REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Maestría en Educación Matemática

USO DE LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA Y LA RESOLUCION DE PROBLEMAS RETADORES EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS ECUACIONES DIOFANTICAS CUADRÁTICAS

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en

Educación Matemática

Carmen Yenny Cuestas Zabala

Bogotá D.C.

2017

REPÚBLICA DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

Programa de Maestría en Educación Matemática

DE USO LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA Y LA RESOLUCION DE PROBLEMAS RETADORES EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS ECUACIONES DIOFANTICAS CUADRÁTICAS

Tesis presentada como requisito para optar al título de Magister en Educación Matemática

Carmen Yenny Cuestas Zabala

Director de tesis: Mary Falk de Lozada (Ph.D.)

Bogotá D.C.

2017

Nota de aceptación:

Firma del presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá D.C. noviembre de 2017

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios y a la Santísima madre por haberme dado la oportunidad de realizar este proyecto, por ser mi guía y fortaleza en los momentos de debilidad.

Agradezco de forma especial a la Dra. Mary Falk de Losada, quien con sus conocimientos y experiencia me ayudó a encontrar el camino que debía seguir para la elaboración exitosa de esta tesis. Siempre estaré agradecida por la dedicación e interés con que escuchó y atendió cada una de mis dudas e inquietudes.

Al doctor Gerardo Chacón, por su apoyo incondicional y por haber compartido conmigo muchas de sus ideas y conocimientos.

A todos los docentes del programa de Maestría en Educación Matemática, en especial al Dr. Mauro García, al Dr. Rafael Sánchez Lamoneda, al Dr Gerardo Chacón y al doctor Osvaldo Jesús Rojas Velázquez, gracias a sus aportes y sus conocimientos siento que me he fortalecido en mi formación personal y profesional.

A mis compañeros con quienes compartí conocimientos y experiencias y fuimos apoyo moral unos de otros.

A los directivos y compañeros del IED Pablo de Tarso, donde laboro, especialmente a mis compañeras de área por su apoyo a la hora de realizar las actividades. De la misma forma, agradezco a los estudiantes de grado noveno de la jornada tarde, porque por su actitud positiva y desinteresada al responder las actividades he podido cumplir mis objetivos trazados.

Y por último agradezco a mis padres e Hijos quienes me empujaron a empezar, continuar y terminar la maestría, porque siempre estuvieron seguros de mis capacidades.

DEDICATORIA

A las personas que llevo en mi mente y en mi corazón.

A mi esposo Nelson Mesa Villoria

A mis padres, José Cuestas e Irene Zabala Merchán.

A mis hijos, Juan Felipe, María Paula y Diana Marcela.

SÍNTESIS

Uno de los temas importantes en la formación matemática del estudiante es el estudio de la ecuación cuadrática, ya que además de desarrollar el pensamiento algebraico, tiene muchas aplicaciones en la vida cotidiana. Las ecuaciones en general, dependiendo de su naturaleza tienen soluciones que pueden ser enteras, racionales, reales, complejas, etc. Una clase especial de ecuaciones cuadráticas, que por lo general no se tiene en cuenta en los programas de estudio de matemáticas a nivel de secundaria son las llamadas ecuaciones diofánticas cuadráticas. Una de las características interesantes del estudio de estas ecuaciones radica en que no es fácil hallar sus soluciones y la mayoría de las veces se debe recurrir al ingenio y conocimientos pertenecientes a la teoría de números para llegar a ellas. Además, este tipo de ecuaciones está lleno de historia, debido a que muchos matemáticos famosos han dedicado parte de su vida investigando métodos para hallar sus soluciones.

Esta propuesta se dirige a favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diofánticas cuadráticas, a través de la historia de la matemática en estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Distrital Pablo de Tarso de la Educación Básica Secundaria, situado en la localidad de Bosa. Para fortalecer la propuesta se realizó una revisión bibliográfica y documentada de la evolución histórica de las ecuaciones diofánticas desde la cultura babilónica hasta nuestros días. Además, se analizaron los diferentes tipos de ecuaciones diofánticas y sus formas de solución, para proponer actividades en las cuales se involucra la historia a través de la resolución de problemas. Su implementación permite que el estudiante, a través del análisis y la

deducción, llegue a la solución, favorezca el desarrollo del pensamiento matemático y propicie un aprendizaje significativo.

ABSTRACT

One of the important topics in the student's mathematical training is the quadratic equation, since in addition to developing algebraic thinking, it has many applications in everyday life. The equations in general, depending on their nature, have solutions that can be integer, rational, real, complex, etc. A special class of quadratic equations, which is generally not taken into account in the mathematics curriculum at the secondary level, are the so called quadratic diophantine equations. One of the interesting characteristics of the study of these equations is that it is not easy to find their solutions and most of the time you must resort to the ingenuity and knowledge belonging to number theory to reach them. In addition, this type of equations is full of history, because many famous mathematicians have dedicated part of their life researching methods to find their solutions.

This proposal is aimed at favoring the teaching learning process of the quadratic Diophantine equations, through the history of mathematics in ninth grade students of the District Educational Institution Pablo de Tarso of Secondary Basic Education, located in the town of Bosa. To strengthen the proposal, a bibliographic and documented review of the historical evolution of Diophantine equations from the Babylonian culture to the present day was carried out. In addition, the different types of Diophantine equations and their forms of solution were analyzed, to propose activities where history is involved through the resolution of problems. Its implementation allows the student, through analysis and deduction, to reach the solution, favor the development of mathematical thinking and encourage meaningful learning.

TABLA DE CONTENIDOS **PÁG.**

INTRODUCCIÓN **1**
CAPITULO 1. ESTADO DEL ARTE **7**
1.1 Investigaciones sobre la utilización de la historia de las matemáticas como un recurso didáctico para enriquecer la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el mundo 7
1.1.1 Using History as a 'Goal' in Mathematics Education. Roskilde University 8
1.1.2. An example of using history of mathematics in classes 9
1.1.3. History in mathematics education 10
1.1.4. Using history of mathematics in the teaching and learning of mathematics in Singapore 11
1.1.5. Integrating History of Mathematics into the Mathematics Classroom .. 12
1.1.6. La historia de la matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la matemática 14
1.1.7. Tendencias innovadoras en educación matemática 15
1.1.8 Historia de la Matemática, Educación Matemática e Investigación en Educación Matemática 17
1.1.9. ¿What do mathematics teachers and teacher trainees know about the history of mathematics? 18
1.1.10. ¿Cómo contextualizar y dejar pensar la matemática? 19
1.2. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diofánticas 20
1.2.1 An Introduction to Diophantine Equations 21
1.2.2 Methods of solving Diophantine equations in secondary education in Romania 21
Conclusiones del capítulo 1 22
CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO **23**
2.1. Teoría de la resolución de problemas. Problemas retadores 23
2.2. La historia de la matemática como recurso didáctico en el aula 31

2.3. Referentes sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diofánticas en el noveno grado 37
2.4 Referentes del pensamiento algebraico 40
2.5. Comunidad de práctica de Wenger 42
CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN 50
3.1. Tipo o enfoque de investigación 50
3.2. Alcance del estudio 51
3.3. Población y muestra 52
3.4. Métodos, técnicas e instrumentos utilizados 52
3.5 Diseño y aplicación de las actividades 53
3.5.1 Estructura de las actividades 53
3.5.2 Actividades 54
3.5.2.1 Actividad 1: Introducción a la Ecuaciones diofánticas 54
3.5.2.2 Actividad 2: Ecuaciones Diofanticas de la forma $x2 - y2 = n$ 61
3.5.2.3 Actividad 3: Ecuaciones diofánticas de la forma $x2 + y2 = z2$ 66
3.5.2.4 Actividad 4: Ecuación de Pell 73
3.5.2.5 Actividad 5: Ecuaciones Diofanticas de la forma $x2 \pm bx = \pm c$ 77
CAPITULO 4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA PROPUESTA 83
4.1. Descripción de los resultados obtenidos en cada una de las actividades 83
4.2. Valoración de los resultados obtenidos en la práctica escolar de la investigación 101
4.3. Resultados de la encuesta de satisfacción 103
Conclusiones del capítulo 4 109
CONCLUSIONES 111
RECOMENDACIONES 113
BIBLIOGRAFÍA 115
ANEXOS 122

INTRODUCCIÓN

Por lo menos desde inicios de este siglo la educación ha buscado el desarrollo integral de las nuevas generaciones. En el proceso de enseñanza aprendizaje la constante, a lo largo de la historia, ha sido encontrar estrategias de preparación, motivación, realización y evaluación que conduzcan al estudiante a la construcción del conocimiento, a un aprendizaje significativo y además a desarrollar un pensamiento autónomo, estratégico y crítico.

El pensamiento crítico emite juicios de evaluación basados en un pensamiento lógico (Piette, 1998). "La misión de la escuela no es tanto enseñar al alumno una multitud de conocimientos que pertenecen a campos muy especializados, sino ante todo aprender a aprender, procurar que el alumno llegue a adquirir una autonomía intelectual. Esto se puede lograr atendiendo el desarrollo de destrezas de orden superior como las del pensamiento crítico"[1]. "El desarrollo del pensamiento crítico es uno de los procedimientos propios y tradicionales de la historia"[2]. López (2012) indica que en muchos programas educativos y en las metas de los profesores suelen encontrarse afirmaciones tales como que lo que se busca con el estudio de algunas disciplinas (por ejemplo, la historia) es la formación de alumnos críticos.

El conocimiento de la historia de la matemática contribuye a la construcción de ese pensamiento crítico, pues lleva al estudiante a reflexionar sobre diferentes aspectos referentes a su desarrollo, a cuestionar las tendencias sobre la naturaleza de las

[1] López, G. (2012). Pensamiento crítico en el aula. *Docencia e Investigación*. Número 22. P 41-60. Recuperado 1-11-2017 de URL: http://educacion.to.uclm.es/pdf/revistaDI/3_22_2012.pdf
[2] Hervás. R. & Miralles, P. (2000). La importancia de enseñar a pensar en el aprendizaje de la historia. *Educar en el 2000.* p 34-40. . Recuperado 1-11-2017 en la URL: http://servicios.educarm.es/templates/portal/images/ficheros/revistaEducarm/10/revsita9_art06.pdf

matemáticas, sus creencias a lo largo de la historia y la relación que ha existido entre la matemática y su enseñanza, a pensar y analizar las condiciones y situaciones que motivaron el desarrollo de la matemática y sobre las piezas que ayudaron o fueron obstáculo en la construcción de conceptos.

Las dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas hacen necesario desarrollar nuevos métodos que permitan cambiar las perspectivas de los estudiantes. Uno de los principales factores que pueden incentivar y mejorar el aprendizaje de los estudiantes es la inclusión de la historia de la matemática en su enseñanza, haciendo ver la matemática como un producto de la actividad humana que se va construyendo por diferentes situaciones, en ocasiones para resolver problemas prácticos, otras veces para recrear y otras por motivos artísticos o culturales.

El proceso enseñanza aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas en grado noveno tiene dos dificultades a destacar. Por una parte, la mayoría de los estudiantes comprenden muy poco la temática y sólo se enfocan en aprender a manejar algoritmos de forma mecánica. Por otra parte, se observa el manejo de temas matemáticos de forma aislada, sin alguna conexión con otros conceptos o aplicaciones del plan de estudios.

En el proceso de hallar las soluciones de las ecuaciones diofánticas cuadráticas se encadenan diferentes temas matemáticos vistos a lo largo de la vida académica del estudiante. Por ejemplo, en un mismo ejercicio se puede estar aplicando propiedades de los números, factorización y solución de sistemas de ecuaciones lineales, temas vistos en diferentes cursos de la secundaria.

Es por esto que se requiere dirigir la mirada a este tema de aprendizaje de las matemáticas de la educación básica secundaria, las ecuaciones diofánticas cuadráticas, para lo cual se proyecta investigar sobre los usos de la historia en el proceso de enseñanza aprendizaje en la educación básica secundaria.

Esta temática sustenta su importancia en varios aspectos: sirve como base conceptual para el desarrollo de otros temas, provee una oportunidad para desarrollar la visión de lo que realmente es la matemática, permite tener una mejor comprensión de conceptos y teorías y con esto cambia la forma en que se percibe esta ciencia. Además, la hace ver como un proceso de continua reflexión y mejoramiento a través del tiempo.

