Identifica con destreza un problema con una contradicción sin dudar de sus aplicaciones, menciona criterios de congruencia, de paralelismo, puntos notables, cevianas, etc.

Afirma que de ser posible utiliza regla y compás, que un buen dibujo nunca le hace pensar cosas erradas, pero que sí puede distraerlo de su objetivo. Un buen dibujo también puede ser motivo de distracción porque se ve más de lo que se necesita, pero realmente es mejor tener un buen dibujo.

4.5.2 Estudiante Número 23

En los trazos la estudiante muestra destreza y seguridad, resuelve los problemas de una manera sencilla y consistente, encontrando propiedades con gran facilidad.

Durante la entrevista, explica su desarrollo en la ejecución de cada uno de los problemas relacionando conceptos básicos como triángulo rectángulo, circuncentro, circunradio, teorema de Pitágoras, inradio y teorema de Stewart, mientras los presenta.

Dice que prefiere los problemas sin bosquejo pues realizarlo le ubica previamente. En el primer problema afirma no haber tenido la necesidad de ampliar tanto el bosquejo, pero si realizó un par de trazos. Muestra intencionalidad y concluye acertadamente. Por otra parte, identificó el problema que presentaba una contradicción, afirmando que le pareció inconsistente, habla de puntos fantasma al referirse a información que no utiliza en el problema. No trabaja con regla y compás.

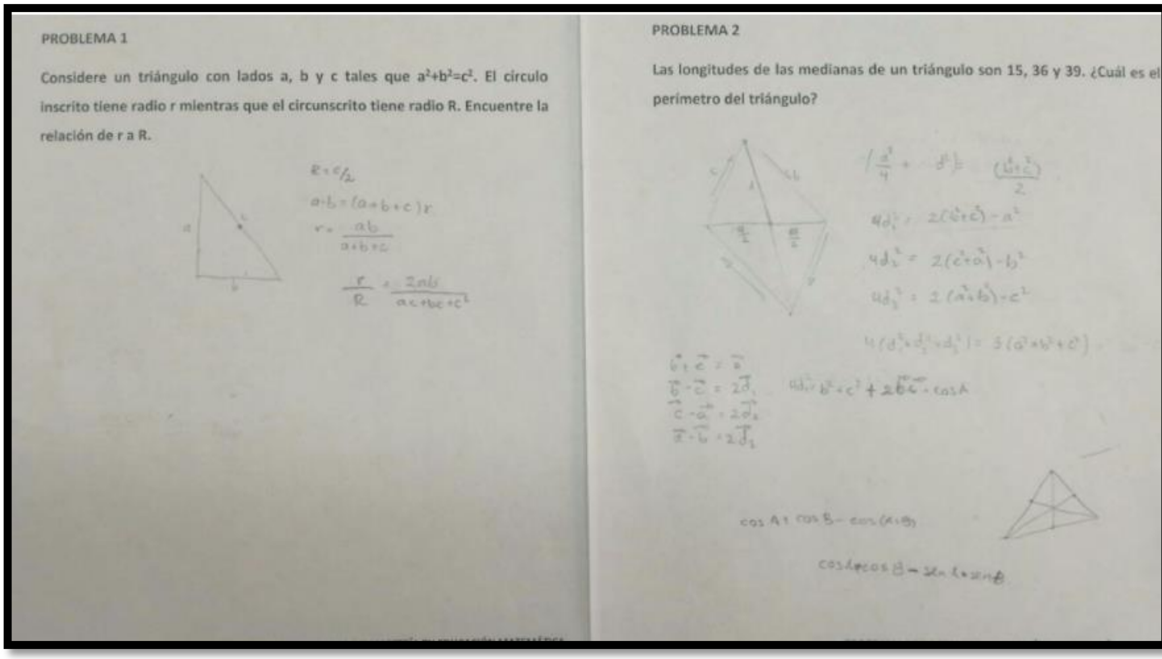


Figura 33. Trabajo realizado por estudiante 23

Sobre las construcciones auxiliares afirma que en ocasiones en los entrenamientos se aconseja realizar muy bien los trazos, pero que en otras no, que se aconseja huir de triángulos isósceles y equivalencias. “Lo mejor es trabajar con triángulos escalenos, a excepción que de antemano se verifique lo contrario”. Siempre realiza bosquejo en geometría. Señala que su motivación para realizar un problema es una cuestión de orgullo y de reto, además si no lo hace no dejaría de pensar en ello todo el día.

4.5.3 Estudiante Número 24

Como se verifica en la figura el estudiante realiza bosquejos, construye una circunferencia, el triángulo rectángulo inscrito, las cevianas correspondientes, el circuncírculo, el incentro, inradio, circunradio, la bisectriz, es decir, sus construcciones auxiliares le van guiando hacia distintas propiedades.

En complemento a lo anterior, en la entrevista el estudiante explica su proceso de resolución de los problemas. Lo primero que identifica es el teorema de Pitágoras, las propiedades del triángulo rectángulo, explica que siguió distintos caminos pero que borró varias veces al no hallar la ruta que lo ubicara, afirma que realizó “analítica”, siempre guiándose por construcciones. En la ejecución de cada uno de los problemas relaciona los conceptos básicos (mencionados) mientras los presenta, siempre mostrando intencionalidad aunque no llegó a concluir.

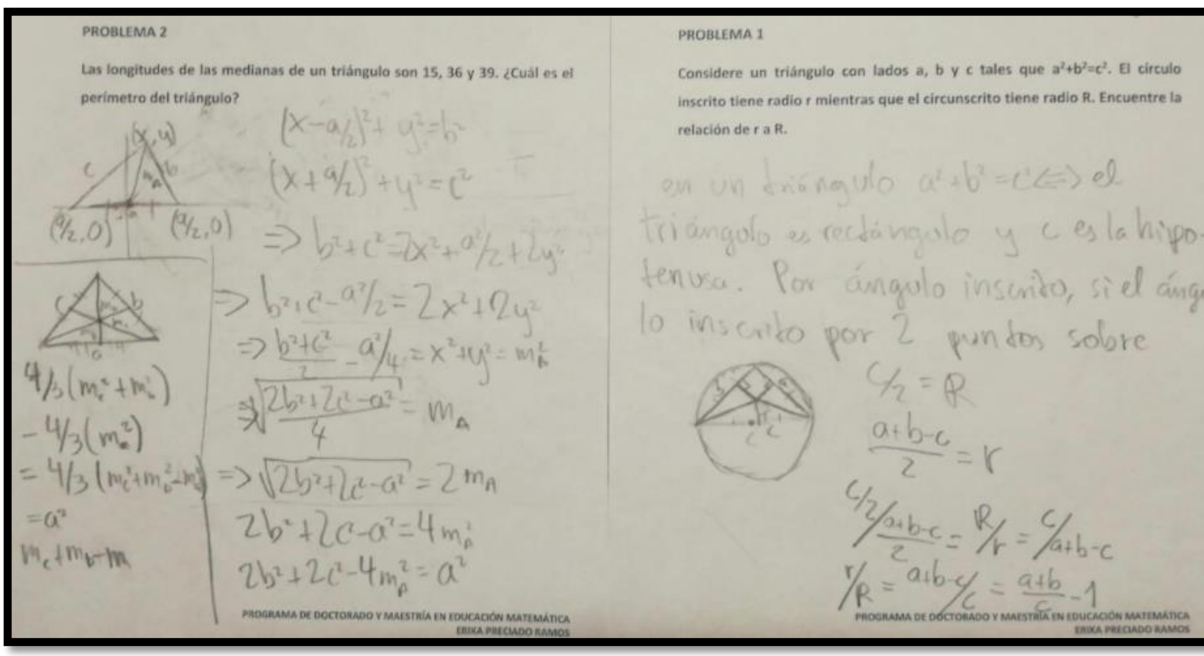


Figura 34. Trabajo realizado por estudiante 24

Sobre lo indispensable de realizar un bosquejo afirma que en la mayoría de ocasiones realiza esbozos, le parece que las construcciones con regla y compás le permiten obtener dibujos más fáciles de entender, que la desventaja de trabajar con estas herramientas es el tiempo y que la ventaja es la percepción de concíclicos o ángulos iguales. Señala que soluciona problemas porque quiere saber la respuesta (cómo hacerlo), aunque para uno de los problemas no escribe desarrollo, en la entrevista narra y describe las propiedades que identifica denotando manejo e intencionalidad. Afirma que “las construcciones auxiliares son la forma de representar el problema visualmente”.

4.5.4 Estudiante Número 25

El estudiante realizó un bosquejo y en el halló distintas propiedades del triángulo rectángulo y las líneas y puntos notables, el radio, el circuncírculo, como se observa en la figura.

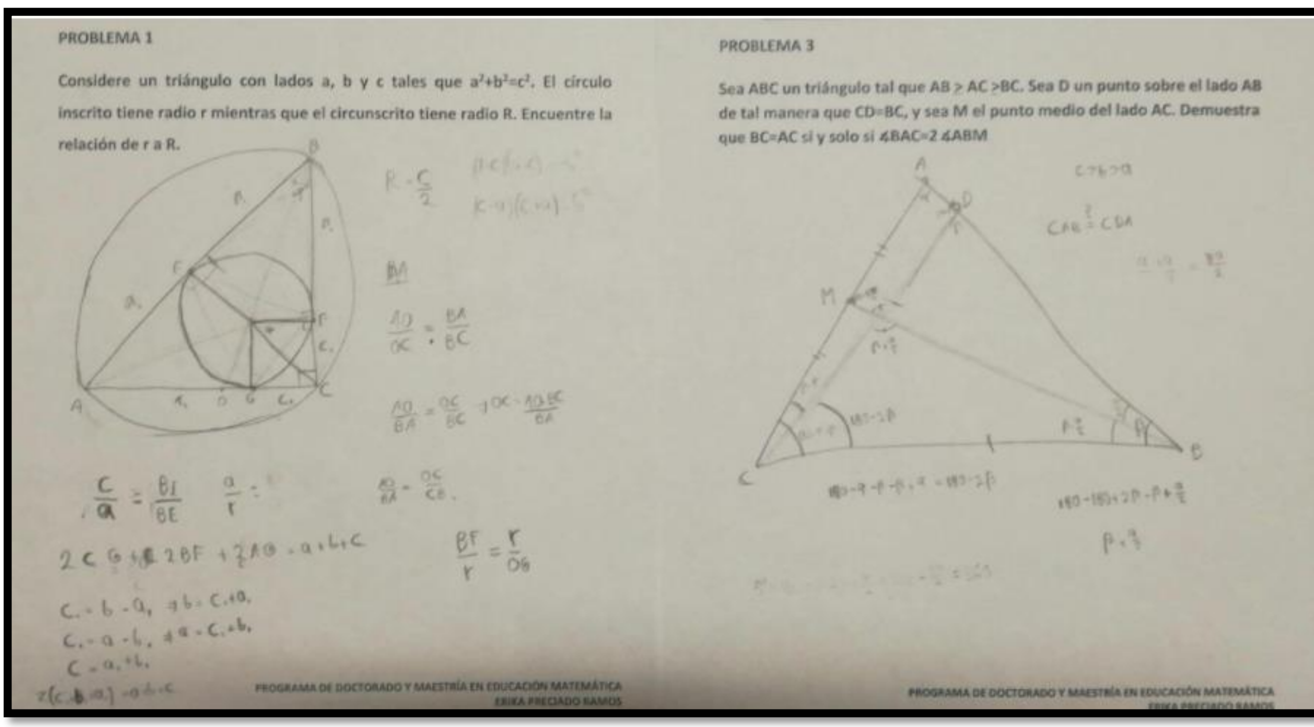


Figura 35. Trabajo realizado por estudiante 25

En la entrevista semiestructurada señala su trabajo y expresa de manera segura y fluida distintas propiedades de geometría, denota conocimientos previos y muestra clara intencionalidad llegando a diversas conclusiones, aunque no culmina uno de los problemas. Expresa que el bosquejo es “bastante importante y es lo que le da la idea principal de que uno va a hacer en el problema”. Antes de empezar a desarrollar el problema manifiesta esperar un rato observando el dibujo para luego proceder a su solución, y generalmente identifica distintos caminos de solución. Sobre el uso de regla y compás afirma que se siente más cómodo al realizar trazos a mano alzada y que le gusta hacer dibujos grandes, nota más cosas, para poder realizar más trazos. Afirma que las ventajas de usar regla y compás son que puede orientarlo más, y que el tiempo que requiere es la mayor desventaja.