El tema de la enseñanza aprendizaje de la matemática en la educación básica secundaria, y en particular la importancia de los usos de la historia en la enseñanza de la matemática, han sido abordadas en el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (NCTM), Consejo Nacional de Investigación (NRC) y el Consejo Nacional para la Acreditación de la Formación Docente (NCATE). A partir de los años sesenta se intensificó el interés por el valor que tiene la historia en la enseñanza de las matemáticas y se comenzaron a producir cambios. Algunas muestras de esta renovación son: La fundación del grupo francés Inter-IREMs de Historia de las Matemáticas, la publicación en 1969 por el NCTM de la obra Historical Topics for the Mathematical Classroom, en la que se ofrece una serie de materiales históricos para la educación matemática, la creación del Grupo Internacional de Estudio sobre las relaciones entre la Historia y la Pedagogía de las Matemáticas (HPM). Entre los Congresos realizados por este grupo destacan las dos Conferencias Internacionales sobre Historia y Epistemología en la Educación Matemática celebrados en Montpellier (Francia) en 1993 y en Braga (Portugal) en 1996.

Por medio de una encuesta hecha a profesores de distintas instituciones (ver Anexo 1) y a la experiencia de la investigadora se pudo constatar debilidades como las siguientes:

- Hay poco conocimiento sobre la historia de la matemática tanto de docentes como de estudiantes
- En los textos educativos hay poca información histórica,
- Los estudiantes no tienen interés por saber historia de la matemática y,
- No hay mucho material que provee información acerca de la forma cómo puede implementarse la historia de la matemática en el aula.

Las valoraciones anteriores y el estudio epistemológico inicial realizado permiten determinar el siguiente **problema de investigación**: ¿Cómo favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diofánticas cuadráticas a través de la historia de la matemática en grado noveno de la educación básica secundaria?

Se precisa como **objeto de estudio** el proceso de enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diofánticas cuadráticas en grado noveno y se infiere como **objetivo general** favorecer el proceso de enseñanza - aprendizaje de las ecuaciones diofánticas cuadráticas a través de la historia de la matemática en el grado noveno de la educación básica secundaria. Los objetivos específicos son:

- Definir los contenidos históricos sobre la ecuación diofántica cuadrática que se pueden incluir en un curso de secundaria

- Determinar las expectativas que tienen los estudiantes sobre la historia de la matemática
- Diseñar actividades basadas en la resolución de problemas y elementos históricos de la ecuación diofántica cuadrática
- Desarrollar las actividades diseñadas y valorar su contribución al problema de investigación

Acorde con el objetivo, el **campo de acción** se enmarca en el proceso de enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diofánticas cuadráticas a través la historia de la matemática.

Para la consecución del objetivo y la solución del problema, se presenta la siguiente **hipótesis científica**: Si se utiliza la historia de la matemática como un recurso didáctico para mostrar a los estudiantes esta ciencia como producto de la actividad humana a través del tiempo, con la ayuda de un sistema de actividades sustentado en la resolución de problemas retadores y en la comunidad de práctica de Wenger, se favorece el proceso de enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diofánticas cuadráticas en los estudiantes de grado noveno de la educación básica secundaria.

En favor de dar cumplimiento al objetivo y lograr resolver el problema planteado, así como para guiar el curso de la tesis fueron propuestas las siguientes **tareas de investigación**.

1. Elaborar el estado del arte sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, particularmente del uso de la historia en la enseñanza de la matemática en la educación básica, y específicamente en el contexto de las ecuaciones diofánticas cuadráticas.

2. Determinar los fundamentos teóricos que sustentan el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, particularmente del uso de la historia en la enseñanza y aprendizaje de la matemática en la educación básica, y específicamente en el contexto de las ecuaciones diofánticas cuadráticas.

3. Elaborar un sistema de actividades basadas en problemas retadores para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diofánticas cuadráticas, a través del uso de la historia de la matemática, para los estudiantes de noveno grado de la educación básica secundaria.

4. Valorar el impacto de las actividades elaboradas.

CAPITULO 1. ESTADO DEL ARTE

Con alguna frecuencia se lee o se oye hablar sobre el poco interés que muchos estudiantes muestran hacia sus estudios de matemáticas. Esto hace necesario que se haga una reflexión profunda por parte de los profesores y que muchos investigadores centren su atención en diversas formas de incentivarles para el estudio de esta área y busquen métodos para mejorar el sistema de enseñanza aprendizaje de la matemática en las escuelas. En este capítulo se muestran algunas de las investigaciones realizadas acerca del proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en la educación básica, específicamente de la utilización de la historia de la matemática en la enseñanza de las ecuaciones diofánticas a nivel internacional.

1.1 Investigaciones sobre la utilización de la historia de las matemáticas como un recurso didáctico para enriquecer la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el mundo

Desde los años 60 del siglo pasado se viene promoviendo el uso de la historia de la matemática en su enseñanza, pero desde hace aproximadamente 20 años se viene incrementando su utilización. Muchos matemáticos, investigadores, educadores de matemáticas y organizaciones educativas y de matemáticas, nacionales e internacionales, han subrayado la importancia de la inclusión de la historia de la matemática en su enseñanza. A continuación, se abordan algunas investigaciones que sirven de referencia para esta tesis.

1.1.1 Using History as a 'Goal' in Mathematics Education. Roskilde University[3]

Jankvist (2009) investiga dos aspectos sobre el uso de la historia de la matemática en la educación matemática: uno trata sobre los argumentos para utilizar la historia (como herramienta y como meta), y el otro trata sobre la forma cómo se debe hacer esa integración (ideas, temas y enfoque basado en la historia). Con tal fin, Jankvist (2009) elabora unos módulos históricos que son diseñados e implementados para una determinada clase en los diferentes cursos de secundaria.

Lo que se quiere ver es si al final de los módulos, los estudiantes tienen manejo de la historia de la matemática que vieron en los cursos y si este conocimiento produjo algún cambio en su forma de percibir y apreciar la matemática.

Este autor para sus clases utilizó diferentes formas de mostrar la historia de la matemática, haciendo videos de las implementaciones, ensayos, ejercicios matemáticos, cuestionarios y entrevistas de seguimiento. Analizó las condiciones y formas en que los estudiantes participaron y se apropiaban de cada nuevo tema. Al final Jankvist (2009) concluye que las creencias de los estudiantes parecen crecer en consistencia y que el deseo de los estudiantes de justificarlas y ejemplificarlas se aumenta durante el estudio que duró un año.

Los criterios dados por Jankvist (2009) constituyen una base y se enriquecen en la presente tesis, pues en la investigación se muestran diferentes argumentos para utilizar la historia y se proponen formas para realizar la integración de la historia de las

[3] Jankvist, U. T. (2009). Using history as a 'goal' in mathematics education. Recuperado 27 de mayo de 2017 de la URL: http://forskning.ruc.dk/site/files/3823469/IMFUFA_464.pdf

matemáticas como un recurso didáctico para enriquecer la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diofánticas cuadráticas en el aula.

1.1.2. An example of using history of mathematics in classes[4]

El propósito principal de Goktepe & Ozdemir (2013) fue analizar el efecto que tenía en los estudiantes, el ver la matemática desde una perspectiva diferente, mostrada como una ciencia viva que ha tenido un desarrollo humano.

Se utilizó el procedimiento de estudio de casos múltiples de Yin (2009, citado por Goktepe & Ozdemir, (2013) para reunir y analizar información. Se escogió un grupo de 20 alumnos de grado octavo de un colegio privado.

El estudio se llevó a cabo en tres pasos:

1. Creación de talleres.

2. Explicación del desarrollo de los talleres.

3. Tomar las opiniones de los estudiantes sobre la actividad.

En la actividad, primero se da una breve explicación sobre lo que se va a hacer. Al final de la clase se entregó a los alumnos un cuestionario con siete preguntas analizando la actividad realizada. De esto, Goktepe & Ozdemir (2013) concluyeron que a los alumnos les gustó la actividad, pero que presentaron dificultad en hacer cálculos y seguir procedimientos. También se precisa que reforzaron conocimientos y

[4] Goktepe, S., & Ozdemir, A. S. (2013). An Example of Using History of Mathematics in Classes. *European Journal of Science and Mathematics Education*, *1*(3), 125-136. Recuperado el 29 de mayo de 2017 de la URL: http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1108226.pdf

aprendieron historia, que no pudieron relacionar el tema con su cotidianidad, y que la actividad les pareció apropiada.

Por otra parte, Swetz (1994), citado por Goktepe & Ozdemir, (2013) sugiere a los escritores que están preparando un material docente en el área de matemática: ser creativo e incluir las imágenes apropiadas. La apreciación realizada por estos autores se utiliza en la propuesta de actividades de la presente tesis.

1.1.3. History in mathematics education[5]

Fauvel & Maanen (eds., 2000) en su trabajo responden a la pregunta ¿qué papel tiene la historia de la matemática en la educación matemática? Para ello, analizan y evalúan el estado actual de la educación matemática. Los asuntos abordados fueron: el contexto político sobre la inclusión de la historia de la matemática en el plan de estudios de matemáticas en la escuela; cuestiones filosóficas, interdisciplinarias y multiculturales; la formación de profesores en historia de la matemática; formación histórica y entendimiento estudiantil de la matemática. También hacen referencia a la historia como apoyo de diversas exigencias educativas, a la integración de la historia de la matemática en el aula de clases, el soporte histórico para temas particulares, el uso de fuentes originales en el aula de clases, entre otros temas relacionados.

Fauvel, & Maanen (2000) exponen de manera amplia información de gran interés, pues ponen en contexto el uso de la historia de la matemática en las aulas de clase, también brinda un panorama internacional (Marruecos, Brasil, Hong Kong, Italia, Países Bajos, Francia, Alemania, Austria, China, Rusia, entre otros), el cual es importante para la

[5] Fauvel, J & Maanem, J. (2002). History in mathematics education. The ICMI Study United States of America. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

autora de esta tesis porque en este estudio se exponen formas en qué se debe incluir la historia de la matemática y ejemplos de uso de la historia de la matemática en el aula.

1.1.4. Using history of mathematics in the teaching and learning of mathematics in Singapore[6]

Ho, W. (2008) investiga la forma como la historia de la matemática puede integrarse en el aula en Singapur, más exactamente en los niveles del Politécnico y del Junior College, a través de lecciones bien diseñadas con sus temas y tiempos medidos. El autor hace un recorrido por el currículo de matemáticas en Singapur y propone un marco de trabajo para que la historia de la matemática sea incluida, y también sugiere diferentes formas de implementación en el aula. Ho (2008), habla sobre las potencialidades, límites y riesgos que los maestros creen que puede llevar consigo esta inclusión.

El documento presenta un caso estudio, basado en la integración de la historia de la matemática en el álgebra lineal, a un curso de 120 estudiantes de ingeniería matemática en el Politécnico, durante el segundo semestre del año 2007. Lo que se buscaba era ver si aumentaba la motivación por el aprendizaje de la materia. Se recolectó información con encuestas, teniendo en cuenta cuatro componentes: Creencias de los estudiantes sobre los temas de la materia, interés en el estudio de la materia, confianza y perseverancia. Lo que hizo Ho (2008), fue un plan semanal, en donde a determinados temas del currículo del curso, le hizo la inclusión histórica por

[6] Ho, W. K. (2008). Using history of mathematics in the teaching and learning of mathematics in Singapore. *1st RICE, Singapore: Raffles Junior College*. Recuperado el 29 de Mayo de 2017 de la URL: http://math.nie.edu.sg/wkho/Research/My%20publications/Math%20Education/hom.pdf

medio de conferencias o tutoriales y terminada cada lección los estudiantes escribían sobre lo que habían aprendido, las cosas que les había gustado y los comentarios que quisieran hacer. Al final se concluyó que los estudiantes se sintieron más motivados y confiados, pero lo que mejoraron considerablemente fueron las creencias y la perseverancia.

Para la autora de esta tesis son importantes los resultados que obtuvo Ho (2008) porque se puede evidenciar que el resultado de la inclusión de la historia de la forma como lo hizo fue positivo.

1.1.5. Integrating History of Mathematics into the Mathematics Classroom[7]

"Este documento fue escrito bajo el alcance de los cursos de doctorado de Rosa Antónia, en el programa de educación matemática, en la Universidad del Estado de Illinois en los Estados Unidos".