Finalmente dice que resolver un problema es obtener conocimientos, saber cómo funcionan las cosas; las construcciones auxiliares son una ayuda de solución que permiten anotar mucha información. Es de resaltar que este estudiante utilizó trigonometría, abordaje diferente al de los otros estudiantes.

4.6 Resultados globales, grupo 5 – aula regular

Tal y como se mencionó en la metodología, se trabajaron cinco talleres cortos (individuales o en grupo) donde se dispusieron las condiciones para que los estudiantes a través de su imaginación llegaran a la solución o a la apropiación de un problema con la ayuda de construcciones o trazos auxiliares. En este numeral se describe lo observado, en la siguiente foto se muestra uno de los grupos trabajando.

Figura 36. Grupo de estudiantes aula regular

4.6.1 Actividad No. 1. Fiesta de disfraces

Esta actividad se creó pensando en áreas, polígonos regulares y trazos auxiliares contextualizados en un tema de interés para los jóvenes. Busca estimular la creatividad de los estudiantes utilizando el reto, la visualización, la imaginación y su destreza en la elaboración de soluciones. Una de las mayores inquietudes es el uso de la regla y el compás; se presenta el hexágono y su construcción (libro IV de Euclides), creando la posibilidad de presenciar el empleo de dichos elementos como herramientas de construcción.

Esta actividad tenía siete puntos en total y fue abordada por aproximadamente el 74% del total de los estudiantes. En la siguiente tabla se muestra en detalle el porcentaje por curso y pregunta.

Tabla 2. Participación actividad 1

Actividad 1 - Fiesta de disfraces, Anexo 10 Preguntas	605-33 Total de estudiantes que contestó y porcentaje		704-31 Total de estudiantes que contestó y porcentaje		705-36 Total de estudiantes que contestó y porcentaje		706-30 Total de estudiantes que contestó y porcentaje		Total de estudiantes en los cuatro cursos-124 Total de estudiantes que contestó y porcentaje	
Total de personas en la prueba	33		31		32		29		125	
1. Mostrar cómo sería la forma de cada uno de los seis espacios. ¿Cuál será el área de cada uno de los seis espacios?	31	94%	29	94%	32	100%	27	93%	119	95%
2. Y si sólo deja tres espacios… ¿todos pueden tener el mismo tamaño y forma?	31	94%	31	100%	31	97%	28	97%	121	97%
Y si sólo deja tres espacios…, 3. ¿Cuáles serían las áreas de cada espacio?	30	91%	19	61%	27	84%	22	76%	98	78%

Actividad 1 - Fiesta de disfraces, Anexo 10 Preguntas	605-33 Total de estudiantes que contestó y porcentaje		704-31 Total de estudiantes que contestó y porcentaje		705-36 Total de estudiantes que contestó y porcentaje		706-30 Total de estudiantes que contestó y porcentaje		Total de estudiantes en los cuatro cursos-124 Total de estudiantes que contestó y porcentaje	
4. ¿Cuántas entradas alcanza a cubrir con el material que compró?	28	85%	17	55%	28	88%	22	76%	95	76%
5. Si el área total es de $144m^{2.}$ ¿Cuánto material necesita para cada entrada?	27	82%	10	32%	22	69%	17	59%	76	61%
6. ¿Cuántos puede acondicionar?	26	79%	7	23%	24	75%	18	62%	75	60%
7. ¿Cuánta cinta de telaraña debe comprar para decorar su borde?	27	82%	8	26%	21	66%	10	34%	66	53%

Se pudo observar que aproximadamente el 48% del total de los estudiantes realizaron de manera correcta gran parte de la actividad; en general alcanzaron a trabajar de manera completa cinco de los siete puntos propuestos. Otra parte de la población, aproximadamente el 26% abordó la actividad, pero se observó predominio de aleatoriedad en sus trazos y, en algunos, réplica de las respuestas de sus compañeros.

En el primer punto se pedía a los estudiantes dividir un hexágono en seis partes de la misma forma y tamaño y determinar el área de cada una. Del 48% que lo realizó correctamente se observó que pudieron dibujar el hexágono y dividirlo de manera correcta, utilizando con alta frecuencia como instrumento la regla y en menor proporción de manera a mano alzada o también con uso de regla y compás en conjunto. Pero solamente la mitad determinó el área de cada parte, es decir, hubo más trabajo en las construcciones que en la realización de cálculos, y era claro que los estudiantes pudieron corroborar de manera visual que su procedimiento era correcto.

La solución que primó fue la de dividir el hexágono en seis triángulos congruentes, y se observaron algunas soluciones no rutinarias al dividirlo en paralelogramos, como se muestra en las figuras.

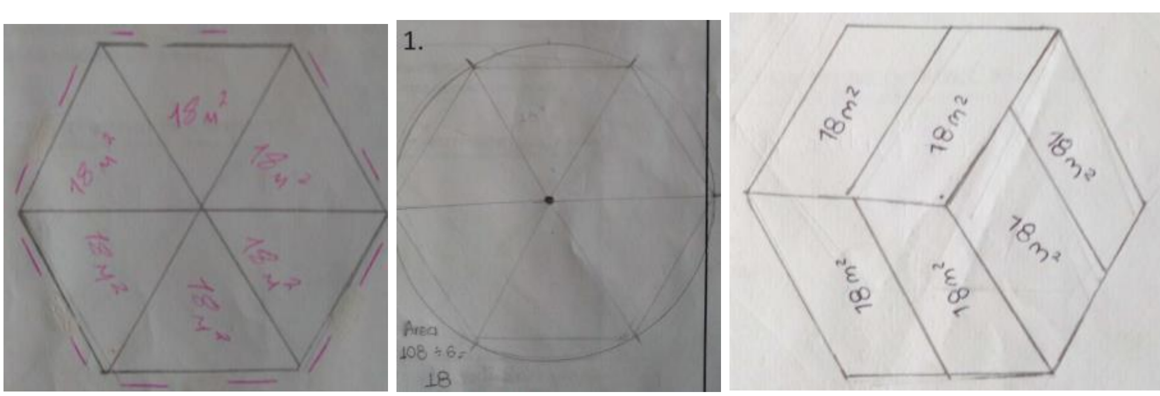


Figura 37. Ejemplo 1 trabajo realizado por estudiantes actividad 1

En el segundo y tercer punto se pedía dividir nuevamente la misma región, pero solamente en tres partes de la misma forma y tamaño. Para esto se observó que, en general, los estudiantes juntaron dos regiones consecutivas de lo realizado en el primer punto primando nuevamente el uso de trazos para dar respuesta. Se puede observar en la figura que se dividió primero en seis y luego se borraron algunos trazos para lograr solamente tres regiones.

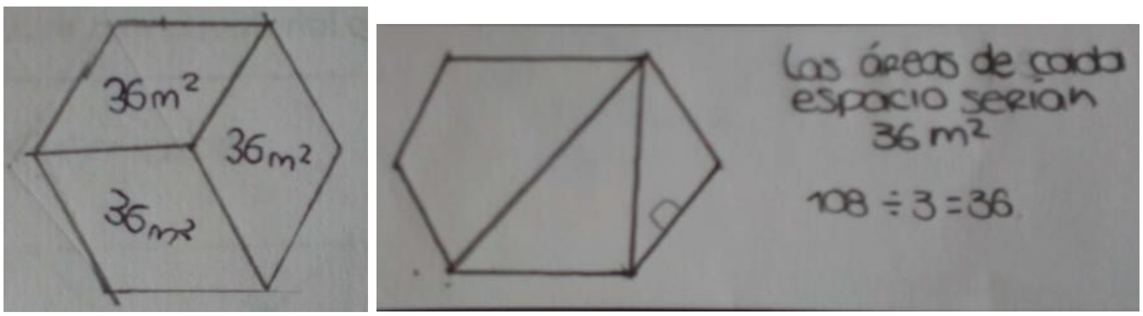


Figura 38. Ejemplo 2 trabajo realizado por estudiantes actividad 1

En este punto siguió primando el uso de construcciones auxiliares sobre la determinación numérica del área, aunque algunos estudiantes, menos del 5%, hicieron cálculos y no determinaron las regiones o lo hicieron de manera incorrecta, como se muestra en la figura anterior.

Se puede destacar que cuatro estudiantes a pesar de haber realizado la típica construcción en el primer punto, en éste, lograron construcciones no rutinarias, como se muestra en la siguiente figura.

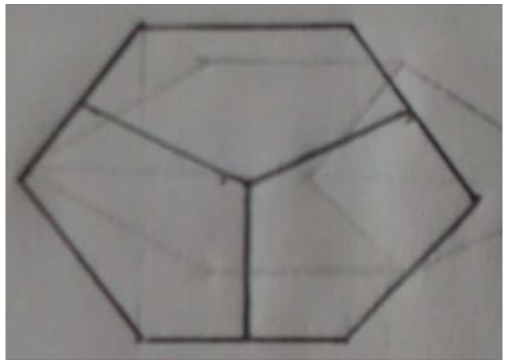


Figura 39. Ejemplo 3 trabajo realizado por estudiantes actividad 1

En el cuarto y quinto puntos se les daba una región rectangular en la cual uno de los lados del rectángulo era el doble del otro, visualmente se podían identificar y verificar que el rectángulo estaba dividido en un cuadrado y seis triángulos isósceles rectángulos congruentes y se pedía identificar el número total de regiones cuadradas (como la mostrada) que podían obtenerse y el área de cada una. Este punto fue realizado de manera correcta por el 36% del total de los estudiantes, de los cuales el 31% se limitó a dar la respuesta de manera numérica, es decir señalar que se podían formar cuatro regiones, y el 69% mostró de forma gráfica su solución, observando que dos triángulos formaban un cuadrado como se observa en las figuras.

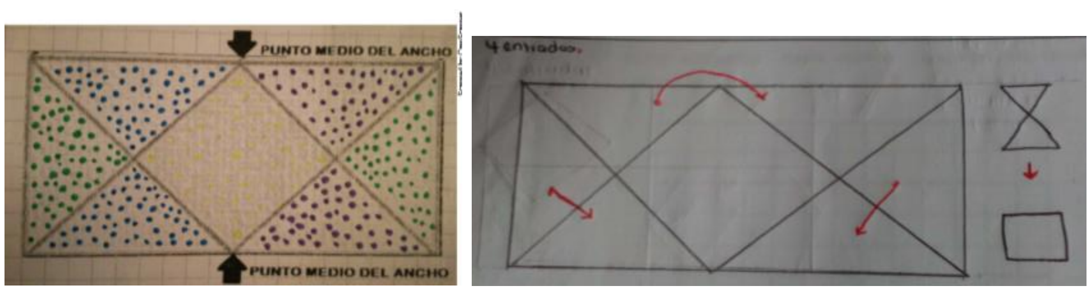


Figura 40. Ejemplo 4 trabajo realizado por estudiantes actividad 1

Finalmente en los puntos 6 y 7, se pedía a los estudiantes identificar cuadrados (uno dado) en una región rectangular, dividida de manera no homogénea en otras regiones rectangulares, y determinar cuántos cabían y el perímetro del rectángulo original. Estos no fueron abordados por la mayoría de los estudiantes; se pudo evidenciar que nuevamente el trazo de construcciones fue importante, en general, los estudiantes más que contar, hicieron los trazos como se muestra en la siguiente figura.

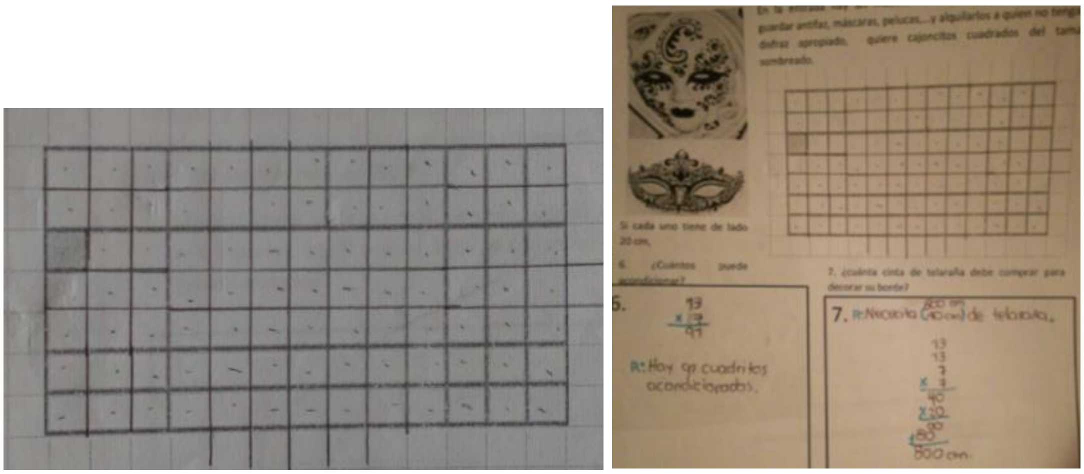


Figura 41. Ejemplo 5 trabajo realizado por estudiantes actividad 1

En conclusión en esta actividad se pudo observar que el uso de trazos auxiliares fue importante para abordar y solucionar las situaciones propuestas, tanto para quienes lo realizaron de manera adecuada, como para los estudiantes que tuvieron algunas intencionalidades pero que no lograron dividir en regiones congruentes. Fue más importante para los estudiantes trabajar en la división de las regiones para lograr las partes congruentes solicitadas en cada caso, que la realización de operaciones para determinar el área de estas regiones.

Actividad No. 2. Tapetes en Macondo

Esta actividad tenía cuatro puntos en total y fue abordada por aproximadamente el 89% del total de los estudiantes como se observa en la siguiente tabla de manera detallada.

Tabla 3. Participación Actividad 2

Actividad 2-Tapetes en Macondo- Anexo 10	605-35 Total de estudiantes que contestó y porcentaje		704-31 Total de estudiantes que contestó y porcentaje		705-36 Total de estudiantes que contestó y porcentaje		706-30 Total de estudiantes que contestó y porcentaje		Total de estudiantes en los cuatro cursos-112 Total de estudiantes que contestó y porcentaje	
Total de personas en la prueba	35		34		32		26		127	
1. ¿Qué forma tienen?	35	100%	31	91%	29	91%	26	100%	121	95%
2. ¿Cuál de ellos requiere más material? Explica tu respuesta.	35	100%	29	85%	29	91%	28	108%	121	95%
3. ¿Cuáles de ellos tienen la misma cantidad de tapete?	35	100%	28	82%	29	91%	22	85%	114	90%
4. ¿Podrías trazar otro tipo de tapete para unir	32	91%	22	65%	24	75%	22	85%	100	79%

las casas que tenga menor área? ¿Cómo sería?										

Se pudo observar interés, motivación y trabajo; sin embargo, en general resultó difícil, ya que solamente el 35% mostró soluciones adecuadas. Es importante señalar que del otro 54% gran parte estuvo interesado en la situación, pero se limitaron a trabajar en el contexto propuesto sin tener en cuenta o sin comprender las condiciones geométricas como se observa en las siguientes figuras.

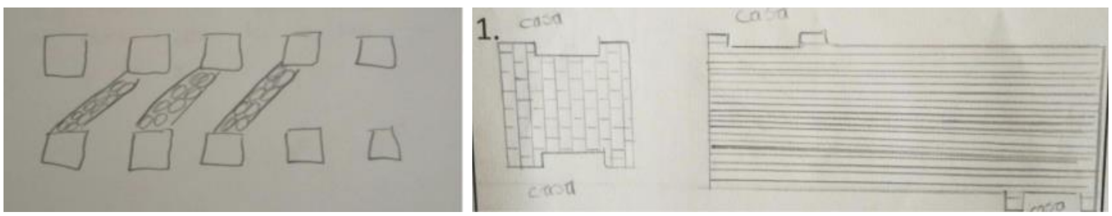


Figura 42. Ejemplo 1 trabajo realizado por estudiantes actividad 2

En el primer punto se pedía a los estudiantes dibujar tapetes para unir casas indicadas e identificar la forma que tenían, se esperaba que llegaran a un rectángulo y un paralelogramo no rectángulo (entre rectas paralelas con la misma base).

Del 35% que abordó bien este punto, mientras que se pudo observar que aproximadamente la mitad solamente dibujó un tapete que identificaron como paralelogramo. Es posible que consideran que las dos figuras resultantes debían tener la misma forma o tamaño y rechazaron el rectángulo. La otra mitad identificó de manera correcta las dos figuras. En la siguiente figura se observan algunos trabajos de los estudiantes.

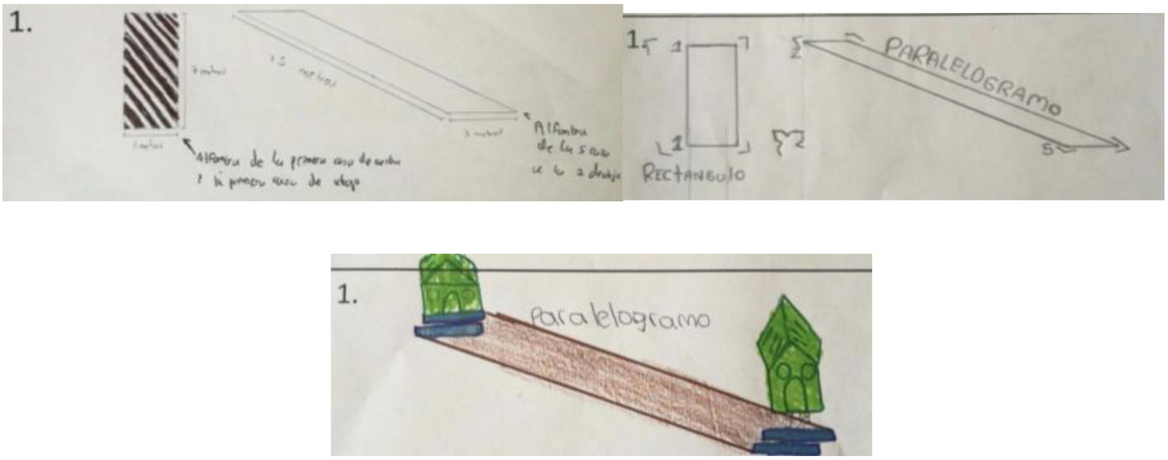


Figura 43. Ejemplo 2 trabajo realizado por estudiantes Actividad 2

En la siguiente pregunta se indagaba si se requería la misma cantidad de material para la realización de cada tapete (observe la figura original). De los estudiantes que presentaron intencionalidad en la solución de la pregunta, el 67% no consideraba que los tapetes tuviesen la misma área, como se observa en las siguientes figuras.

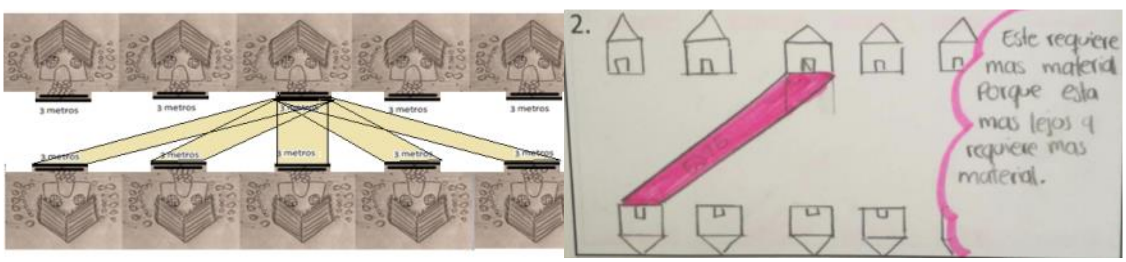


Figura 44. Ejemplo 3 trabajo realizado por estudiantes actividad 2

El otro 33% considera que son iguales pero las justificaciones no son todas geométricamente claras.

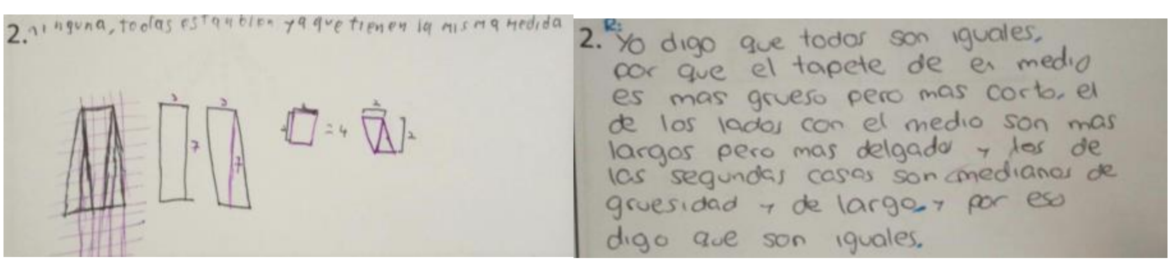


Figura 45. Ejemplo 4 trabajo realizado por estudiantes Actividad 2

En la pregunta 3 se cuestionaba si todos los tapetes tenían la misma cantidad de material. El número de estudiantes que la respondieron se mantuvo constante; los estudiantes perciben por simetría que hay grupos de tapetes que son semejantes, obsérvese las figuras.

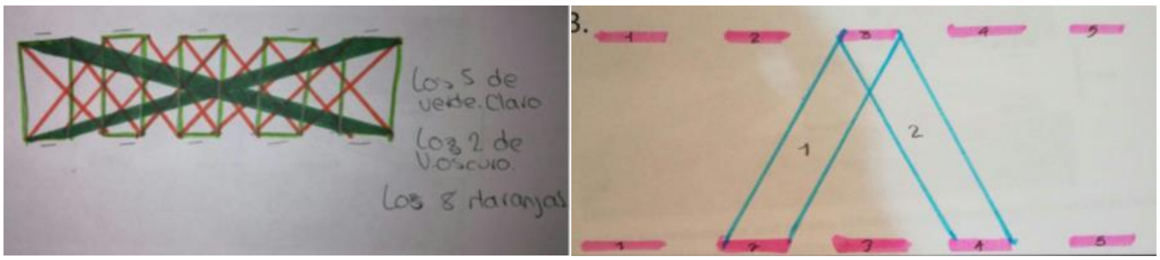


Figura 46. Ejemplo 5 trabajo realizado por estudiantes Actividad 2

En la pregunta 4 se indaga sobre la posibilidad de construir un tapete con menor cantidad de material; los estudiantes pudieron deducir, a través de sus bosquejos que no era factible. En cierto modo, aunque no conocen teóricamente esta proposición de Euclides, a través de sus trazos, pueden comprenderla.

En conclusión, en esta actividad se evidencia que los estudiantes desean pensar y abordar problemas y que los trazos les ayudan a establecer y verificar sus ideas. El uso de trazos auxiliares fue importante para dar respuesta a las situaciones propuestas. Es notorio verificar la intencionalidad de dar respuesta a los problemas, pero pudo generar ambigüedad el contexto en el que se plantearon, lo cual pudo repercutir en que algunas soluciones no fueran adecuadas. Para una parte importante de los estudiantes fue más importante trabajar en el contexto que en los trazos geométricos.

En la socialización posterior de esta actividad algunos estudiantes concluyeron que todos los tapetes eran iguales y realizaron trazos en triángulos para argumentarlo, es decir, aunque inicialmente no lograron visualizar que el área de dos paralelogramos de la misma base y entre rectas paralelas es la misma, después a través del uso de trazos auxiliares pudieron hacerlo.

4.6.3 Actividad No. 3. Triángulos equiláteros

Esta actividad tenía solamente dos puntos y se buscaba que los estudiantes construyeran e identificaran triángulos equiláteros; la actividad se proponía usando las ideas de Euclides. En total fue abordada por aproximadamente el 88% del total de los estudiantes como se muestra en la tabla de manera detallada.

Tabla 4. Participación Actividad 3

ACTIVIDAD 3- TRIÁNGULO EQUILÁTERO	605-35 Total de estudiantes que contestó y porcentaje	704-31 Total de estudiantes que contestó y porcentaje	705-36 Total de estudiantes que contestó y porcentaje	706-30 Total de estudiantes que contestó y porcentaje	Total de estudiantes en los cuatro cursos-112 Total de estudiantes que contestó y porcentaje

Total de personas en la prueba	34		32		35		29		130	
1. ¿Podrías trazar dos triángulos equiláteros en el dibujo?	34	100%	31	97%	33	94%	25	86%	123	95%
2. ¿Por qué sabes que tus triángulos son realmente equiláteros?	28	82%	29	91%	23	66%	25	86%	105	81%

Se pudo observar que el primer punto de esta actividad resultó más fácil que los anteriores, el 73% del total de los estudiantes que la presentaron, pudieron realizar correctamente el trazo de dos triángulos equiláteros, tomando como uno de los lados el segmento dado AB, que es uno de los radios, y trazando los otros dos radios. En general lo hicieron sobre el dibujo dado, pero en pocos casos hicieron la construcción completa. El otro 27% de los estudiantes simplemente se limitó a mencionar la definición de triángulo equilátero o a realizar trazos sin intencionalidad claramente definida.