Antonia (2001) responde la pregunta **¿**Por qué debe integrarse la historia de las matemáticas en la educación matemática?, resaltando el hecho que son muchas las personas, las reuniones, los congresos, entre otros, que en los 20 años precedentes habían estudiado la importancia y los beneficios de incluir la historia de las matemáticas en el aula.

Antonia (2001) explica la diferencia entre "*utilizar la historia de las matemáticas en la enseñanza de las matemáticas*" con *"incorporación de la historia de las matemáticas en la enseñanza de las matemáticas*".

[7] Antónia, R. (2001). Integrating history of mathematics into the mathematics classroom. *Centro de Matemática da Universidade do Porto. Preprint*, *25*. Recuperado 20-06-2017 de la URL: http://cmup.fc.up.pt/cmup/preprints/2001-25.pdf

En este documento se habla sobre los beneficios de la incorporación de la historia de las matemáticas en el aula y también nombra algunas de las objeciones respecto a esta integración. Se afirma que la dificultad principal es que a los maestros les hace falta conocimiento sobre la historia de las matemáticas y sobre su valor educativo y potencial.

Ella investigó sobre las formas en que se puede hacer esta integración. Los elementos claves son: problemas y la resolución de problemas.

"Los estudiantes pueden participar con más ganas en resolver los problemas de siglos de antigüedad que desencadenaron desarrollos matemáticos tempranos (Swetz, 1989), que en hacer los ejercicios de revisión que siempre se encuentran al final de cada capítulo de sus libros de texto (Simonson, 2000)"[8].

Se habla sobre autores que han sugerido modelos o marcos para la enseñanza en el aula de inspiración histórica.

Davitt (2000) apoya firmemente el utilizar-descubrir-explorar más que el desarrollar-definir.

Furinghetti (1997) propone como componentes conocer las fuentes, señalar los temas adecuados a la clase, hacer el análisis y planificación de actividades de la clase teniendo en cuenta la disponibilidad de medios, los objetivos y el contexto de la actividad, llevar a cabo el proyecto y evaluar la actividad.

[8] Antónia, R. (2001). Integrating history of mathematics into the mathematics classroom. *Centro de Matemática da Universidade do Porto. Preprint*, *25*. Recuperado 20-06-2017 de la URL: http://cmup.fc.up.pt/cmup/preprints/2001-25.pdf

Sierpinska (1996) identificó cuatro formas diferentes de ver el estudio y el uso de la historia de las matemáticas: histórico, epistemológico, pedagógico I y pedagógico II.

Según Antonia (2001), existe una amplia variedad de materiales matemáticos históricos que se pueden utilizar para trabajar en clase, entre ellos las fuentes primarias históricas. Algunas de éstas se deben adaptar a las necesidades, los intereses y las dificultades de los alumnos. En la literatura hay revistas que proporcionan ejemplos y sugerencias de actividades inspiradas en la historia para uso en la clase.

"Los muchos beneficios de integrar adecuadamente la historia de las matemáticas son incuestionables. Aunque la integración de la historia de las matemáticas en la enseñanza en clase constituye, sin duda, un reto para el conocimiento y la creatividad (Estrada, 1993) de los profesores, en última instancia, su sentido de logro y realización profesional también aumentará."

La autora de esta tesis está totalmente de acuerdo con el punto de vista de este documento, ya que piensa que el incluir la historia de la matemática en las clases es beneficioso tanto para el alumno como para el maestro, puesto que el docente debe documentarse adecuadamente respecto al tema a tratar y definir la forma como va a realizar la clase incluyendo la historia, que es una primera parte de lo que se pretende hacer en esta investigación.

1.1.6. La historia de la matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la matemática[9]

---

[9] González, P. M. (2008). El teorema llamado de Pitágoras: una historia geométrica de 4.000 años. *Sigma*, *32*, 103-130. Recuperado 19-06-2017 de la URL:
http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_32/8_pitagoras.pdf

Este texto trata algunos temas de la educación secundaria abordados sólo con la historia de la matemática. González, P. (2008) muestra toda la historia del teorema de Pitágoras, partiendo de las civilizaciones prehelénicas y llegando posteriormente al mundo griego; habla sobre las demostraciones más famosas de este teorema, muestra el largo repertorio de todas las demostraciones hechas del teorema, y trata aplicaciones y curiosidades sobre el teorema. En el texto también hay un capítulo dedicado a la divina proporción y al pentagrama pitagórico. Otro capítulo está dedicado al descubrimiento de los inconmensurables y la primera crisis de los fundamentos en la historia matemática. Finalmente, hay un último capítulo dedicado a los sólidos pitagóricos-platónicos. En todo el texto lo llamativo es el uso completo de la historia matemática para exponer cada uno de los temas.

Para la autora de esta tesis, este libro es de utilidad ya que abarca gran parte de la historia de las ternas pitagóricas y aplicaciones de éstas que pueden servir como ayuda en la elaboración de las actividades.

1.1.7. Tendencias innovadoras en educación matemática[10]

De Guzmán (1992) presenta los diferentes aspectos por los cuales la enseñanza de la matemática no es una tarea fácil. Hace una breve reseña sobre momentos de la historia en los cuales hubo cambios en la enseñanza. Resalta las tendencias actuales sobre la enseñanza de la matemática, destacando: favorecer los procesos del pensamiento matemático más que los contenidos; conceder importancia al

[10] Guzmán, M. (1992). Tendencias actuales de la enseñanza de la matemática. *Revista de Ciencias de la Educación.* pp. 19-26.

posicionamiento afectivo del estudiante frente a la matemática; y ver la educación matemática como un proceso intercultural.

Dos aspectos con los cuales se pueden llevar a cabo estas ideas son la historia de la matemática y la solución de problemas. Con relación a la historia de la matemática afirma que: "… *proporciona una magnífica guía para enmarcar los diferentes temas, los problemas de los que han surgido los conceptos importantes de la materia, nos da luces para entender la razón que ha conducido al hombre para ocuparse de ellos con interés*"[11]. Por otra parte, aduce que "*La teoría, así concebida, resulta llena de sentido, plenamente motivada y mucho más fácilmente asimilable. Su aplicación a la resolución de los problemas, que en un principio aparecían como objetivos inalcanzables, puede llegar a ser una verdadera fuente de satisfacción y placer intelectual, de asombro ante el poder del pensamiento matemático eficaz y de una fuerte atracción hacia la matemática*."[12].

Para De Guzmán (1992), cuando se aborda la enseñanza de la matemática y las investigaciones en educación matemática desde un enfoque histórico, es posible:

Precisar cómo han surgido los planteamientos teóricos.

Identificar cuáles son los problemas abiertos, en cada periodo histórico, su evolución y su situación en la actualidad.

Enmarcar en tiempo y espacio, los asuntos que han llamado el interés y la atención de los investigadores.

---

[11] De Guzmán, M. (1992). *Tendencias innovadoras en Educación Matemáticas*. Olimpíadas Matemáticas Argentinas. Buenos Aires.

[12] Guzmán, M. (1992). *Tendencias innovadoras en Educación Matemáticas.* Olimpíadas Matemáticas Argentinas. Buenos Aires.

Señalar las conexiones de la matemática con otras ciencias.

Lo que plantea este autor coincide con los objetivos de la autora de esta tesis, porque relaciona la historia de la matemática con la solución de problemas como un método de enseñanza para que el estudiante desarrolle el pensamiento matemático y afine sus estrategias en la solución de problemas. Además de favorecer el desarrollo del pensamiento, motiva a los estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas.

1.1.8. Historia de la Matemática, Educación Matemática e Investigación en Educación Matemática[13]

Belisario & González (2012) establecen dos relaciones entre la historia de las matemática y educación matemática y entre la historia de la matemática e investigación en educación matemática. De la primera se ve un cambio en el punto de vista sobre la matemática, mostrándola como un producto de la actividad humana, ayudando con ello a motivar su aprendizaje. La segunda relación se refiere a aquellas investigaciones en educación matemática en las cuales se utiliza la historia de la matemática como un punto de interés, de la cual se deduce que para alcanzar una comprensión profunda de los conceptos de cualquier ciencia se requiere del conocimiento de su historia.

Desde el punto de vista de Belisario & González (2012), la historia de *"… la matemática muestra la transformación de los conceptos y procesos en esta disciplina, así como el contexto socio-cultural en donde ella aparece y se desarrolla, considerando también su influencia sobre su enseñanza y aprendizaje como sobre la investigación que se*

[13] Belisario, A & González, F. (2012). Historia de la Matemática, Educación Matemática e Investigación en Educación Matemática. *Revista iberoamericana de educación matemática*. pp. 161- 182. Venezuela.

realiza en torno a estos procesos”[14]*.* Además, la historia de la matemática en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, como la resolución de problemas, se encuentran entre los campos temáticos usados con más frecuencia en las investigaciones en educación matemática.

La autora de esta tesis comparte las ideas de estos autores porque aportan un potencial importante a la historia de la matemática en el aula de clase, y la reconocen como un instrumento didáctico, lo cual enriquece culturalmente la enseñanza, motiva, y facilita al estudiante la comprensión profunda de la matemática.

1.1.9. ¿What do mathematics teachers and teacher trainees know about the history of mathematics?[15]

Gazit (2013) indaga respecto a lo que saben los futuros profesores y profesores de matemáticas en ejercicio acerca de la historia de la matemática. Se muestran los resultados de un estudio que examinó los conocimientos de los profesores de matemáticas y los estudiantes de magisterio, sobre los conceptos, temas y personajes de la historia de la matemática.

Los resultados indican una falta de conocimientos sobre la mayoría de los temas examinados. Alrededor del 40% de los participantes conocía el origen de nuestro sistema de conteo y el único elemento que alcanzó por encima del 50% fue el tema relativo al hombre que editó el libro de la antigüedad más destacado en geometría, Euclides (alrededor del 83% lo identificó correctamente). El grupo con la puntuación

---

[14] Belisario, A & González, F. (2012). Historia de la Matemática, Educación Matemática e Investigación en Educación Matemática. *Revista iberoamericana de educación matemática*. Pp. 161- 182. Venezuela.
[15] Gazit, A. (2013). ¿What do mathematics teachers and teacher trainees know about the history of mathematics? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Volume 44. pp 501-512.

más baja fue el de las matemáticas de la escuela primaria (19,3%). En conclusión, se debe fortalecer el conocimiento de la historia de la matemática, en la formación docente y en los estudios avanzados de los maestros.

La historia de la matemática hace parte de la cultura del docente de matemática, pero como muestra este estudio se carece de formación en este aspecto, quizás porque se desconoce su importancia en el ámbito educativo.

1.1.10. ¿Cómo contextualizar y dejar pensar la matemática?[16]

Sánchez (2013) propone usar la historia de la matemática, tanto en las clases como en los textos escolares, con el fin de que el nivel de razonamiento de los estudiantes y el interés por la materia aumente.

El tema sustentado en la teoría del desarrollo de la cultura matemática, fue el problema isoperimétrico con polígonos, el cual posee transcendencia, pero no se aborda tradicionalmente en la escuela. Tras el desarrollo de la temática se notó el interés y motivación por saber más acerca del tema. Lograr que el estudiante se motive y aprenda a pensar matemáticamente es posible a través del enfoque historicista como recurso didáctico, siempre y cuando se tenga presente que su uso deba ser moderado y consciente, sin limitarse a la narración de anécdotas.

La aplicación de la historia como recurso didáctico en el aula por parte del docente requiere dedicar más tiempo a la preparación de clases, lo cual no es fácil pero vale la pena. "*El profesor de matemáticas, aquel de la enseñanza media en particular, no tiene que formar lógicos puros, debe contribuir a formar hombres que razonen y para esto*

[16] Sánchez, C. (2013). ¿Cómo Contextualizar y Dejar Pensar la Matemática? CEMACYC, República Dominicana. Universidad de La Habana Cuba. ICMI. pp. 1-16.

debe ocuparse no solamente de los razonamientos rigurosos, sino sobre todo de la adquisición de las premisas de estos razonamientos y de la aplicación de sus resultados a lo concreto”[17].

La autora de esta tesis coincide con lo expuesto, pues a través de la historia de la matemática es posible contextualizar y mostrar a los estudiantes una matemática asequible e interesante, aunque ésta no es tarea fácil para los docentes, ya que no es común que en la formación académica este componente se desarrolle. En el proceso de enseñanza aprendizaje hacer uso de este recurso representa un desafío, dado que el docente debe prepararse para aprender y enseñar a pensar la matemática.

1.2. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diofánticas

Las ecuaciones diofánticas han sido objeto de estudio de muchos matemáticos en la historia; debido que se requiere que su solución sea en números enteros, esto trae como consecuencia que no sean ecuaciones que se resuelven con formas algorítmicas, sino que se necesita de mucho ingenio, análisis y conocimientos para llegar a su solución. (Esta característica de las ecuaciones diofánticas ha hecho que sean un tema de uso importante en las olimpiadas matemáticas) Por este motivo muchos docentes de matemáticas e investigadores en educación matemática ven importante incluirlas en los temas de álgebra como una forma de desarrollar el pensamiento matemático en los estudiantes.

[17] Lebesgue, H. (1930). *La Mesure des Grandeurs.* (La Medida de las Magnitudes).

1.2.1. An Introduction to Diophantine Equations[18]

Andreescu (2010), en su libro, muestra los diferentes tipos de ecuaciones diofánticas y las formas como podrían resolverse cada uno de ellos de acuerdo con sus características. En cada uno de los temas resuelve ejemplos, muchos de los cuales son problemas sacados de olimpiadas matemáticas y otros son de su propia autoría. También expone algunas aplicaciones tipo problema y su respectiva solución.

Lo que llama la atención de este texto es la gran variedad de métodos y ejercicios y sobre todo la forma tan sencilla como aparecen resueltos.

Es una muy buena guía a la hora de explicar las formas de solución de las ecuaciones diofánticas.

1.2.2. Methods of solving Diophantine equations in secondary education in Romania[19]

Lo que quiere analizar Costică (2014) en su estudio es el efecto que tiene en los alumnos universitarios conocer los métodos de solución de las ecuaciones diofánticas. El estudio se hizo a 20 estudiantes de matemáticas e informática de la facultad de ciencias de la educación en la Universidad de Bacau, en Rumania. Costică (2014) muestra a los estudiantes los aspectos más importantes de las ecuaciones diofánticas, los diferentes tipos de ecuaciones como son las lineales, las cuadráticas y las de orden superior, y después describe los diferentes métodos de solución que se pueden utilizar de acuerdo con el tipo de ecuación, como son parametrización, descomposición, con

[18] Andreescu, T., Andrica, D., & Cucurezeanu, I. (2010). *An introduction to Diophantine equations: a problem-based approach*. Springer Science & Business Media.
[19] Costică, L. (2014). *Methods of solving Diophantine equations in secondary education in Romania.* Science Journal of Education. Pp 22-32. Romania.

aritmética modular, con desigualdades, inducción matemática y el descenso infinito de Fermat. Al final muestra una serie de ejemplos aplicativos. Por último evalúa a los alumnos.

Los datos obtenidos demostraron que con la ayuda de los métodos de solución de ecuaciones diofánticas cuadráticas, los resultados mejoraron en todas las pruebas. Los estudiantes que obtuvieron malos resultados mejoraron en aspectos como el miedo o desaliento a la hora de resolver problemas.

La autora de esta tesis comparte la apreciación de que la solución de ecuaciones diofánticas cuadráticas es importante para el desarrollo del pensamiento matemático avanzado.

Conclusiones del capítulo 1

En este capítulo, se han estudiado diferentes investigaciones sobre la inclusión de la historia de la matemática en el aula de clase, en diferentes países del mundo. Entre éstas se pueden resaltar los siguientes autores: Jankvist (2009), Goktepe & Ozdemir (2013), Fauvel & Maanen (2000), Ho, W. (2008), Antónia, R. (2001), González, P. (2008), De Guzmán (1992), Belisario & González (2012), Sánchez (2013). Algunos de estos autores hacen referencia a la forma como debe hacerse esta inclusión y que no todos los temas se pueden trabajar de esta forma. También se han estudiado algunos investigadores sobre el tema de las ecuaciones diofanticas como son: Andreescu (2010) y Costică (2014. Ellos muestran los diferentes tipos de ecuaciones diofánticas, las propuestas hechas por diferentes matemáticos, los métodos posibles de hallar soluciones y trabajan aplicaciones de estas ecuaciones.

CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1. Teoría de la resolución de problemas. Problemas retadores

"… la didáctica no consiste en ofrecer un modelo para la enseñanza sino en producir un campo de cuestiones que permita poner a prueba cualquier situación, que conlleve a formular interrogantes sobre lo que sucede."[20]

La cita anterior (Guy Brousseau 1993), es el punto de partida que permite resaltar la importancia de la formulación de problemas en el desarrollo de la asignatura de matemáticas y sustento principal de este proyecto. Para ello el MEN (2006) plantea que un estudiante al solucionar problemas se hace partícipe en la construcción de su propio conocimiento. *"Las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos"*[21] (MEN, 2006).

Ahora, uno de los inconvenientes mayores que se presentan al definir un problema, es precisamente la concepción que se tiene de este término. Para Schoenfeld (1985), un problema no es inherente a una tarea matemática, más bien es una relación particular entre el individuo y la tarea donde la clave principal es la dificultad implícita en la resolución de dicha tarea. Charnay (1994) dice que un problema puede verse como una terna situación-alumno-entorno; el problema se da sólo si el alumno percibe

---

[20] Brousseau G. (1993). Fundamentos y Métodos de la didáctica de las Matemáticas. Universidad de Burdeos

[21] Ministerio de Educación Nacional. (2003). *Estandares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá. Recuperado 30-06-2017 de la URL: http://eduteka.icesi.edu.co/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf

una dificultad, en ese sentido lo que es un problema para un estudiante no necesariamente lo es para otro. En un sentido similar se pronuncia Callejo (1994) cuando señala que un problema es una situación cuya solución no es inmediatamente accesible al sujeto dado que no cuenta con un algoritmo que la resuelva de manera inmediata.

Tomando como base estos tres planteamientos, puede intuirse una definición de problema como toda situación que plantee un desafío y que en la medida de lo posible debe tener una solución.

La estructura básica de cualquier problema se puede generalizar de la siguiente manera:

- Situación inicial: Planteamiento del problema y reconocimiento de su entorno.
- Fundamento: Restricciones o pautas respecto de métodos, actividades, tipos de operaciones, etc., sobre los cuales hay acuerdos previos.
- Situación final: Objetivo del problema, es decir, el resultado buscado.
- Confrontación: Concordancia o no concordancia entre la situación final y el fundamento.

En matemáticas, un problema es una pregunta sobre objetos y estructuras que requiere una explicación y que posee las siguientes características:

- Es no-algorítmico en el sentido de que el camino para la acción no está completamente especificado con anterioridad.
- Es complejo en la medida que se presta a diferentes interpretaciones, generando en su desarrollo principio de incertidumbre.

- Es polifacético, ya que puede llevar a soluciones múltiples, cada una con puntos a favor y puntos en contra.
- Es abstracto, porque al abordarlo se requieren de mecanismos propios de regulación, basados en un fundamento teórico.
- Es desafiante, por generar una situación que requiere gran cantidad de trabajo mental con el propósito de desarrollar las estrategias y los criterios involucrados.

La resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas

Al hablar de la resolución de problemas en el campo de las matemáticas, se debe hacer referencia a la contribución hecha por el matemático húngaro George Pólya (1887–1985), quien es considerado el precursor de las teorías más significativas en cuanto a esta temática se refiere.

Los trabajos de Pólya, escritos entre los años cuarenta y sesenta del siglo XX, plantean el abordaje de la resolución de problemas como una serie de pasos que pueden ser utilizados en cualquier campo de la vida diaria.

En su libro *How to solve it* (*Cómo resolverlo*), Pólya describe una serie de pasos que permiten abordar un problema matemático desde un punto de vista más sencillo pero a la vez más detallado.

Como ejemplos que ilustran mejor este concepto se citan los siguientes:

- Si un problema no se entiende, se debe dibujar un esquema.
- Si no se encuentra la solución de un problema, se debe suponer que ya se tiene y mirar qué se puede deducir de ella.

- Si el problema es abstracto (algebraico), se debe probar una solución concreta (numérica).

La generalización de las heurísticas planteadas por Pólya, se resumen en un trabajo denominado el método de los cuatro pasos, el cual se describe a continuación.

El método de cuatro pasos de Pólya.

Este método, enfocado a la resolución de problemas matemáticos, se constituye en una guía que permite abordar cualquier problema, sin importar el grado de dificultad que éste pueda acarrear.

Los cuatro pasos del método de Pólya se sintetizan así:

- Entendimiento

Pólya sostiene que "*la laguna más frecuente al resolver un problema es quizá la incompleta comprensión del mismo, producto quizá de una falta de concentración*"[22].

Por tanto, un problema se considera entendido cuando un estudiante que se enfrente a él está en la capacidad de hacer y responderse a sí mismo las siguientes preguntas:

¿Entiendo todo lo que dice?

¿Puedo replantear el problema con mis palabras?

¿Distingo cuáles son los datos?

¿Sé a dónde quiero llegar?

¿Hay suficiente información?

[22] Pólya, G. (1981). *Cómo Plantear y Resolver Problemas*. Editorial Trillas México. Recuperado de 30 de Junio de la URL: https://es.scribd.com/doc/228913306/Como-Plantear-y-Resolver-Problemas, p. 81.

¿Hay información extraña?

¿Es este problema similar a algún otro que haya resuelto antes?

- Elaboración de un plan

Para Pólya en este paso, el problema debe relacionarse con otros semejantes, lo que debe permitir relacionar resultados y establecer analogías.

Algunos interrogantes útiles en esta etapa son:

¿Me he encontrado con un problema semejante?

¿He visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?

¿Conozco un problema relacionado?

¿Conozco algún teorema que me pueda ser útil?

¿Puedo enunciar el problema en otra forma?

¿Puedo plantearlo en forma diferente nuevamente?

Los anteriores interrogantes, se pueden resolver utilizando estrategias como:

Uso de variables, modelos, fórmulas, coordenadas y demás herramientas matemáticas.

Elaboración de listas, figuras y diagramas que permitan organizar la información.

Resolución de problemas similares más simples.

- Ejecución del plan

En esta parte del proceso, se han de implementar las estrategias que permitan solucionar completamente el problema o que conduzcan a tomar un camino alterno para su resolución.

Durante esta etapa es fundamental examinar todos los detalles a fin de recalcar la diferencia entre percibir y demostrar que un paso es correcto, es decir, establecer la diferencia que hay entre un problema por resolver y un problema por demostrar.

Por esta razón, el alumno debe plantearse los siguientes cuestionamientos:

¿Puedo ver claramente que el paso es correcto?

¿Puedo demostrarlo?

- Examinar la solución

Ésta es también denominada la etapa de la visión retrospectiva. En esta fase del proceso es muy importante detenerse a observar qué fue lo que se hizo; se necesita verificar el resultado y el razonamiento, seguido de preguntarse:

¿Puedo verificar el resultado?

¿Puedo verificar el razonamiento?

¿Puedo obtener el resultado en forma diferente?

¿Puedo emplear el resultado o el método en algún otro problema?

Estas cuestiones dan una retroalimentación muy interesante para resolver otros problemas futuros. Pólya plantea que cuando se resuelve un problema (que es en sí el objetivo inmediato), también se están creando habilidades posteriores. En otras palabras, cuando se hace una visión retrospectiva de lo que se resuelve, la solución se convierte en una nueva herramienta a la hora de enfrentar un problema nuevo.

De lo anterior se puede decir que los rasgos que caracterizan el método de Pólya

(1981) para la resolución de problemas, no sólo se presentan en las cuatro fases, sino también en la elaboración y aplicación de una serie de preguntas y sugerencias que inducen necesariamente a los procesos de revisión y retrospección, este último aplicado principalmente en la última fase del método. Respecto a estas preguntas, él sostiene que "*si se plantean así mismo dichas preguntas y sugerencias en forma adecuada, éstas pueden ayudar a resolver el problema*"[23].

- El papel del docente en el proceso

Un aspecto relevante en todo este proceso es la función que tiene el docente. Según Pólya, el papel del maestro es "ayudar al alumno", pero es subjetivo determinar si un profesor está ayudando mucho o está ayudando poco.