En el segundo punto, al preguntar que por qué estaban seguros que sus triángulos eran equiláteros, solamente el 30% de los que realizaron la construcción pudieron argumentar de manera correcta, señalando el radio de las circunferencias como referente del lado, como se observa en las siguientes figuras.

Como conclusión se puede señalar que los estudiantes pueden a través de la visualización construir triángulos equiláteros, lo cual muestra que tienen conocimientos sobre esta propiedad de los triángulos, pero que su nivel de argumentación requiere ser mucho más trabajada.

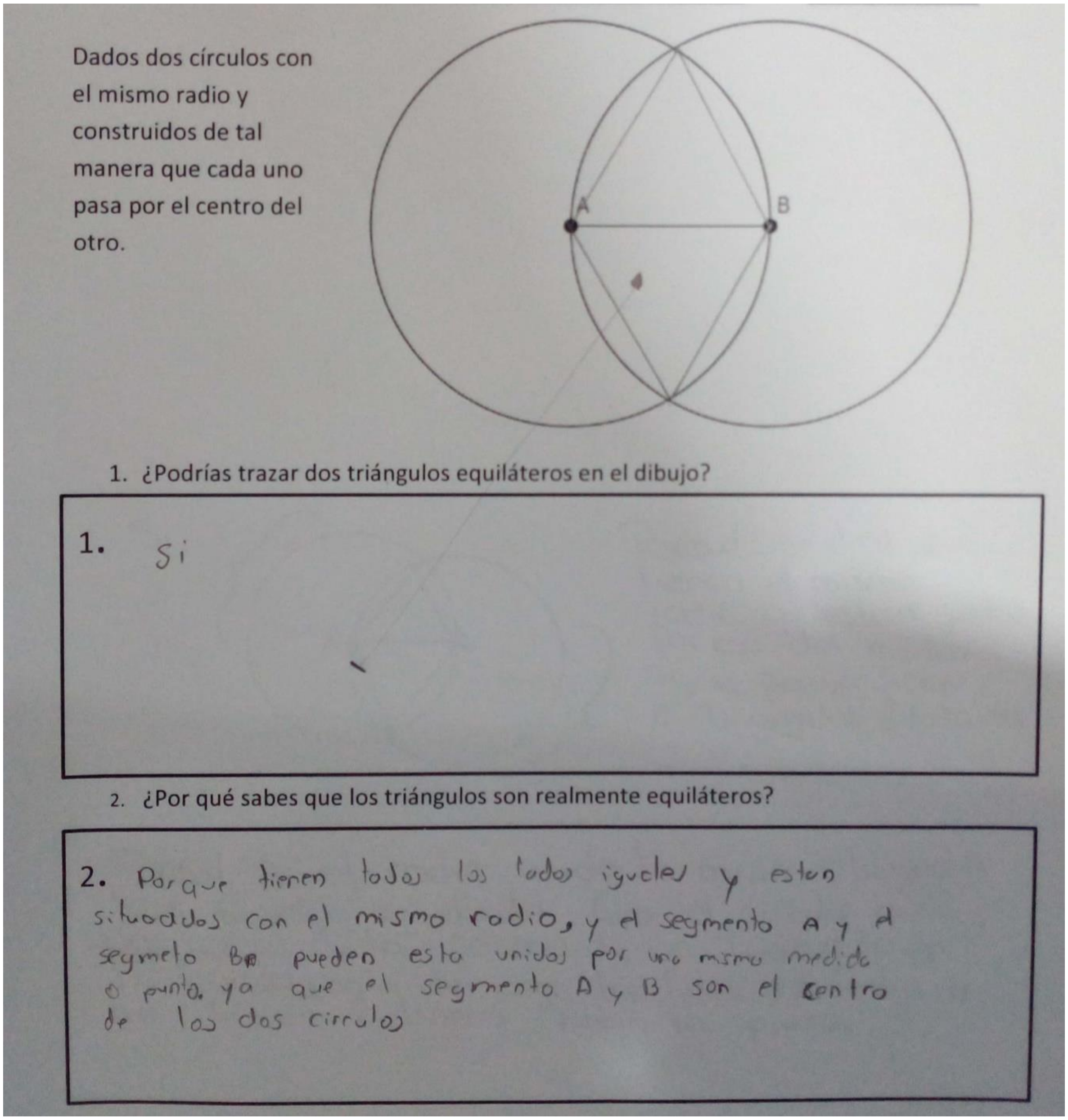


Figura 47. Ejemplo 1 trabajo realizado por estudiantes Actividad 3

4.6.4 Actividad No. 4. Círculo, triángulos, cuadrados y rectángulos ¿todos son iguales?

En esta actividad se buscaba que los estudiantes pudieran construir un círculo, un triángulo, un cuadrado y un rectángulo con condiciones sobre algunas de sus medidas, y que luego compararan con sus compañeros y se dieran cuenta que dichas condiciones implicaban que todas las figuras tenían igual forma y tamaño, excepto en el caso del triángulo. Para el triángulo se daba la medida de dos lados, por lo cual eran posibles infinitas soluciones y la condición para congruencia estaba dada por la cuarta proposición del primer libro de Euclides, se buscaba explorar si los estudiantes podían dar argumentos al respecto.

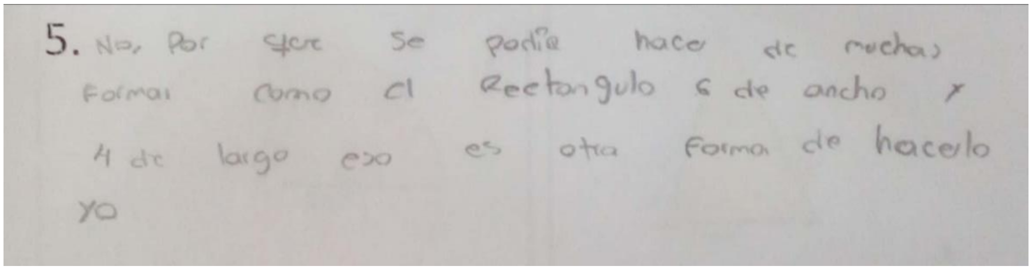
Esta actividad fue abordada por aproximadamente el 93% de los estudiantes, en la siguiente tabla se observa en detalle el porcentaje de abordaje en cada una.

Tabla 5. Participación Actividad 4

Actividad 4-CIRCULOS, TRIANGULOS, CUADRADOS, RECTANGULOS SON TODOS IGUALES	605-35 Total de estudiantes que contestó y porcentaje	704-31 Total de estudiantes que contestó y porcentaje	705-36 Total de estudiantes que contestó y porcentaje	706-30 Total de estudiantes que contestó y porcentaje	Total de estudiantes en los cuatro cursos-112 Total de estudiantes que contestó y porcentaje

Total de personas en la prueba	34		34		35		29		132	
1.CÍRCULO	32	94%	34	100%	35	100%	27	93%	128	97%
2. TRIANGULO	34	100%	34	100%	34	97%	26	90%	128	97%
3.CUADRADO	34	100%	34	100%	34	97%	26	90%	128	97%
4. RECTANGULO	33	97%	34	100%	34	97%	26	90%	127	96%
5.SON IGUALES	23	68%	33	97%	31	89%	22	76%	109	83%

El 81% del total de los estudiantes que presentó la actividad logró trazar las figuras solicitadas, para lo cual usaron regla y compás. En el otro 19% se pudo observar intencionalidad para realizar las construcciones solicitadas pero se evidenciaron dificultades con la medición de segmentos. Por ejemplo, algunos estudiantes miden desde 1cm y no desde 0cm, y unos pocos tienen dificultad con la identificación de figuras. (Por ejemplo, dibujan una figura cualquiera con cuatro lados como rectángulo.) Al indagar si las figuras dibujadas eran iguales a las de sus compañeros, aproximadamente el 50% de los que realizaron bien los trazos, pudieron darse cuenta que en el caso del triángulo podía haber muchas soluciones que cumplían la condición solicitada. Otro 20% aproximadamente consideró que la posición de las figuras indicaba diferencia, por ejemplo, afirman que un rectángulo de 6cm x 4cm es diferente a uno de 4cm x 6cm. En este caso no se pidió a los estudiantes argumentar, solamente se esperaba que mediante procesos de visualización pudieran observar y dar respuesta. En la siguiente figura se muestran algunas de las respuestas de los estudiantes.



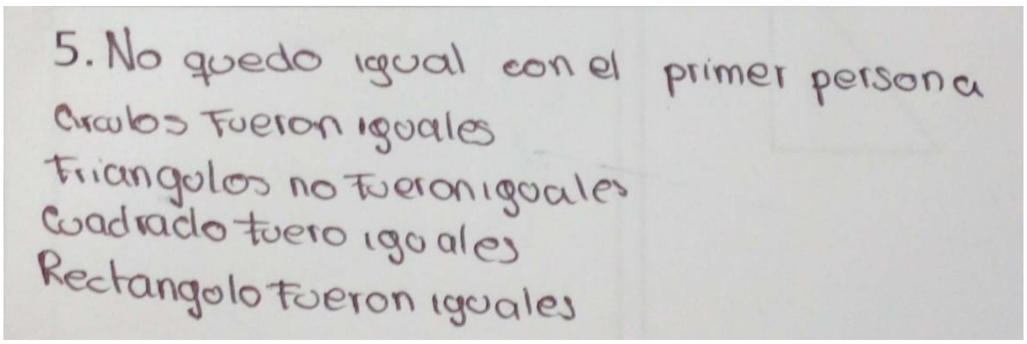


Figura 48. Ejemplo 1 trabajo realizado por estudiantes Actividad 4

En conclusión, en esta actividad se puede observar nuevamente la importancia de la visualización para avanzar en procesos de reconocimiento de propiedades de figuras, como en ese caso de congruencia de figuras planas, así como la necesidad de avanzar en el desarrollo de procesos de argumentación, para lo cual se requiere mayor conceptualización.

4.6.5 Actividad No. 5 Infinitas cometas

Esta actividad solamente tenía dos puntos, se buscaba que los estudiantes pudieran observar que usando simetría era posible construir infinitas cometas con las condiciones dadas. Se les presentaba un triángulo inscrito en una semicircunferencia y se les proponía hacer el simétrico para formar una cometa. Esta actividad fue abordada por el 93% del total de los estudiantes, como se observa en la tabla.

Tabla 6. Participación Actividad 5

Actividad 5- INFINITAS COMETAS	**605-35 Total de estudiantes que contestó y porcentaje**		**704-31 Total de estudiantes que contestó y porcentaje**		**705-36 Total de estudiantes que contestó y porcentaje**		**706-30 Total de estudiantes que contestó y porcentaje**		**Total de estudiantes en los cuatro cursos-112 Total de estudiantes que contestó y porcentaje**	
Total de personas en la prueba	33		34		34		29		130	
1. ¿Tendría una cometa de nuevo?	33	100%	34	100%	34	100%	25	86%	126	97%
2. ¿Cuántas cometas diferentes se pueden hacer?	32	97%	28	82%	34	100%	22	76%	116	89%

En esta actividad el 67% de los estudiantes logró resolver de manera completa y bien los dos puntos. Se puede ver que se logró comprensión en el método de replicar por simetrías una figura dada, en este caso un triángulo. De estos estudiantes aproximadamente la mitad, a través de la realización de trazos repetitivos, infiere que se pueden hacer tantas cometas como uno quiera. Se observa nuevamente la importancia de la visualización, en este caso incluso para llegar a conjeturas. De los estudiantes que no lograron hacer bien la actividad se infiere que no hubo intencionalidad en las construcciones, realizando trazos variados en las figuras dadas sin relación con lo solicitado.

En las siguientes figuras se observan algunas de las respuestas de los estudiantes.