Por ejemplo, no se puede plantear un problema muy difícil y abandonar al estudiante a su propia suerte, pero tampoco, plantear un problema y que el mismo docente lo resuelva. Si se hace lo último no se enseña nada significativo al estudiante; en otras palabras, es importante que el alumno asuma una parte adecuada del trabajo.

Hacer preguntas que se le hubieran podido ocurrir al alumno es también crucial en el proceso. Es por eso que Pólya plantea constantemente que el profesor debe ponerse en el rol del estudiante. Evidentemente, cuando el maestro propone un problema y sabe cómo se resuelve, presenta la solución de forma que todo parece muy natural, sin embargo, el mismo estudiante cuestiona si realmente se le puede ocurrir a él esa solución, de allí nacen una serie de circunstancias que apuntan al profesor como la única persona capaz de encontrar el mecanismo de solución para el problema.

[23] Pólya, G. (1981). *Cómo Plantear y Resolver Problemas*. Editorial Trillas México. Recuperado de 10 de Julio de la URL: https://es.scribd.com/doc/228913306/Como-Plantear-y-Resolver-Problemas. p. 21.

Como estrategias de resolución, plantea Pólya que se deben implementar entre otras las siguientes:

- Presentación de preguntas y alternativas de resolución lógicas y acordes al contexto, las cuales no deben ser producto del azar, es decir no se deben proponer problemas que parezcan imposibles, sino que realmente sean adecuados y que se encuentren al nivel del estudiante.

- Despertar el interés del alumno en resolver el problema mediante la inclusión de procesos como la variación, el desglose, la particularización y la generalización.

- Dar un tiempo prudencial en la exposición del problema: el cual debe atraer a los estudiantes hacia él y motivar su curiosidad.

- El profesor debe ser un modelo para la resolución de problemas, por lo cual él mismo debe hacer las preguntas cuando resuelve un problema en la clase.

En conclusión, un profesor de matemáticas debe tener en cuenta que un razonamiento presentado en forma correcta pero con un método riguroso, puede no ser instructivo. Esto sucede así si no se hace comprender el propósito de cada una de las etapas; es decir, si no se llega a comprender el modo por el cual se ha obtenido dicho razonamiento.

De igual manera, el profesor debe mostrar el rostro humano de esta disciplina: ¿dónde se equivoca?, ¿dónde se conjetura?, ¿dónde las conjeturas se desechan o siguen ahí? Si hay problemas abiertos se presentan a discusión y lo importante es la aprehensión no solamente de conocimiento sino de respeto por sí mismo y los demás[24].

2.2. La historia de la matemática como recurso didáctico en el aula

La forma de aprender la matemática para que su proceso de aprendizaje sea significativo ha sido un tema de interés a lo largo de los años y son muchas las metodologías y técnicas que han surgido para garantizar este aprendizaje, despertar el interés por la matemática y captar la atención de los estudiantes. Este proceso es un desafío para el docente, pues supone buscar alternativas que incentiven a los estudiantes a construir nuevos conocimientos**.**

En el estudio ICMI (2000) sobre el papel de la historia de la matemática en educación matemática se analizó en forma completa la integración de la historia de las matemáticas en su enseñanza-aprendizaje como un aspecto motivador para los estudiantes. Este estudio desarrolla una metodología basada en la historia como recurso didáctico. Aquí, la información es presentada de la siguiente forma:

- Análisis del impacto de la metodología en el currículo de los diferentes países.
- Consideraciones filosóficas, multiculturales e interdisciplinarias relacionadas con esta metodología.
- Implementación de la metodología (se muestra de diversas maneras la forma cómo se puede implementar en el aula).
- Análisis de resultados y viabilidad con respecto a la implementación.

[24]Polya, G. (1981). *Cómo Plantear y Resolver Problemas*. Editorial Trillas México. Recuperado de 14 de octubre de la URL: https://es.scribd.com/doc/228913306/Como-Plantear-y-Resolver-Problemas

“La historia de las matemáticas puede ser un recurso útil para la comprensión de los procesos de formación del pensamiento matemático, y para explorar la forma en que esa comprensión se puede utilizar en el diseño de las actividades de clase”[25].

La autora de esta tesis considera que la metodología planteada en este documento es adecuada como recurso didáctico en el desarrollo de las actividades sobre las ecuaciones diofánticas cuadráticas.

En los últimos años se han realizado importante investigaciones sobre el uso de la historia como recurso didáctico, algunos de los autores que han aportado a este tema son: Katz (1990), De Guzmán (1992), Bidwell (1993), Garuti (1997), Fauvel & Maanen (2000), Marshall & Rich (2000), Tzanakis (2002), Liu (2003), González (2004), Siu (2005), Groenwald (2005), Sierra (2007), Arcavi (2008), Jankvist (2009), Guacaneme (2010), Abdelfatah (2011), Clark (2012), Sánchez (2013), Gazit (2013), Quintero (2015), entre otros.

“Los estudiantes pueden participar con más ganas de resolver los problemas de siglos de antigüedad que desencadenaron desarrollos matemáticos tempranos (Swetz, 1989), que en hacer los ejercicios de revisión que siempre se encuentran al final de cada capítulo de sus libros de texto (Simonson, 2000)”.

“La integración de la historia de las matemáticas en la enseñanza en al aula se puede hacer implícita o explícitamente. Una integración implícita enfatiza "el rediseño, atajos y la señalización de la red ... el camino que apareció históricamente y condujo a la forma moderna de la matemática" (Tzanakis y Arcavi, 2000, p. 210), la historia de las

[25] Fauvel, J., & van Maanen, J. A. (Eds.). *History in mathematics education: The ICMI study*. Dordrecht: Kluwer 2000, pp. 143-170

matemáticas actúa como una guía para el diseño de la instrucción (van Ameron, 2001)".

Urbaneja (2004) considera "*Si el conocer y comprender el pasado componen el saber, ellos deberían ser la brújula que oriente nuestra manera de actuar y transformar la realidad"*[26]*.* De Guzmán (1993) aduce que la historia es un medio apropiado y la cataloga como una tendencia innovadora para la enseñanza de la matemática. Además, pone de manifiesto que la historia de la matemática, unida a la resolución de problemas garantizan un aprendizaje activo. Estos criterios dados por de Guzmán se asumen en el desarrollo de las actividades de la tesis.

"Las dos razones que más comúnmente se ofrecen para la inclusión de la dimensión histórica en la enseñanza de la matemática son que la historia provee una oportunidad para desarrollar nuestra visión de lo que es realmente la matemática y que nos permite tener una mejor comprensión de conceptos y teorías (Barbin et al., 2000). [27]

Sierra (1997) afirma que *"… la historia de las matemáticas puede ayudar a restituir la dimensión cultural a menudo tan olvidada en el ámbito escolar…"*[28]*;* esto permite al estudiante conocer y reflexionar sobre el entorno que está inmerso en el conocimiento matemático. Este aspecto es poco abordado debido al desconocimiento de las formas de incluirlo en el aula. Algunos autores como Bell (1937), no conciben la enseñanza

---

[26] Urbaneja, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma: Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, (45), 17-28.
[27] Rodríguez, M. & Vásquez, M. (2012). Usos de la historia en la enseñanza de la matemática. *VIII Festival Internacional de Matemáticas.*
[28] Sierra, M. (2009). Notas de Historia de las Matemáticas para el Currículo de Secundaria. *Colección Digital Eudoxus*, *1*(5).

apartada de la historia: *“Ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las matemáticas”*[29].

La hipótesis planteada en el ICMI del uso de la historia como un recurso didáctico en el aula, se sustenta, según Barbin (2000), en dos afirmaciones, que se consideran apropiadas para el desarrolla de las actividades de esta tesis. Estas son:

“Un estudiante que está interesado en la matemática, hará más trabajo.

El estudiante que realiza más trabajo, tiene mayor posibilidad de alcanzar el aprendizaje y la comprensión”[30].

Barbin (2000) describe variadas reacciones obtenidas tras el uso de la historia como recurso didáctico. Afirma que, en esa metodología, la matemática pasa desde el estado de una ciencia inerte a una ciencia viva. Tzanakis y Arcavi (2000) destacan las potencialidades de la integración de la historia de las matemáticas en el aula de clases, como apoyo a su enseñanza. Éstas son:

El aprendizaje de la matemática.

El desarrollo de criterios sobre la naturaleza y la actividad matemática.

El conocimiento didáctico y pedagógico de los profesores.

La predisposición afectiva hacia las matemáticas.

La matemática es resultado del esfuerzo cultural humano.

---

[29] Bell, E. (1985). Historia de las Matemáticas. Fondo de Cultura Económica. México. p. 54.
[30] Barbin, E (2000). The historical dimension: from teacher to learner. History in Mathematics Education. The ICMI Study, p. 64.

Fernández (2010), afirma que los objetivos que debe poseer la historia como un recurso didáctico son:

"Hacer patente la forma peculiar de aparecer las ideas en matemáticas.

Enmarcar temporal y espacialmente las grandes ideas, problemas, junto con su motivación y precedentes.

Señalar los problemas abiertos de cada época, su evolución, la situación en la que se encuentran actualmente.

Apuntar las conexiones históricas de la matemática con otras ciencias, en cuya interacción han surgido tradicionalmente gran cantidad de ideas importantes"[31].

Algunos autores han sugerido modelos o marcos para la enseñanza en el aula de inspiración histórica. Algunos de éstos se describen a continuación.

Dada la importancia que tiene la historia como recurso didáctico en el aula, Tzanakis y Arcavi (2000) consideran tres maneras diferentes de incluirla en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática:

Ofrecer situaciones y/o problemas con información histórica de manera directa.

Aprender temas matemáticos a través de un enfoque de enseñanza aprendizaje estimulado por la historia.

Desarrollar una conciencia profunda del contexto cultural de la matemática.

Estas tres variantes de utilizar la historia de la matemática en el aula pueden resumirse en: directa, indirecta y de profundización. La autora de esta tesis asume los

---

[31] Fernández, S., Aubanell, A., Laserna, D. B., & Dedò, M. (2010). *Escuela de educación matemática" Miguel de Guzmán": enseñar divulgando*. Ministerio de Educación.

planteamientos del estudio ICMI sobre esta temática, en particular los criterios dados por Tzanakis y Arcavi (2000) y los objetivos planteados por Fernández, Aubanell, Laserna, & Dedò (2010), para los sustentos de las actividades propuestas. También considera que la historia de la matemática permite identificar ideas, intuiciones, situaciones que dieron lugar a los diferentes conceptos, que propician ver la matemática como una ciencia en proceso de cambio, en la cual es necesario aportar.

Según Menghini (2000), se debe combinar la historia con la forma didáctica adecuada, de acuerdo a la complejidad del tema a tratar. Es decir, la historia se puede utilizar para ayudar al mejor entendimiento de un tema que se dificulta para los estudiantes, o dando un conocimiento adicional, con el fin de ayudar en la comprensión de un tema más general.

La autora de esta tesis entiende que la historia como recurso didáctico es una estrategia donde se plantea la inclusión de situaciones históricas en el desarrollo de temas con alguna complejidad, como ayuda para que el estudiante amplíe sus posibilidades de entendimiento de éste.

Es necesario destacar que para la implementación de esta metodología en el aula de clase es indispensable que el docente posea un conocimiento sólido de la historia de la matemática, y del contenido a tratar, teniendo en cuenta que no todos los contenidos, en este caso algebraicos, son propicios para su implementación. En resumen, se puede concretar que esta metodología de hacer uso de la historia como recurso didáctico, tiene las siguientes potencialidades para la resolución de problemas de ecuaciones diofánticas cuadráticas:

- Propicia la motivación y el interés por el aprendizaje de la matemática.

- Permite resolver ecuaciones diofánticas cuadráticas considerando el desarrollo y evolución de la matemática.
- Amplía el conocimiento de los estudiantes sobre las formas de solución de ecuaciones cuadráticas.
- Integra la resolución de problemas y los contenidos previos, para que el estudiante descubra las soluciones de las ecuaciones diofánticas cuadráticas.
- Desarrolla el pensamiento matemático en los estudiantes.
- Mejora la cultura matemática del estudiante.
- Propicia la formación integral del estudiante.

2.3. Referentes sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diofánticas en el noveno grado

El estudio diofántico es una parte de las matemáticas que se dedica a hallar soluciones enteras a diferentes tipos de ecuaciones algebraicas: lineales, cuadráticas, de orden superior, sistemas de ecuaciones, entre otras.

El desarrollo matemático en el oriente próximo empezó con las prácticas de las técnicas de agrimensura. Estos conocimientos se transmitieron a las escuelas sumerias[32] (2100 a. C.), donde evolucionaron hacia materias más sofisticadas y teóricas, transmitiéndose a otras culturas y pueblos cercanos. Existen muchos escritos del período babilónico (2000-1600 a. C.), en los cuales se puede ver que la forma de

[32] Yuste, P. (2008). Ecuaciones cuadráticas y procedimientos algorítmicos. Diofanto y las matemáticas en Mesopotamia:(Quadratic equations and algorithmic procedures. Diophantus and Mesopotamian mathematics). *THEORIA. Revista de Teoría, Historia y Fundamentos de la Ciencia*, *23*(2), 219-244.

enseñanza de las matemáticas en las escuelas de escribas consistía en la resolución de ejercicios prácticos.

Los babilónicos para la solución de problemas utilizaban procedimientos numéricos, algebraicos y geométricos; esto se sabe por el lenguaje utilizado en las tablillas, en el momento que se describe los cálculos que se deben hacer. En muchas ocasiones, los ejercicios propuestos concluían con una expresión que coincide exactamente con el algoritmo que resuelve las ecuaciones de segundo grado.

Ejercicios parecidos a los encontrados en las tablillas mesopotámicas se encontraron después en la *Aritmética* de Diofanto (250 d.C.). Según Yuste (2008), la técnica visual utilizada por la antigua babilonia fue sustituida en el transcurso del tiempo por formas numéricas y más adelante esas técnicas las cambió Diofanto en otras más teóricas, pero no de una manera radical, sino poco a poco, mediante el enunciado de un algoritmo que solamente utilizaba de manera restringida y sin desprenderse del todo de los tradicionales métodos visuales.

En la India, desde aproxvimadamente en 1500 a. C., ya se resolvían ecuaciones diofánticas. "En los siglos VIII y VI a. C., los Shulba Sutras usaban estas ecuaciones para solucionar problemas geométrico. Baudhayana (s. VII a. C.) encontró dos conjuntos de soluciones en enteros positivos a un conjunto de ecuaciones diofánticas simultáneas. Apastamba (s. VI a. C.) usaba ecuaciones diofánticas simultáneas con más de cinco incógnitas"[33]. "Aryabhata en el año 499 d.C. da la primera descripción explícita de la solución entera general de la ecuación diofántica lineal $ax + by = c$.

[33] Perez, S. (2011). Ecuaciones Diofantinas. Tesis de pregrado. Universidad de Panamá. Panamá

Brahmagupta trabaja en el año 628 d.C. ecuaciones diofánticas más difíciles, como la ecuación $61x^2 + 1 = y^2$ que es una forma particular de la ecuación de Pell"[34]. Esta ecuación fue propuesta por Fermat y su solución la dio 70 años después Euler.

Este tipo de ecuaciones se llaman diofánticas en honor al matemático griego Diofanto quien hizo su obra en Alejandría. Él es llamado el "padre del algebra" y mejor conocido por su libro *Aritmética,* un trabajo donde plantea y resuelve 189 problemas algebraicos y de teoría de números. Fue uno de los primeros en introducir la notación simbólica en matemáticas. Dejó trece libros de aritmética, de los cuales sólo se conocen los seis primeros.

Los tipos de ecuaciones cuadráticas que aparecen en la *Aritmética* de Diofanto son:

- Ternas pitagóricas
- Ecuacion de Pell: $x^2 = Ny^2 + d$
- Ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

"Respecto a una ecuación diofántica surgen tres problemas básicos: Problema 1. ¿Es solucionable la ecuación?

Problema 2. ¿En caso de solvencia es el número de sus soluciones finito o infinito?

Problema 3**.** En caso de solvencia, determinar todas sus soluciones."[35]

Para Andreescu (2002) las ecuaciones diofánticas son un estudio que favorece el desarrollo del pensamiento lógico matemático en los estudiantes. Por esta razón ha estudiado este tipo de ecuaciones y utiliza un enfoque basado en problemas, los cuales

---

[34] Oliván, E. (2012). *Ecuaciones Diofánticas*. Publicaciones Didácticas. No.16 junio 2012. Pág. 51
[35] Andreescu, T., Andrica, D., & Cucurezeanu, I. (2010). *An introduction to Diophantine equations: a problem-based approach*. Springer Science & Business Media.

resuelve con técnicas no rutinarias ni convencionales. Además, hace un estudio especial en el cuál presenta dos métodos básicos para investigar y motivar el aprendizaje de las ecuaciones diofánticas cuadráticas: la teoría de las fracciones continuadas y los campos cuadráticos. También habla sobre la ecuación de Pell y algunas ecuaciones cuadráticas importantes y aplicaciones diofánticas. La autora de esta tesis considera que estos estudios son muy útiles para la configuración de las actividades en el aula de clase.

Burton (1969) recopila una serie de ejercicios de la *Aritmética,* entre esos las ecuaciones cuadráticas y sus respectivas soluciones diofánticas. También trabaja los métodos utilizados por las culturas griega, china e india, para resolver las ecuaciones cuadráticas, principalmente las ternas pitagóricas y las ecuaciones de Pell; y además, el método arábigo para solucionar las cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Esta tesis se dirige a trabajar principalmente con las ecuaciones diofánticas cuadráticas que tienen que ver con las ternas pitagóricas, con el último teorema de Fermat, con las ecuaciones de Pell y con las cuadráticas de la forma

$ax^2 + bx + c = 0$.

2.4 Referentes del pensamiento algebraico

Para Godino & Font (2000) el razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas[36]. "A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje

[36] Godino, J. & Font, V. (2000). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Granada. P 774

y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones. Este tipo de razonamiento está en el corazón de las matemáticas concebida como la ciencia de los patrones y el orden, ya que es difícil encontrar un área de las matemáticas en la que formalizar y generalizar no sea central”[37].

“El pensamiento algebraico, como forma particular de reflexionar matemáticamente, es caracterizado por Radford (2006) mediante tres elementos interrelacionados: el sentido de la indeterminación, la analicidad y la designación simbólica de sus objetos”[38].

“El uso de letras y símbolos convencionales del álgebra conlleva pensamiento algebraico (Kieran 1996).

Permite analizar relaciones entre cantidades, reconocer estructuras, analizar cambios, hacer generalizaciones, resolver problemas, modelar, justificar, demostrar y predecir (Bell,1995; Kieran, 2006).

Según Lins y Kaput, hay algunos indicadores para caracterizar el pensamiento algebraico. Genera actos deliberados de generalización y expresión de la misma, y conlleva razonamientos basados en formas de generalización sintácticamente estructuradas que exigen de procesos sintácticos y semánticos. “[39]

---

[37] Butto, C & Rojano, T. (2004). Introducion temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. Educación Matemática, 16 (1), 113-148

[38] Rojas, P. & Vergel, R. (2013). *Procesos de Generalizacion y Pensamiento Algebraico*. Edición especial. Educacion, Ciencia y Tecnología. Bogotá

[39] Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. Investigación en Educación Matemática. 16, p. 75 - 94.

2.5. Comunidad de práctica de Wenger

Una de las bases en la cual se ha fundado el proceso de enseñanza y aprendizaje que rige la educación en la escuela colombiana, hace referencia a que este desarrollo es de carácter particular, que el aprender es un proceso individual más no social y que muestra características propias, entre las que se destacan el ser evaluable, jerárquico, vertical y hasta cierto punto separado de las actividades cotidianas, es decir descontextualizado. Por tal motivo, muchos estudiantes ven la formación institucionalizada como algo arduo, irrelevante, aburrido y sin sentido para para la vida, ya que sienten que la educación no hace parte de una comunidad que los represente y los entienda.

Ante esta perspectiva, surge el siguiente interrogante que soporta la teoría social del aprendizaje: ¿Qué ocurriría sí se supusiera que el aprender es un fenómeno fundamentalmente social?

Esta pregunta, tiene sustento en la medida que el ser humano es ser social por naturaleza, que el conocer es cuestión de competencia, de participación en la búsqueda de objetivos y de desarrollo de experiencias significativas que produzcan aprendizaje.

Como reflejo de estos supuestos, el principal centro de interés de esta teoría reside en el aprendizaje escolar como participación social, ya que es en este contexto específico, donde los estudiantes están inmersos en situaciones de construcción significativa de conocimiento.

A continuación, se desarrolla el concepto formulado por el teórico suizo en educación Étienne Wenger y denominado "Comunidad de Práctica", el cual se tratará en situaciones tomadas del trabajo empírico que se pretende desarrollar con el grupo de estudiantes de noveno grado de la I.E.D. Colegio Pablo de Tarso, poniendo atención a las relaciones personales que se pueden establecer en sus miembros y el papel que juegan éstas en la construcción y desarrollo de objetivos específicos.

Un primer acercamiento a este concepto, describe *"Una Comunidad de Práctica como un conjunto de relaciones entre personas, la actividad y el mundo a través del tiempo y en relación con otras comunidades de práctica tangenciales y con las que solapa. Una Comunidad de Práctica es una condición intrínseca para que exista el conocimiento, al menos porque aporta el soporte interpretativo necesario que da sentido a su herencia". (Lave y Wenger, 1991, P. 98)*[40]

Por su parte Wenger, McDermott, y Snyder (2002), plantean que la comunidad de práctica es *"un grupo de personas que comparten una preocupación, un conjunto de problemas o un interés común acerca de un tema, y que profundizan su conocimiento y pericia en esta área a través de una interacción continuada*"[41].

Camargo (2010) afirma que la comunidad de práctica en las clases de matemática *"… se conforma libremente y por el tiempo que se requiera para llevar a cabo la empresa que se propone, pero también puede existir al interior de una organización social*

---

[40] Rodrigo, M. J. (1997). *La construcción del conocimiento escolar* (p.14). Barcelona: Paidós. Recuperado 26 de Febrero de 2016 de la URL: http://www.terras.edu.ar/biblioteca/3/EEDU_Lacasa_Unidad_1.pdf
[41] Wenger, E., McDermott, R. y Snyder, W. (2002). Cultivating Communities of Practice: A Guide to Managing Knowledge. Boston, Massachusetts: Harvard Business School Press. ISBN 1-57851-330-8.

institucionalizada. En el segundo caso, probablemente se adapta a condicionantes de la institución, tales como los tiempos de iniciación y terminación, la inclusión de nuevos miembros, etc…".[42]

Lo expuesto anteriormente, permite afirmar que la comunidad de práctica como teoría se fundamenta en la naturaleza del conocimiento y del aprendizaje, teniendo presente para ello que en esencia el ser humano es un ser social, que el conocimiento genera competencia, que la participación y el compromiso son fundamentales en el aprendizaje y que este último es gestor de significado. Por tanto, las comunidades de práctica son una parte integral de la vida, se pueden hallar en cualquier contexto como la casa, el trabajo, la escuela o en las aficiones, y pretenden integrar los componentes necesarios para caracterizar la participación social como un proceso de aprender y de conocer. Estos componentes, que se muestran en la Figura 1, permiten visualizar el aprendizaje como una actividad que se da de forma grupal y no separada, en la cual el significado (posibilidad de darle sentido a las experiencias para construir un aprendizaje), la práctica (recursos que propician el compromiso en la acción), la comunidad (configuración social, donde los grupos se definen) y la identidad (cambio generado por el aprendizaje) están interconectados, se definen mutuamente y pueden intercambiarse entre sí, sin que la figura cambie de sentido.

[42] Camargo, L. (2010). Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria. Tesis para optar al Grado de Doctora en Matemáticas. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia. p. 13.

Figura 1. Componentes de una teoría social de aprendizaje: inventario inicial[43].