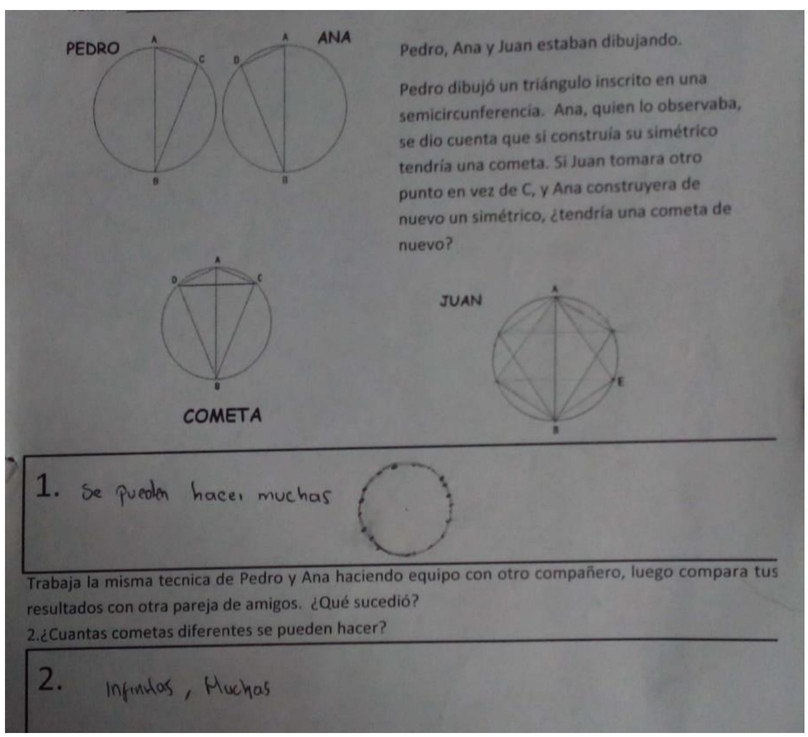


Figura 49. Ejemplo 1 trabajo realizado por estudiantes Actividad 5

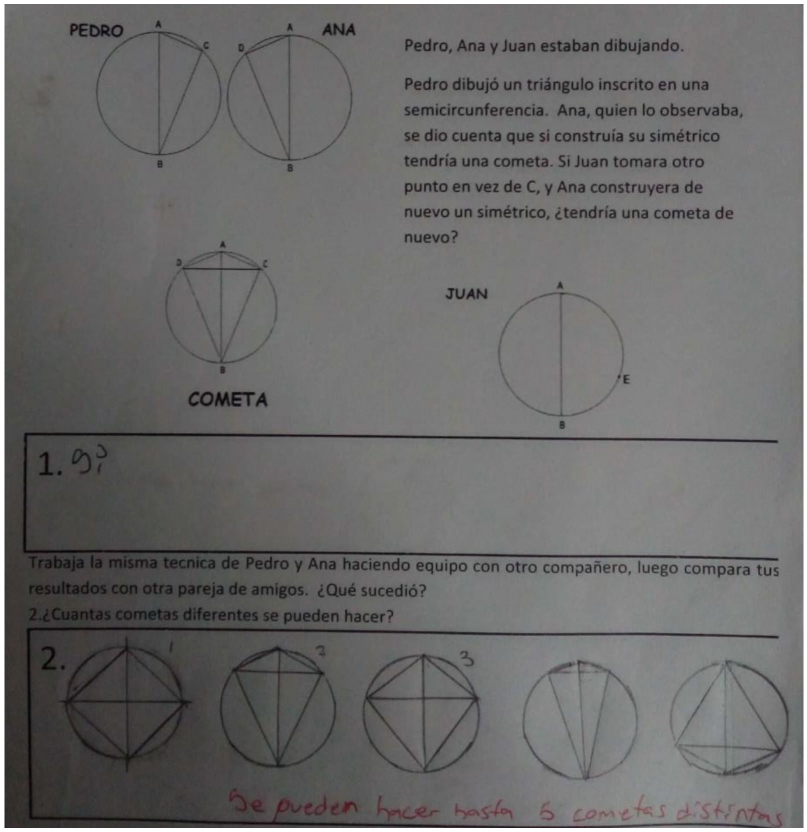


Figura 50. Ejemplo 2 trabajo realizado por estudiantes Actividad 5

Conclusiones del capítulo 4

Este capítulo indagó acerca del pensamiento geométrico y del pensamiento visual de los participantes en la investigación, permitiendo hacer distinciones sobre los escenarios y sobre las herramientas e instrumentos usados, al igual que acceder a diversas construcciones y bosquejos que los muchachos tradujeron en ideas y razonamientos teóricos.

Cabe mencionar que esta observación se reafirmó con las herramientas metodológicas utilizadas… actividades, pruebas y fundamentalmente entrevistas.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo de investigación sobre Las Construcciones Auxiliares en la Resolución de Problemas Geométricos se evidenciaron distintas potencilalidades y aspectos a analizar acordes con el objetivo propuesto en relación con aportar a la caracterización del pensamiento geométrico de estudiantes de olimpiadas y de un aula común, mediante el reconocimiento de la capacidad de análisis y visualización geométrica, al observar sus destrezas y dinámicas cuando utilizan construcciones auxiliares en la solución de problemas geométricos. Los resultados permiten llegar a conclusiones destacables.

1. Resultó gratificante el corroborar que luego de 2340 años la geometría euclidea sigue renaciendo, tanto los jóvenes integrantes de las olimpiadas como los de aula regular resolvieron problemas al estilo Euclides (quien demostraba operando sobre figuras), trazando, abstrayendo y construyendo. Cada trazo es una operación en un problema geométrico, donde las herramientas y la intuición proveen un ambiente idóneo para explorar y conjeturar, no sólo postulados sino proposiciones euclideas.
2. Con las actividades desarrolladas se pone en evidencia la importancia de permitir a los estudiantes discernir, pensar, jugar, saborear un problema, identificarse como un individuo totalmente independiente, pero capaz de compartir conjeturas con otros.
3. El tratamiento de actividades a partir de la visualización de construcciones auxiliares, identificación de elementos y un proceso de análisis acompañado de verificación visual mostró una orientación al fortalecimiento de los

pensamientos geométrico y visual, dotando con este último de destreza y memoria cada nuevo proceso.

4. David Tall (2012) en su libro How Humans Learn to Think Mathematically afirma que existen tres mundos, un mundo de “encarnación” (conceptual) que se construye sobre las percepciones y acciones humanas, un mundo de simbolismo (operativo) que se desarrolla a partir de acciones humanas “encarnadas” (hechas realidad observable) y un mundo de formalismo (axiomático) que construye el conocimiento formal en sistemas axiomáticos. Lo que se reafirma al leer a Tall es una diferenciación que él hace entre la abstracción estructural (a partir de “objetos”), la abstracción operativa (a partir de las acciones del sujeto que conoce) y la abstracción formal. En la primera ubica el pensamiento geométrico, en la segunda el pensamiento algebraico - aritmético y de medición, y en la tercera, las teorías axiomáticas o lógico-deductivas y la demostración basadas en la teoría de conjuntos. En estricto contraste con la propuesta de Tall, las actividades desarrolladas y los resultados evidenciados conllevan la conclusión que en el pensamiento geométrico también existe la abstracción operativa y los principios o primeros pasos hacia la abstracción formal. En esta investigación se observa, en particular, en el contexto de construcción de conceptos, que los jóvenes construyen un objeto de pensamiento desde los objetos geométricos y por medio de las construcciones auxiliares y contemplación de propiedades, permiten un acercamiento a conceptos enteramente posibles para el pensamiento. Por otro lado, se verifica que el pensamiento geométrico incluye

operar sobre figuras, transformar figuras, y que ello se arraiga en una interacción mutua entre el pensamiento visual y el pensamiento geométrico.

5. La importancia para la caracterizacion del pensamiento geometrico y el pensamiento visual en el planteamiento de actividades reto para cualquier estudiante, que lo introduzca en el nivel adecuado donde su destreza y persistencia lo motiven a enfrentar problemas con intencionalidad y certeza, fue motivador para cada una de las actividades.
6. Al enfrentar un problema reto la orientacion inicial es la intuicion y la afluencia de conceptos que el cerebro empieza a hilar en desarrollos estructurados, indispensables en la gran mayoría de problemas.

Las siguientes conclusiones son frases cortas, no menos importantes que las anteriores, que surgieron en el transcurso de las entrevistas a los estudiantes, que dan soporte a las conclusiones anteriores y que a la autora de esta investigacion le hicieron cambiar puntos de vista ya anidados y percibir a futuro creacion de nuevas dinamicas de enseñanza.

- ✓ Un bosquejo básico está determinado por el planteamiento correcto del problema.
- ✓ En ocasiones un bosquejo no logra proveer la solución, pero sí permite conjeturar y puede llegar a simplificar el problema.
- ✓ Las construcciones auxiliares facilitan la recordación de principios y teoremas básicos de geometría.
- ✓ Las construcciones auxiliares dan seguridad al establecer conjeturas.
- ✓ Crear bosquejos previene la confusión al enfrentarse a un problema.

- ✓ Las proyecciones y la construcción de nuevos triángulos o figuras especiales son una herramienta frecuente en la solución de problemas.
- ✓ Nuevos trazos reafirman datos ya conocidos.
- ✓ El trabajar con regla y compas genera buenos resultados, pero no es indispensable para conjeturar.
- ✓ Trabajar con medidas exactas hace en muchas ocasiones perder la sensación de generalidad y abstracción.
- ✓ Los problemas retadores sobreponen la interpretación y el análisis sobre las medidas exactas.
- ✓ A menos que la solución sea obvia, un problema de geometría requiere construcciones.
- ✓ En un bosquejo con ayuda de simbología se puede leer mucha información.
- ✓ No se debe depender de instrumentos de dibujo para resolver problemas geométricos.
- ✓ En general las construcciones con regla y compás permiten obtener dibujos más fáciles de entender.
- ✓ Un problema plantea la necesidad de saber la respuesta (y por la naturaleza humana, quedar con inquietud es desagradable).
- ✓ Las construcciones auxiliares son la forma de representar el problema visualmente.
- ✓ Sobre el bosquejo es “bastante importante y es lo que le da la idea principal de que uno va a hacer en el problema”.
- ✓ Las construcciones auxiliares son una ayuda de solución, permiten anotar mucha información.

- ✓ Para pruebas de alto nivel es indispensable realizar bosquejos.
- ✓ Las construcciones auxiliares bien realizadas propenden a que el problema fluya naturalmente.
- ✓ El no tomar el tiempo para observar hace que se tomen caminos mas lagos y complicados.
- ✓ El problema se prueba para todo tipo de dibujo, no se necesitan dibujos de medidas exactas.
- ✓ Las construcciones auxiliares, son esenciales no sólo por el propio entendimiento sino por el de las personas que pueden leer un desarrollo.
- ✓ El uso de regla y compas puede generar cercanía con el problema, aunque se pueden asumir cosas que no son verdad.
- ✓ Las ideas de hacer más trazos surgen de la creatividad y la imaginación.

RECOMENDACIONES

Luego de la implementacion de las actividades, el acompañamiento a los diversos grupos de estudiantes y la verificacion de los resultados, la autora de este documento recomienda:

Desde las aulas y las actividades

- ✓ Crear nuevas aulas - donde la entrada implique una invitacion abierta a pensar, construir, trazar, comparar, analizar, disfrutar y concluir problemas geometricos.
- ✓ Aumentar el uso de problemas reto en el aula, a através de los cuales se logra motivar a los estudiantes, y en el caso específico de las olimpiadas fomenta además nuevos matemáticos, pero sobre todo, nuevos ciudadanos, dotados de la posibilidad de pensar y crear.
- ✓ Implementar actividades que permitan crear y visualizar postulados, propiedades y procederes de Euclides, enfocándolas desde un recurso didáctico y los dos tipos de pensamiento, el geometrico y el visual.
- ✓ Motivar a los estudiantes por el estudio y aprendizaje de la geometría, hacia las construcciones auxiliares, hacia la fascinación del trabajo con herramientas, y hacia la habilidad de no quedarse con preguntas. Especialmente es importante valorar y nutrir las potencialidades de todos los jóvenes.
- ✓ Intentar que su trabajo sea deleite para sus estudiantes tanto como sea para usted su creacion ambiosa y responsable.

Desde los resultados, análisis y conclusiones

- ✓ Realizar nuevas investigaciones que permiten vislumbrar interacciones y tejer nexos entre el pensamiento geométrico y el pensamiento visual.
- ✓ Seguir estructurando investigaciones que permiten construir una base firme para reorientar la forma en que se aprende geometría en la escuela y las finalidades que se buscan con ese aprendizaje.