Por consiguiente, es claro que para este planteamiento, el lugar propicio en el que surge el aprendizaje es en la comunidad de práctica, ya que allí es importante tener en cuenta que éste no sólo se refiere a la adquisición de conocimientos, sino también a la interpretación de un mundo real en el que hay que ponerlos en funcionamiento. Luego, la comunidad es desde este punto de vista, el entorno del aprendizaje y la práctica, y al adoptar este enfoque en el desarrollo del proyecto, se intenta generar un proceso de participación respecto al estudio de la matemática, utilizando para ello la historia como recurso, experiencia valorada por la comunidad implícita y la cual busca buenos indicadores de respuesta por parte los estudiantes de grado noveno en relación con la temática propuesta.

Esta pertenencia a una comunidad de práctica por parte de los estudiantes, Wenger (1998) la enfatiza en la arquitectura del diseño del aprendizaje, la cual define como

[43] Wenger, E. (1998). *Comunidades de práctica*. Editorial Paidós. p. 23. Recuperado el 27 de febrero del 2017 de la URL: http://cmap.javeriana.edu.co/servlet/SBReadResourceServlet?rid=1JP2KX093-1GX1ZY0-28S.

una colonización sistemática, planificada, reflexiva del tiempo y del espacio al servicio de una tarea y caracterizada, no por ser una cuestión de elegir entre elementos en tensión, sino por ser un mecanismo para combinarlos de una manera productiva, de forma que se traten los contenidos del aprendizaje como una experiencia viva, que permitan, entre otras, crear y compartir significados, incluir lo emergente convirtiéndolo en oportunidad, construir trayectoria, relacionar diversas localidades y dar respuesta a entes institucionales (wenger 1998).

Por tanto un diseño dado conlleva opciones, invenciones y soluciones a lo largo de cada dimensión, debe generar energía social a toda la comunidad y dirigir el aprendizaje. Para ello Wenger propone tres tipos de componentes básicos en torno a él: compromiso, imaginación y alineación; éstos al combinarse pueden formar comunidades de aprendizaje que son esquematizadas en la Figura 2.

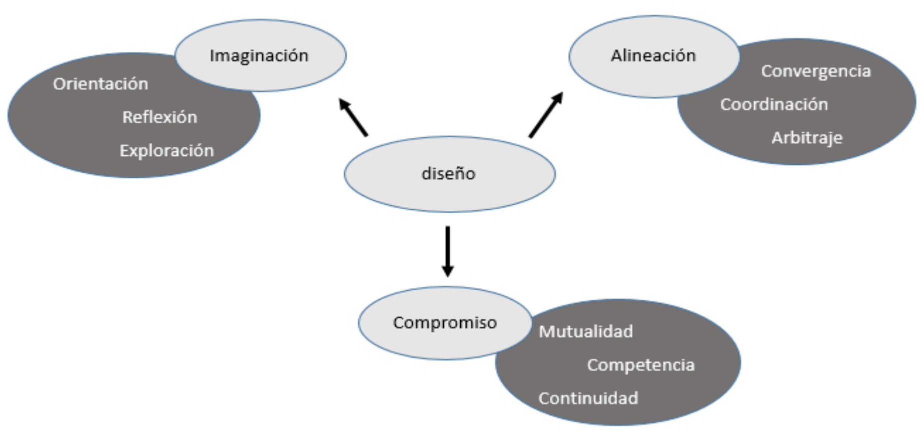


Figura 2. Tres infraestructuras del aprendizaje[44].

[44] Wenger, E. (1998). *Comunidades de práctica*. Editorial Paidós. pag.282. Recuperado el 28 de febrero del 2016 de la URL:http://cmap.javeriana.edu.co/servlet/SBReadResourceServlet?rid=1JP2KX093-1GX1ZY0-28S.

Cuando Wenger (1998) habla del compromiso, se refiere a la formación de la comunidad; para él, compromiso no sólo es estar comprometido con la actividad realizada, sino de construir comunidades, con energía social, donde prolifere la interactividad y el conocimiento emergente. Para el apoyo de este proceso, una comunidad de práctica debe incluir medios de mutualidad, competencia y continuidad, que vienen a ser los que regulan el proceso de aprendizaje en torno a ella, ya que abren espacios de socialización que son convenientes en el aprendizaje.

La imaginación es importante en un proceso de aprendizaje porque permite generar nuevas ideas y medios para la construcción del conocimiento. Por ello, un diseño de aprendizaje debe incluir medios de orientación, reflexión y exploración. En la orientación se encuentra la situación en el espacio, en el poder y en el significado, en la reflexión se encuentran las reflexiones, modelos y representaciones de pautas, y en la exploración se encuentran los escenarios alternativos, las distintas posibilidades y simulaciones de prever el futuro.

La alineación trata de enfocar la comunidad de práctica hacia una meta fija, de este modo la imaginación ofrece distintas alternativas y la alineación las enfoca en un solo objetivo, el cual depende de la conexión a los marcos de convergencia, coordinación y resolución de conflictos que determinan la eficacia social de las acciones.

A manera de síntesis, en la perspectiva social, el aprendizaje se puede resumir teniendo en cuenta los siguientes principios. Aprender es inherente a la naturaleza humana, implica negociar nuevos significados, crea estructuras emergentes, es una experiencia social, transforma identidades, constituye trayectorias de participación, trata con límites y es cuestión de interacción con un marco global. Por tanto, la relevancia de una perspectiva social en una comunidad de práctica, no se limita a unas situaciones de aprendizaje concretas, porque en última instancia, todo aprendizaje adquiere su significado en el tipo de persona en que el aprendiz se convierte, independientemente de la actividad que se esté realizando.

Conclusiones del Capítulo 2.

La teoría de la resolución de problemas es uno de los marcos teóricos que sustenta la presente tesis. Varios autores se destacan en este campo, entre ellos están Polya (1965), Schoenfeld (1985), Charnay (1994), Callejo (1994). Estos autores realizan aportes, definiciones y estrategias para la resolución de problemas. En la tesis se asume la propuesta de Polya (1965).

La inclusión de la historia de la matemática en el aula de clases ha sido un tema que se ha investigado por muchos en los últimos años. Es de destacar el trabajo de Fauvel & Maanen (2000), ya que ellos recopilan una serie de información respecto a lo que se ha hecho y se está haciendo en el mundo sobre este tema. Swetz, (1989), Tzanakis y Arcavi (2000), Barbin (2000), Bell (1937), entre otros, hablan sobre importancia de la historia de la matemática como recurso didáctico.

En cuanto al estudio de las ecuaciones diofánticas cuadráticas se encuentra Andreescu (2002) quien trata el tema profundamente en cuanto a los tipos de ecuaciones y los métodos de solución, y Burton (1969), quien no sólo estudió las ecuaciones diofánticas, sino también toda la historia alrededor de ellas.

Frente a la comunidad de práctica de Wenger se asume la definición y tratamiento de Wenger & Trayner (2015), en los cuales un grupo de personas que interactúan con regularidad pueden tener un mejor aprendizaje al compartir una pasión por algo.

Las actividades propuestas en esta tesis buscan el trabajo en comunidades de práctica en la que los estudiantes proponen soluciones a un problema de la historia dado. Es importante el trabajo en comunidades porque se está trabajando desde la posición que ello aumenta la participación de los estudiantes, ya que el hecho de trabajar en grupo les da más seguridad y disminuye la timidez.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación sobre historia de las matemáticas como recurso para la enseñanza de las ecuaciones diofánticas cuadráticas, abre nuevos caminos hacia la aplicación de la matemática a la vida del estudiante. A continuación, se presenta el tipo de investigación, el alcance del estudio y los métodos utilizados.

3.1. Tipo o enfoque de investigación

La investigación es de tipo cualitativo, ya que se observan diferentes aspectos en el desarrollo de las actividades. Uno de ellos es ver si la percepción que el estudiante tiene de la matemática cambia y, por otro lado, analizar si la disposición y autonomía frente a la búsqueda de la solución de problemas aumenta.

Este tipo de investigación tiene un método sistemático de entrelazar componentes porque se toman dos temas que no se utilizan en la enseñanza tradicional, uno es la historia de la matemática como recurso didáctico para la enseñanza aprendizaje y el otro es la temática de las ecuaciones diofánticas cuadráticas, que no se encuentra en el plan de estudios del grado noveno en secundaria, con el fin de desarrollar el pensamiento algebraico de los estudiantes a partir de la resolución de problemas no rutinarios, aumentar la motivación hacia el aprendizaje de la matemática y cambiar la forma cómo los estudiantes perciben esta área.

También la investigación que se realiza tiene un enfoque de investigación acción, pues "constituye un proceso de reflexión-acción-cambio-reflexión, por y para el mejoramiento de la práctica del docente, mediante la participación activa de éste, dirigido a superar los problemas y las necesidades del aula, la escuela y la comunidad, posibilitando el diálogo entre teoría-práctica-teoría”[45].

La investigación acción permite transformar, mejorar y enriquecer el quehacer docente. En el presente trabajo de tesis, la investigación acción se aplica a través de la implementación de actividades sobre la historia de la matemática como recurso para la enseñanza de las ecuaciones diofánticas cuadráticas, permitiendo mejorar la disposición y el interés en los estudiantes de grado noveno y logrando así en cada uno de ellos un aprendizaje significativo.

Los aportes de la investigación acción en los procesos pedagógicos relacionados con la enseñanza de las ecuaciones diofánticas cuadráticas facilita en los estudiantes la adquisición de un razonamiento independiente y libre que les permite plantear, expresar y comprobar sus ideas, compartirlas y confrontarlas con los demás en cualquier contexto.

3.2. Alcance del estudio

Con este estudio lo que se quiere es comprobar si al incluir en el plan de estudios de grado noveno, específicamente en el tema de ecuación cuadrática, las ecuaciones diofánticas cuadráticas, utilizando como herramienta didáctica la historia de la matemática por medio de problemas históricos, hace que el estudiante desarrolle su pensamiento matemático en su vida escolar y cotidiana, y además aumente su interés por esta disciplina.

---

[45] Minerva, F. (2006). *El proceso de investigación científica.* Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia. p. 116.

3.3. Población y muestra

Para esta investigación se toma como población los estudiantes de la Institución Educativa Distrital Pablo de Tarso y la muestra son los estudiantes de grado noveno de la jornada tarde del año académico 2017. Se decidió trabajar con este grupo porque es en este grado que se enseña la temática de la ecuación cuadrática.

3.4. Métodos, técnicas e instrumentos utilizados

En esta tesis se combinan métodos y técnicas de investigación científica, en un nivel teórico y empírico. Se utilizan los siguientes métodos teóricos:

Histórico-lógico: se utiliza con el fin de analizar qué factores intervienen en la evolución y desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diofánticas cuadráticas en grado noveno.

Análisis-Síntesis: durante todo el proceso de la investigación**,** en los fundamentos teóricos, en el análisis de los resultados del estudio, referido al desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes del grado noveno, a través de la enseñanza de los contenidos de ecuaciones diofánticas cuadráticas, lo que permite interpretar, sintetizar los resultados y elaborar conclusiones, generalizaciones y recomendaciones.

Del nivel **empírico** fueron empleados:

La observación participante: para observación de clases, y otras actividades docentes, para obtener información sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diofánticas cuadráticas a través de la historia de las matemáticas como recurso para su enseñanza en la educación básica secundaria.

Encuesta: a los docentes y estudiantes, para obtener información sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diofánticas cuadráticas a través de la historia de las matemáticas como recurso para su enseñanza en la educación básica secundaria.

3.5 Diseño y aplicación de las actividades

Las actividades programadas en este capítulo están diseñadas con el objetivo de crear en el estudiante una mejor disposición para el aprendizaje y frente a la búsqueda de la solución de problemas.

En ellas lo que se quiere es utilizar la historia de la matemática como recurso didáctico para despertar en los estudiantes la curiosidad, deseo de aprender de manera independiente, generando inquietudes respecto a los temas y que su pensamiento matemático, y en particular algebraico, se desarrolle.

3.5.1 Estructura de las actividades

Se han diseñado cinco actividades que están propuestas con problemas históricos que se plantean con ecuaciones diofánticas y con breves apuntes históricos sobre el origen y desarrollo de estas ecuaciones, de tal forma que los estudiantes, mediante el trabajo en equipo, logren la solución satisfactoria de los problemas y con ello vean la importancia de las matemáticas en la vida cotidiana, a lo largo de la historia.