REFERENCIAS

Arcavi, A. Educational Studies in Mathematics (2003) 52: 215. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077.

Bell, E (1965). Men of Mathematics: The Lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré. N.Y. Simon & Schuster. 1965.

Bell, F. 1978. Teaching and learning Mathematics (in secondary schools).

Bogomolny, A. Geometric construction with the compass alone *from Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/compass.shtml*#, consultado el 02 de noviembre de 2017.

Camargo, L. (2010). Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria. Disertación doctoral. España: Universidad de Valencia.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). Funciones: Visualización y pensamiento matemático. México: Prentice Hall.

Chang, HY. & Tzeng, (2017). Investigating Taiwanese Students' Visualization Competence of Matter at the Particulate Level. *International Journal of Science and Mathematics Education*. Pp. 1-20. doi.10.1007/s10763-017-9834-2.

Clark, P. (2005). The emergence of a classroom community of practice in a mathematical structures course. Doctoral Dissertation. Department of Philosophy, Arizona State University.

De Guzmán, M. (1996). El rincón de la pizarra. Pirámide, Madrid.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Cali (Colombia): Universidad del Valle.

Falk, M. (1980). *La enseñanza a través de problemas*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Forman, E. (1996). Learning mathematics as participation in classroom practice: implications of sociocultural theory for educational reform. En L, Steffe; P, Nesher; P, Coob; G, Goldin; B, Greer (Eds.), Theories of Mathematical Learning (pp. 115 - 130). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Gal, H. & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. Educational Studies in Mathematics, vol. 74 (2), pp. 163-183.

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a Classroom community of inquiry. Journal for Research in Mathematics Education, 35(4), 258 – 291.

Halmos, P. (1980). The heart of mathematics, American Mathematical Monthly 87, 519– 524

Harel G., Stylianides A.J., Boero P., Miyazaki M., Reid D. (2017) Topic Study Group No. 18: Reasoning and Proof in Mathematics Education. In: Kaiser G. (eds)

Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education. ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Hoffer, A. (1977). Mathematics Resource Project. Geometry and visualization. USA: Creative Publications: Palo Alto.

Kašuba R. (2017). From the Lifetime Experience of a Seasoned Math Educator—Thoughts, Hopes, Views and Impressions. In: Soifer A. (eds) Competitions for Young Mathematicians. ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Krulik, S., & Rudnik, J. (1980). *Problem solving: a handbook for teachers.*Boston: Allyn and Bacon .

Kunkel, P. What is a construction?

http://whistleralley.com/construction/reference.htm Recuperado el 5 de octubre de 2017.

Natsheh, I., & Karsenty, R. (2014). Exploring the potential role of visual reasoning tasks among inexperienced solvers. ZDM - *The International Journal on Mathematics Education*, 46(1) doi:10.1007/s11858-013-0551-1

Nieto, J. (2014). Combinatoria para Olimpiadas Matemáticas. Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas.

Pérez, F. (2004). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño

Pérez (2011). Diseño, aplicación y evaluación de un sistema de actividades para la construcción de significado del concepto de área, en una comunidad de práctica para sexto grado.

Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education (pp.210-213). UK: Sense Publishers.

Rogoff, B. (1997). Los tres planos de la actividad sociocultural: apropiación participativa, participación guiada y aprendizaje. En Wertsch, J.V., del Río, P. y Álvarez, A. (Eds), La mente sociocultural. Aproximaciones teóricas y aplicadas (pp. 111 – 128). Madrid: Fundación Infancia y Aprendizaje.

Sampieri, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. Sexta edición. México. Mac Graw Hill.

Semanišinová I., Harminc M., Jesenská M. (2017). Competition Aims to Develop Flexibility in the Classroom. In: Soifer A. (eds) Competitions for Young Mathematicians. ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Tall, D. (2013). How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics. Cambridge: Harvard University Press

Wenger, E. (1998). Comminities of practice. Learning, meaming and identity. Cambridge, Cambridge University.

Wenger, E. (2001). Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad. Barcelona, Paidós. Traducción de Genis Sánchez Barberán.

Wenger, E., McDermott, R., & Snyder, W. M. (2002). Cultivating communities of practice: A guide to managing knowledge. Boston, MA: Harvard Business School Press.

Wheatley, G., Brown, D. and Solano, A.: 1994, ‘Long term relationship between spatial ability and mathematical knowledge’, Proceedings of the Sixteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Baton Rouge, LA.

Zawaira, A., y Hitchcock, G., (2009). *A Primer for Mathematics Competitions*. United States. Oxford University Press Inc., New York.

Zimmerman, W., y S. Cunningham (eds.) (1991), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, Estados Unidos, The Mathematical Association of America (Notes 19).

Anexo 1. Consentimiento informado de participantes del entrenamiento de las olimpiadas matemáticas, junio de 2017

OLIMPIADAS COLOMBIANAS DE MATEMÁTICAS

CONSENTIMIENTO INFORMADO DE PARTICIPANTES DEL ENTRENAMIENTO DE LAS OLIMPIADASMATEMATICAS, JUNIO DE 2017 COMO PARTICIPANTES DE LA INVESTIGACIÓN SOBRE CONSTRUCCIONES AUXILIARES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

UAN UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Yo ____ identificado con el documento de identidad_________________, adulto responsable en Bogotá del menor de edad____, participante del entrenamiento de las Olimpiadas en Matemáticas de primer nivel de la Universidad Antonio Nariño, identificado con el documento de identidad_________________, acepto que él participe voluntariamente en el estudio —**LAS CONSTRUCCIONES AUXILIARES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS** conducido por Erika Preciado Ramos. Me han informado que uno de los objetivos generales del estudio es —Observar y caracterizar la destreza del menor en las construcciones auxiliares. También me han informado que su participación es voluntaria y no implica ningún tipo de valoración en las pruebas de olimpiadas. Su colaboración radica responder algunos instrumentos y entrevistas que tomarán aproximadamente 30 minutos. Entiendo que la información que se recoja será confidencial y no se usará para ningún otro propósito fuera de los de esta investigación. He sido informado que en cualquier momento de la investigación puedo hacer preguntas y que el menor puede retirarse si es su deseo sin que ello le perjudique en ninguna forma. Entiendo que puedo pedir información sobre los resultados de este estudio cuando éste haya concluido. Para esto, puedo contactar a Erika Preciado Ramos a través del correo epreciado@uan.edu.co. En constancia firmo a los ____ días del mes de ________________ de 2017.

Anexo 2. Entrevista semiestructurada enfocada en la investigación sobre construcciones auxiliares en la resolución de problemas geométricos

ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA

Con base en las soluciones planteadas para los problemas propuestos, a través de la entrevista se busca indagar sobre interrelaciones entre el pensamiento visual y el geométrico:

i) estrategias usadas por los estudiantes para realizar trazos auxiliares y sus justificaciones para hacerlas

ii) criterios (justificaciones) de los estudiantes al realizar trazos con regla y compas o a mano alzada.

I. SI EL ESTUDIANTE REALIZO CONSTRUCCIONES AUXILIARES

Se identifica si el estudiante realizó construcciones auxiliares, y se le pregunta:

a) Sobre las ideas o conocimientos que tuviste en cuenta para hacerlas ¿qué información te brinda? ¿cómo ese trazo te permite llegar o estar más cerca de la solución?
b) Si en la solución presentada no es muy claro el uso de la construcción auxiliar realizada, se le pide que explique cómo la usó para avanzar en su solución.
c) Por las herramientas usadas si es a mano alzada o con regla y compás, ¿por qué usar o no herramientas? ¿cómo estás seguro del trazo realizado? ¿qué ventajas o desventajas tiene el uso de instrumentos? ¿qué tan frecuente es el uso de instrumentos?

d) Cuando resuelve este tipo de problemas, ¿qué tan frecuente es que hagas construcciones auxiliares? ¿Son importantes?, ¿por qué?

e) ¿Hay casos en que las construcciones auxiliares te pueden llevar a pensar que algo es cierto cuando no lo es? ¿Te ha sucedido? ~~¿~~Si respondiste sí, ¿qué tipo de bosquejo usaste?

II. SI EL ESTUDIANTE NO REALIZO CONSTRUCCIONES AUXILIARES

Se identifica si el estudiante no realizo construcciones auxiliares. Con base en ello:

i. Si el estudiante llegó a la solución del problema

Se indaga qué herramientas o conocimientos utilizó para solucionar el problema (es posible que haya realizado trazos mentalmente, se buscará que los señale y justifique).

ii. Si el estudiante no llegó a la solución del problema

Se indaga por las dificultades del problema propuesto. ¿No recordaba algunos conceptos? ¿Propiedades? ¿Qué se imaginó? ¿Por qué no intentó alguna construcción auxiliar?

III. PREGUNTAS COMPLEMENTARIAS

i. ¿Qué te motiva a solucionar un problema?
ii. ¿Qué son para ti las construcciones auxiliares?
iii. ¿Qué opinión tienes sobre trabajar con medidas exactas?
iv. ¿Prefieres un problema con bosquejo o sin él?

Anexo 3. Prueba inicial tres casos

OLIMPIADAS COLOMBIANAS DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO LAS CONSTRUCCIONES AUXILIARES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMASGEOMÉTRICOS

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

NOMBRE: ____ **EDAD:** _____

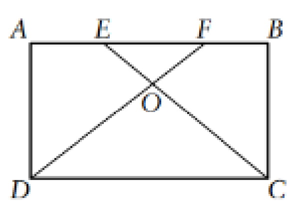
GRADO: ____**CIUDAD:** __________

PRUEBA TIPO A

Sean E y F dos puntos en el lado AB del rectángulo ABCD. Tal que AB es dividido en tres segmentos iguales, AE=EF=FB los segmentos DF y CE se cortan en el punto O. Halle la razón entre el área del triángulo OFC y el área del rectángulo ABCD.

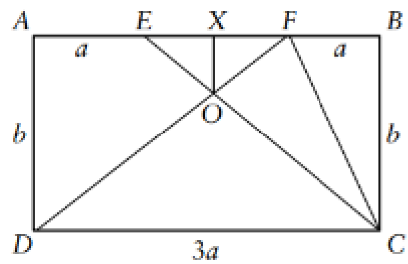
PRUEBA TIPO B

Sean E y F dos puntos en el lado AB del rectángulo ABCD. Tal que AB es dividido en tres segmentos iguales, AE=EF=FB los segmentos DF y CE se cortan en el punto O. Halle la razón entre el área del triángulo OFC y el área del rectángulo ABCD.



PRUEBA TIPO C

Sean E y F dos puntos en el lado AB del rectángulo ABCD. Tal que AB es dividido en tres segmentos iguales, AE=EF=FB los segmentos DF y CE se cortan en el punto O. Halle la razón entre el área del triángulo OFC y el área del rectángulo ABCD.



Anexo 4. Segunda prueba tres casos

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO LAS CONSTRUCCIONES AUXILIARES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMASGEOMÉTRICOS

NOMBRE: ________________________________ **EDAD:** ________________

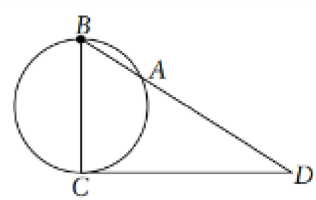
GRADO__________________________________**CIUDAD:** ________________

PRUEBA TIPO A

A, B y C son puntos de un círculo, CD es tangente al círculo en C, BC es un diámetro del círculo y BD corta el círculo en A. Si AB=5cm y AD=4cm, encuentre CD.

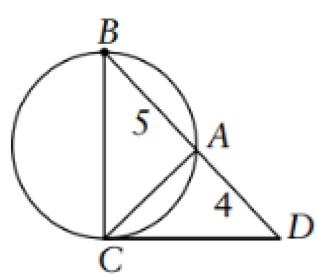
PRUEBA TIPO B

A, B y C son puntos de un círculo, CD es tangente al círculo en C, BC es un diámetro del círculo y BD corta el círculo en A. Si AB=5cm y AD=4cm, encuentre CD.



PRUEBA TIPO C

A, B y C son puntos de un círculo, CD es tangente al círculo en C, BC es un diámetro del círculo y BD corta el círculo en A. Si AB=5cm y AD=4cm, encuentre CD.



Anexo 5. Encuesta

OLIMPIADAS COLOMBIANAS DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO
LAS CONSTRUCCIONES AUXILIARES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

1. ¿Se puede en general resolver un problema de geometría sin construir su bosquejo?

- NUNCA
- CASI NUNCA
- AVECES
- CASI SIEMPRE
- SIEMPRE

¿Porque?

2. ¿Le gusta trabajar con regla y compás?

- NUNCA
- CASI NUNCA
- AVECES
- CASI SIEMPRE
- SIEMPRE

¿Porque?

3. Cuando en un problema le dan un dibujo, ¿usted realiza más trazos sobre él?

- NUNCA
- CASI NUNCA
- AVECES
- CASI SIEMPRE
- SIEMPRE

¿Porque?

4. ¿Un bosquejo debe ser realizado con las medidas exactas?

- NUNCA
- CASI NUNCA
- AVECES
- CASI SIEMPRE
- SIEMPRE

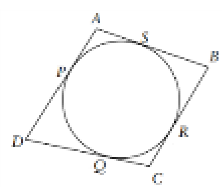
¿Porque?

Anexo 6. Selección inicial de Problemas Reto - Actividades

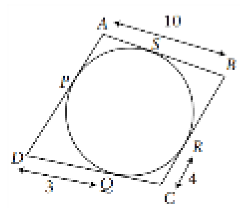
ACTIVIDAD 1

a) Un círculo PQRS está inscrito en un cuadrilátero ABCD de modo que toca a AB en S, a BC en R, a CD en Q y a AD en P. Si AB= 10 cm, CR = 4 cm and DQ = 3 cm, ¿cuál es el perímetro del cuadrilátero ABCD en cm?

b) Un círculo PQRS está inscrito en un cuadrilátero ABCD de modo que toca a AB en S, a BC en R, a CD en Q y a AD en P. Si AB= 10 cm, CR = 4 cm and DQ = 3 cm, ¿cuál es el perímetro del cuadrilátero ABCD en cm?



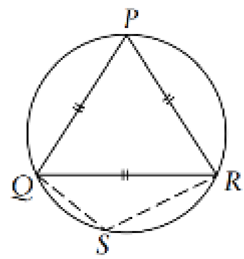
c) Un círculo PQRS está inscrito en un cuadrilátero ABCD de modo que toca a AB en S, a BC en R, a CD en Q y a AD en P. Si AB= 10 cm, CR = 4 cm and DQ = 3 cm, ¿cuál es el perímetro del cuadrilátero ABCD en cm?



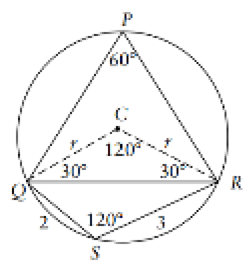
ACTIVIDAD 2

a) Se tiene un triángulo equilátero PQR inscrito en un círculo; y un punto S en el arco QR, si SR=3cm y QS=2cm, encuentre PS.

b) Se tiene un triángulo equilátero PQR inscrito en un círculo; y un punto S en el arco QR, si SR=3cm y QS=2cm, encuentre PS.



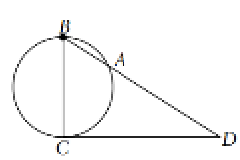
c) Se tiene un triángulo equilátero PQR inscrito en un círculo; y un punto S en el arco QR, si SR=3cm y QS=2cm, encuentre PS



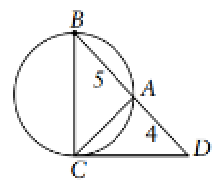
ACTIVIDAD 3

a) A, B y C son puntos de un círculo, CD es tangente al círculo en C, BC es un diámetro del círculo y BD corta el círculo en A. Si AB=5cm y AD=4cm, encuentre CD.

b) A, B y C son puntos de un círculo, CD es tangente al círculo en C, BC es un diámetro del círculo y BD corta el círculo en A. Si AB=5cm y AD=4cm, encuentre CD.



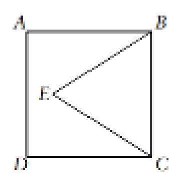
c) A, B y C son puntos de un círculo, CD es tangente al círculo en C, BC es un diámetro del círculo y BD corta el círculo en A. Si AB=5cm y AD=4cm, encuentre CD.



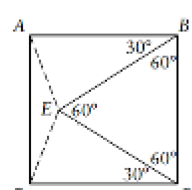
ACTIVIDAD 4

a) Sea ABCD un cuadrado, E un punto interior y BCE un triángulo equilátero. Halle el ángulo AED.

b) Sea ABCD un cuadrado, E un punto interior y BCE un triángulo equilátero. Halle el ángulo AED.



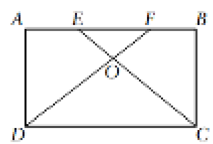
c) Sea ABCD un cuadrado, E un punto interior y BCE un triángulo equilátero. Halle el ángulo AED.



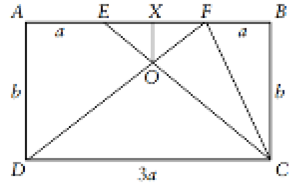
ACTIVIDAD 5

a) Sean E y F dos puntos en el lado AB del rectángulo ABCD. Tal que AB es dividido en tres segmentos iguales, AE=EF=FB los segmentos DF y CE se cortan en el punto O. Halle la razón entre el área del triángulo OFC y el área del rectángulo ABCD.

b) Sean E y F dos puntos en el lado AB del rectángulo ABCD. Tal que AB es dividido en tres segmentos iguales, AE=EF=FB los segmentos DF y CE se cortan en el punto O. Halle la razón entre el área del triángulo OFC y el área del rectángulo ABCD.



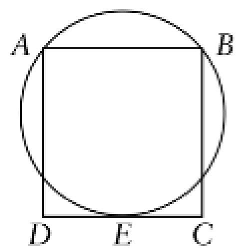
c) Sean E y F dos puntos en el lado AB del rectángulo ABCD. Tal que AB es dividido en tres segmentos iguales, AE=EF=FB los segmentos DF y CE se cortan en el punto O. Halle la razón entre el área del triángulo OFC y el área del rectángulo ABCD.



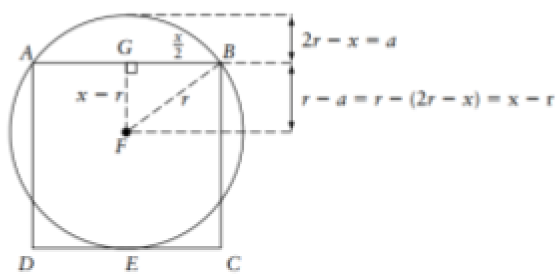
ACTIVIDAD 6

a) Dado un cuadrado ABCD cuyo lado CD es tangente al círculo ABE en E, halle la razón del área del círculo ABE con el área del cuadrado ABCD.

b) Dado un cuadrado ABCD cuyo lado CD es tangente al círculo ABE en E, halle la razón del área del círculo ABE con el área del cuadrado ABCD.



c) Dado un cuadrado ABCD cuyo lado CD es tangente al círculo ABE en E, halle la razón del área del círculo ABE con el área del cuadrado ABCD.



Anexo 7. Selección de Problemas Reto – Iberoamericana

OLIMPIADAS COLOMBIANAS DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

LAS CONSTRUCCIONES AUXILIARES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

NOMBRE_________________________________ **EDAD:** _________________

GRADO: ________________________________**CIUDAD:** ________________

PROBLEMA 1

Considere un triángulo con lados a, b y c tales que $a^2+b^2=c^2$. El círculo inscrito tiene radio r mientras que el circunscrito tiene radio R. Encuentre la relación de r a R.

PROBLEMA 2

Las longitudes de las medianas de un triángulo son 15, 36 y 39. ¿Cuál es el perímetro del triángulo?

PROBLEMA 3

Sea ABC un triángulo tal que AB > AC >BC. Sea D un punto sobre el lado AB de tal manera que CD=BC, y sea M el punto medio del lado AC. Demuestra que BC=AC si y solo si ∡BAC=2∡ABM

Anexo 8. Consentimiento Informado para estudiantes de Grado sexto Y séptimo del Colegio Sorrento

CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA ESTUDIANTES DE GRADO SEXTO Y SÉPTIMO DEL COLEGIO SORRENTO – INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITALPARTICIPANTES DE LA INVESTIGACIÓN SOBRE CONSTRUCCIONES AUXILIARES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Yo ____ identificado con el documento de identidad_________________, adulto responsable del menor de edad____, Estudiante del Colegio Sorrento Institución Educativa Distrital, identificado con el documento de identidad_________________, acepto que él participe voluntariamente en el estudio —**LAS CONSTRUCCIONES AUXILIARES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS** conducido por Erika Preciado Ramos.

Me han informado que uno de los objetivos generales del estudio es —Observar y caracterizar la destreza del menor en las construcciones auxiliares. También me han informado que su participación es voluntaria y no implica ningún tipo de valoración extra. Su colaboración radica responder algunos instrumentos tomarán aproximadamente 1:30 minutos. Entiendo que la información que se recoja será confidencial y no se usará para ningún otro propósito fuera de los de esta investigación. He sido informado que en cualquier momento de la investigación puedo hacer preguntas y que el menor puede retirarse si es su deseo sin que ello le perjudique en ninguna forma. Entiendo que puedo pedir información sobre los resultados de este estudio cuando éste haya concluido. Para esto, puedo contactar a Erika Preciado Ramos a través del correo epreciado@uan.edu.co. En constancia firmo a los 22 días del mes de septiembre de 2017.

Anexo 9. Actividades del colegio, Actividad 1-Fiesta de Disfraces

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO
LAS CONSTRUCCIONES AUXILIARES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

NOMBRE: ___________________________________ **EDAD:** ____________

Ginna desea hacer una fiesta de disfraces e invitar a todos sus amigos. Encontró un lugar para la fiesta y la forma es de un hexágono regular. Ella quiere hacer seis ambientes diferentes todos del mismo tamaño y forma, y ya hizo dos paredes cada una desde un vértice del hexágono hasta el centro. El área del espacio total es 108 m^2.

1. Mostrar cómo sería la forma de cada uno de los seis espacios. ¿Cuál será el área de

1.

2. Y si sólo deja tres espacios… ¿todos pueden tener el mismo tamaño y forma?

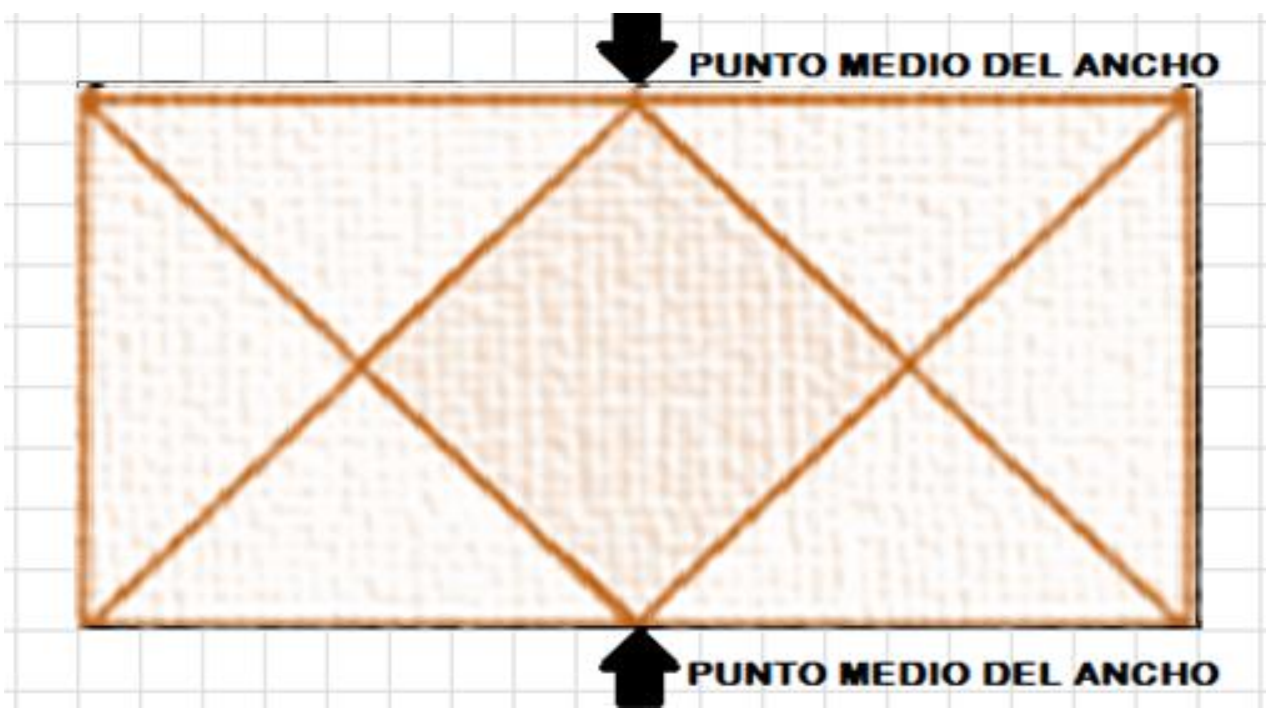
2.

3.

Y si sólo deja tres espacios…,

3. ¿Cuáles serían las áreas de cada espacio?

Ahora desea cubrir las entradas de los espacios y adquirió material rectangular, donde el ancho es el doble del alto, y quiere que cada entrada tenga la forma cuadrada sombreada.

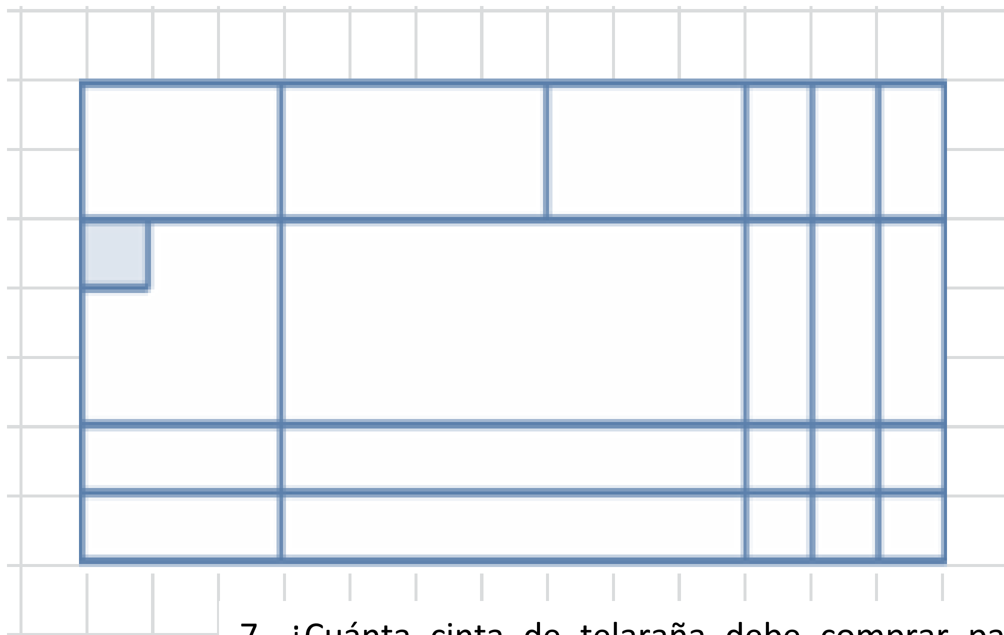


4. ¿Cuántas entradas alcanza a cubrir con el material que compró?

4.

5.

En la entrada hay un mueble rectangular y desea dejarlo para guardar antifaz, máscaras, pelucas,…y alquilarlos a quien no tenga un disfraz apropiado,quiere cajoncitos cuadrados del tamañosombreado.



Si cada uno tiene de lado 20 cm,

6. ¿Cuántos puede acondicionar?

7. ¿Cuánta cinta de telaraña debe comprar para decorar su borde?

6.

7.

Anexo 10. Actividades del colegio, Actividad 2-Tapetes en Macondo

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO
LAS CONSTRUCCIONES AUXILIARES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Fragmento de CIEN AÑOS DE SOLEDAD. Novela de Gabriel Garcia Marquez.

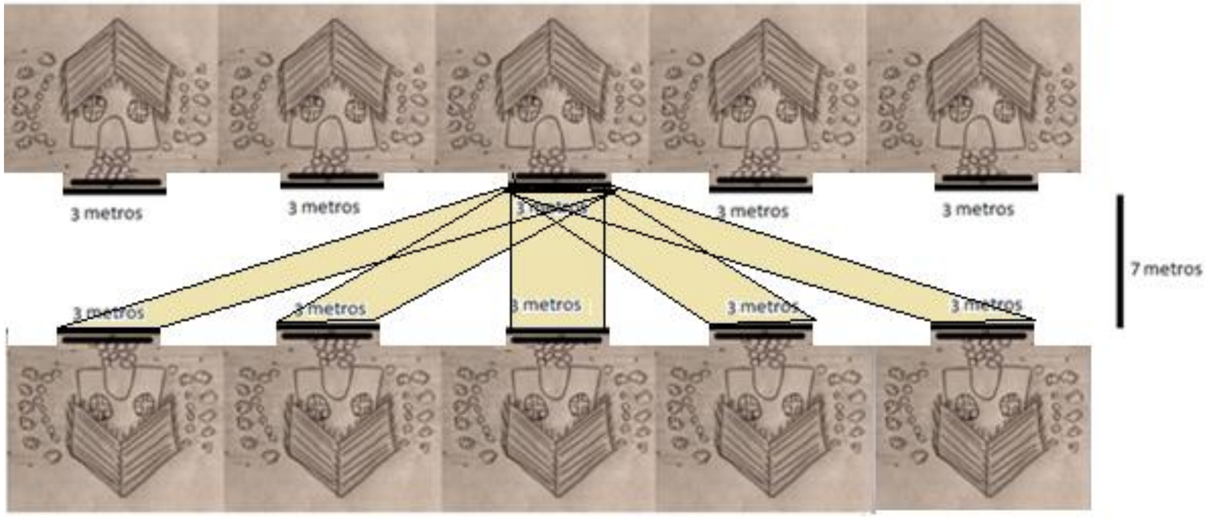
“José Arcadio Buendía, que era el hombre más emprendedor que se vería jamás en la aldea, había dispuesto de tal modo la posición de las casas, que desde todas podía llegarse al río y abastecerse de agua con igual esfuerzo, y trazó las calles con tan buen sentido que ninguna casa recibía más sol que otra a la hora del calor. En pocos años, Macondo fue una aldea más ordenada

Imagínate que José Arcadio pensó en adornar las calles y cubrir con una especie de tapetes que cubrieran perfectamente la entrada de cada casa, la cualmide3 metros, y la uniera con cada una de las demás. Sabiendo que las calles son construidas entre dos rectas que unen los extremos de cada par de entradas

1. Dibuja los tapetes que consideres serán los requeridos para ahorrar material (área) entre la primera casa de la acerade arriba y la primera casa de la de abajo y también entre la segunda casa de la acera de arriba y quinta de la acera de abajo. ¿Qué forma tienen?

1.

PARTE 2



Este dibujo fue realizado por José Arcadio. Él tomó como referencia la casa central de cada grupo de cinco casas y dibujó los posibles tapetes

2. ¿Cuál de ellos requiere más material? Explica tu respuesta.

2.

3. ¿Cuáles de ellos tienen la misma cantidad de tapete?

3.

4. ¿Podrías trazar otro tipo de tapete para unir las casas que tenga menor área? ¿Cómo sería?

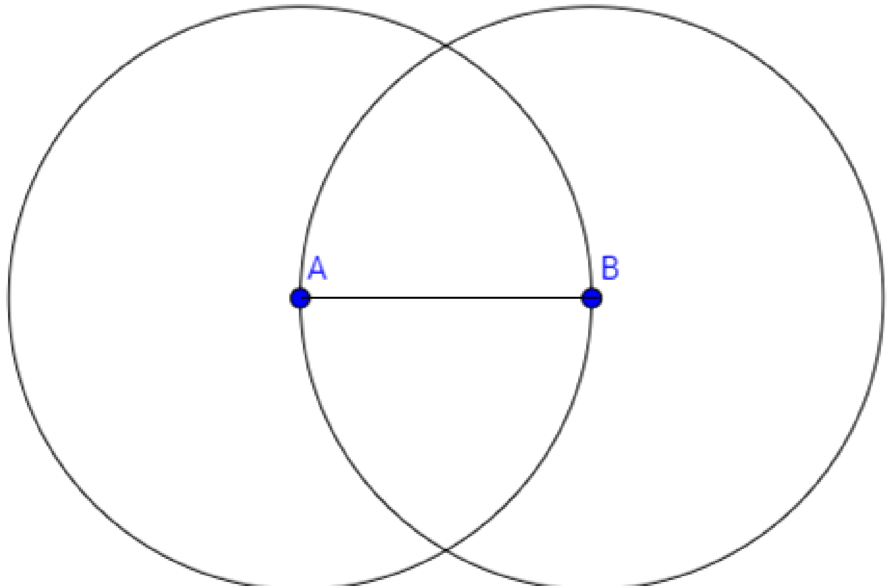
4.

Anexo 11. Actividades del colegio, Actividad 3- Triángulo Equilátero

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO
LAS CONSTRUCCIONES AUXILIARES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

NOMBRE:________________________ ____________ EDAD: __________

Dados dos círculos con el mismo radio y construidos de tal manera que cada uno pasa por el centro del otro.



1. ¿Podrías trazar dos triángulos equiláteros en el dibujo?

1.

2. ¿Por qué sabes que los triángulos son realmente equiláteros?

2.

Anexo12. Actividades del colegio, Actividad numero 4

Anexo 12. Actividades del colegio, Actividad 4 Círculo, triángulo, cuadrado y rectángulo son todos iguales?

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO
LAS CONSTRUCCIONES AUXILIARES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Frank y Alexandra están dibujando y construyendo distintas figuras con características iguales y luego comparan. Realiza tú lo que ellos realizaron

1. Dibujaron un circulo con radio 3 cm
2. Dibujaron un triángulo con un lado 4cm y otro 3cm
3. Dibujaron un cuadrado con lado 5cm
4. Dibujaron un rectángulo con un lado de 4cm y otro de 6 cm

1. CÍRCULO	2. TRIÁNGULO

3. CUADRADO

4. RECTÁNGULO

Compara con los trabajos de tus compañeros y responde

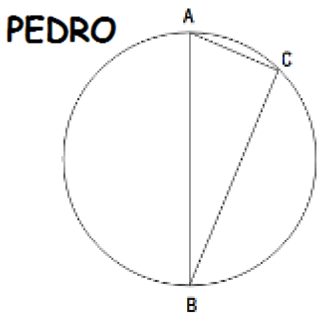
5. ¿Todas las figuras que dibujaron fueron necesariamente iguales? Explica por qué. Si quieres dibuja tu respuesta.

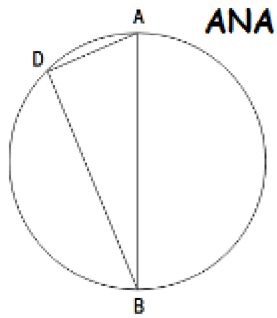
____

5.

Anexo13. Actividades del colegio, Actividad 5- Cometas infinitas

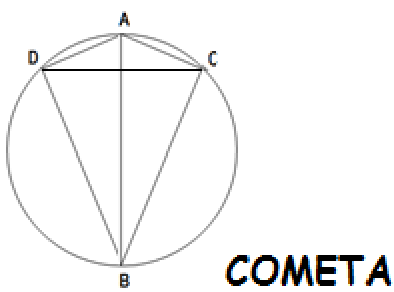
UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO
LAS CONSTRUCCIONES AUXILIARES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

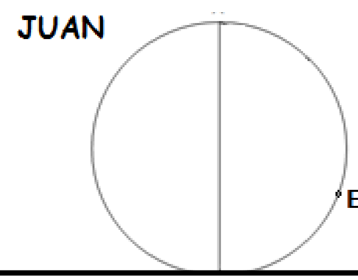




Pedro, Ana y Juan estaban dibujando.

Pedro dibujó un triángulo inscrito en una semicircunferencia. Ana, quien lo observaba, se dio cuenta que si construía su simétrico tendría una cometa. Si Juan tomara otro punto en vez de C, y Ana construyera de nuevo un simétrico,1. ¿tendría una cometa de nuevo?





1.

Trabaja la misma técnica de Pedro y Ana haciendo equipo con otro compañero, luego compara tus resultados con otra pareja de amigos.¿Qué sucedió?

2.¿Cuantas cometas diferentes se pueden hacer?

2.