Estas actividades están basadas en problemas retadores para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje y en particular el desarrollo del pensamiento algebraico en cuanto a la solución de ecuaciones cuadráticas. Con esto se busca que el estudiante al abordar cada actividad sea capaz de:

- Identificar los diferentes tipos de ecuaciones cuadráticas diofánticas.

- Encontrar mediante la observación y el análisis, métodos de solución de cada tipo de ecuación.
- Sacar sus propias conclusiones respecto a la forma como cada matemático y en especial Diofanto, hallaba la solución de las ecuaciones.

También, se pretende promover un aprendizaje autónomo y aprendizaje significativo referente a las ecuaciones cuadráticas, en especial las diofánticas.

Su estructura tiene objetivo, sugerencias metodológicas y desarrollo de la actividad.

A continuación, se describen las actividades que componen la tesis.

Actividad 1: Introducción a las Ecuaciones Diofánticas

Actividad 2: Ecuaciones diofánticas de la forma $\boldsymbol{x^2 - y^2 = n}$.

Actividad 3: Ternas Pitagóricas

Actividad 4: Ecuaciones de Pell.

Actividad 5: Ecuaciones cuadráticas de la forma $\boldsymbol{x^2 \pm bx = \pm c}$.

3.5.2 Actividades

3.5.2.1 Actividad 1: Introducción a la Ecuaciones diofánticas

Objetivo: Inducir al estudiante a descubrir mediante la resolución de problemas la importancia de plantear ecuaciones diofánticas que le permitan resolver problemas históricos.

También se quiere que esta nueva forma de presentación del tema llame la atención a los estudiantes y que su disposición y autonomía, frente a la búsqueda de la solución de problemas, aumente.

Sugerencia metodológica. Primero se precisará que una ecuación diofántica es una ecuación de cualquier tipo frente a la cual lo que importa son las soluciones enteras. Los estudiantes deben analizar cada situación presentada e idear estrategias para resolverla. Por su parte, el análisis comienza con leer la situación e identificar los datos y las variables involucradas en el problema, y realizar los gráficos respectivos cuando la situación lo necesite o lo pida.

Para el desarrollo de la actividad se tiene en cuenta la teoría de la comunidad de práctica de Wenger. Se formarán grupos de 4 estudiantes donde el líder surgirá de manera espontánea durante el transcurso de la actividad; además los estudiantes contarán con dos horas para desarrollar la actividad.

Con el propósito de que el estudiante interprete la situación y llegue a conjeturar una vía para abordarla y poder plantear una ecuación diofántica, se proponen preguntas heurísticas que lo inviten a pensar en posibles planteamientos. Al finalizar la actividad se hará una socialización con el objetivo de retroalimentar el proceso y evaluar los posibles resultados. La actividad se realizará en presencia de un docente.

Materiales a utilizar. Guía de trabajo, regla, lápiz, esferos, colores, hojas cuadriculadas.

Desarrollo de la actividad

Una ***ecuación diofántica*** es aquella ecuación de cualquier tipo, en la que importan únicamente sus soluciones enteras. Originalmente se buscaban que las soluciones fueran también positivas, pero en la actualidad se estudian también soluciones enteras negativas cuando tengan sentido en el contexto del problema que se busca resolver. Su nombre lo recibe en honor al matemático Diofanto de Alejandría, personaje que aparece en el siglo III y quien inicia una tradición más simbólica y con menor énfasis geométrico. Por esto es llamado "El Padre del Álgebra".

Los pasos dados por Diofanto de Alejandría serán perfeccionados posteriormente por los hindúes y árabes, verdaderos iniciadores del álgebra simbólica.

De Diofanto no se sabe mucho acerca de su vida, sin embargo, uno de los epitafios más conocidos en la historia de las Matemáticas es el que habla de la edad de Diofanto y que se presenta a continuación.

1. Edad de Diofanto[46]:

"¡Caminante!, aquí fueron sepultados los restos de Diofanto, y los números pueden mostrar, ¡oh milagro!, cuán larga fue su vida cuya sexta parte constituyó su hermosa

[46] Vargas, J. *Un viaje por la historia de algunas ecuaciones algebraicas y su enseñanza en la escuela*. Universidad Nacional de Colombia, Medellín 2013. Página 47

infancia. Había transcurrido además, una duodécima parte de su vida cuando de vello cubriose su barbilla.

La séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril. Pasó un quinqueno más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito, que entregó su cuerpo, su hermosa existencia, a la tierra, que duró tan solo la mitad de la de su padre.

Y con profunda pena, descendió a la sepultura, habiendo sobrevivido cuatro años a la muerte de su hijo".

a. ¿Qué edad debió tener Diofanto cuando subarbilla se cubrió de vello?

b. ¿Cuál podría ser la edad de Diofanto cuando nació su Hijo?

c. ¿Suponiendo que el hijo de Diofanto murió a la edad de x años, en ese momento cuántos años tenía Diofanto?

d. ¿Será lógico suponer que Diofanto murió a los 60 años?

e. ¿Cómo se podría calcular la edad de Diofanto de tal manera que cada una de las etapas de su vida sea representada con una cantidad entera?

2. Problema chino de las 100 aves[47]

Un testimonio de las habilidades algebraicas de los eruditos chinos es proporcionado por los contenidos del Clásico Matemático de Chang Ch'iu-chien (siglo VI). Este elaborado tratado contiene uno de los problemas más famosos en las ecuaciones

[47] Burton, D. *The history of mathematics: An introduction*. McGraw-Hill Companies. página 229

indeterminadas, en el sentido de su transmisión a otras sociedades -el problema de las "cien aves de corral".

Este problema, que ocurre en las obras de Mahavira y Bhaskara, dice:

Si un gallo vale 5 monedas, una gallina 3 monedas, y tres pollos juntos una moneda, ¿cuántos gallos, gallinas y pollos, un total de 100, se pueden comprar por 100 monedas?

a. Si quisiera comprar solamente uno de los animales sin que me sobre dinero, ¿cuál(es) podría comprar?

b. Qué cantidades máximas y mínimas de cada animal son posibles comprar?

c. ¿Si se compraran 10 gallos y 20 gallinas, ¿cuántos pollos se podrían comprar?

d. ¿Cuál puede ser una expresión que relacione las cantidades de cada animal con el número total de animales que se desean comprar?

e. Sabiendo el costo de cada gallo, gallina y pollo, ¿cuál puede ser una expresión que relacione estos costos con el presupuesto que se tiene para la compra?

f. Ahora, con esas dos expresiones anteriores y utilizando uno de los métodos que conoces de solución de ecuaciones lineales, ¿puedes hallar una sola expresión que las relacione a ambas?

g. ¿Es posible graficar esa nueva expresión en el plano cartesiano?

h. Con esa nueva expresión ¿podrías calcular algunas respuestas para el problema, teniendo en cuenta que cada valor desconocido correspondiente a los animales, tiene unos intervalos posibles?

i. ¿Cuántas soluciones posibles puedes hallar?

3. **Problema del Granjero**[48]

Un granjero gasta $1000 en comprar 100 animales de tres tipos diferentes. Cada vaca le cuesta $20, cada cerdo $12 y cada oveja $8. Si suponemos que compró al menos 10 animales de cada tipo, ¿cuántos animales compró?

a. ¿Cómo podrías identificar el intervalo posible para la cantidad de vacas que se pueden comprar? ¿Y el de cerdos y ovejas?

b. ¿Esta situación se podría graficar en el plano cartesiano? ¿de qué forma sería posible?

d. Al hacerlo, ¿Se puede usar la gráfica para hallar una solución al problema?

e. ¿Puedes hallar una combinación posible de compra de los tres animales?

f. ¿Puedes hallar otra?

g. ¿De cuántas formas se pueden comprar los animales pedidos con el dinero disponible?

4. **El problema 16 del capítulo 9 del libro Nueve Capítulos sobre Arte Matemático**[49]:

Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático es un libro que representa el esfuerzo colectivo de muchas mentes matemáticas chinas, durante varios siglos. Primero se reunió como un libro sobre el mismo tiempo que Euclides estaba redactando sus Elementos, y copias originales fueron destruidas en el famoso Burning of the Books de

48

49 Burton, D. *The history of mathematics: An introduction*. McGraw-Hill Companies. página 256

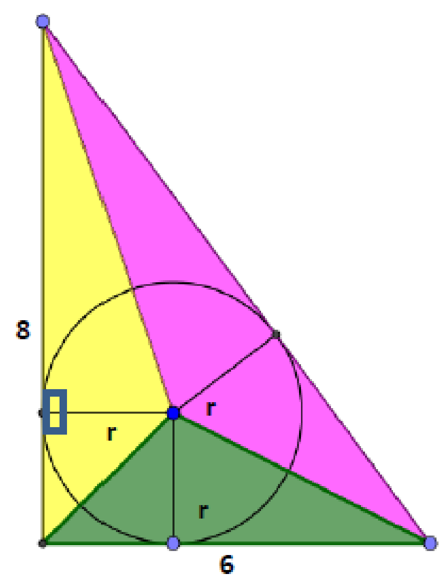
213 a.C. Fragmentos de la colección fueron recuperados, puestos en orden, y aumentados por un buen número de matemáticos. El texto que sobrevive hoy es un comentario de los Nueve Capítulos, preparado por Liu Hui en el 263. Liu Hui dio verificaciones teóricas de cada uno de los problemas, ampliando y enriqueciendo al mismo tiempo el material con sus propias contribuciones.

Uno de los problemas de los Nueve Capítulos que merece comentario, ya que ha aparecido en numerosas obras matemáticas a lo largo de los años, es:

Dado un triángulo rectángulo de kou [anchura] 6 y ku [altura] 8, ¿cuál es el radio del círculo más grande que se puede inscribir en este triángulo.?

a. Analiza ¿qué deberías saber para solucionar el problema?

La siguiente figura ilustra la situación descrita



b. ¿Qué puede decirse de los tres triángulos internos con respecto al triangulo mayor?

c. En cada uno de los triángulos ¿qué representa “r” y cómo utilizarías esta información?

d. Teniendo en cuenta lo anterior, ¿qué expresión podrías utilizar para cumplir con el objetivo del problema?

Lo que se espera en esta actividad, es que los estudiantes comiencen a conocer el tipo de ecuaciones diofánticas, que les llame la atención, y que con los conocimientos que tienen hasta este momento, sobre álgebra y una base adecuada de aritmética, puedan pensar en el método a utilizar y las posibles soluciones de cada problema.

3.5.2.2 Actividad 2: Ecuaciones Diofanticas de la forma $x^2 - y^2 = n$

Objetivo: Inducir al estudiante a descubrir, mediante la resolución de problemas, la solución de la ecuación diofántica de la forma $x^2 - y^2 = n$, que le permita resolver situaciones de la vida cotidiana.

Sugerencia metodológica. Primero se le recordará al estudiante, que una ecuación diofántica es una ecuación de cualquier tipo, en la cual lo que importa son las soluciones enteras. Además, el estudiante debe recordar cómo se hallan los divisores de un número y cómo se factoriza una diferencia de cuadrados. Los estudiantes deben leer la situación, identificar los datos y las variables involucradas en el problema, además si es necesario deberán realizar gráficos que les ilustren la situación como ayuda a una posible solución.

Para el desarrollo de la actividad se tiene en cuenta la teoría de la comunidad de práctica de Wenger. Se formarán grupos de 4 estudiantes donde el líder surgirá de manera espontánea durante el transcurso de la actividad; además los estudiantes contarán con una hora para desarrollar la actividad.

Con el propósito de que el estudiante interprete la situación y llegue a conjeturar una vía para abordarla y poder plantear una ecuación diofántica, se proponen preguntas heurísticas que lo inviten a pensar en posibles planteamientos. Al finalizar la actividad se hará una socialización con el objetivo de retroalimentar el proceso y evaluar los posibles resultados. La actividad se realizará en presencia de un docente.

M**ateriales para utilizar.** Guía de trabajo, regla, lápiz, esferos, colores, hojas cuadriculadas.

Desarrollo de la actividad

El libro "La Arithmetica" fue escrito por Diofanto de Alejandría; en el recogió un surtido de 189 problemas con sus respectivas soluciones. Aquí Diofanto expone diferentes métodos de solución de problemas en los que se requiere que las soluciones sean números racionales. Antes de Diofanto, los resultados del álgebra eran verbales y sin simbolos ni abreviaturas. Una de los principales aportes de Diófanto fue la llamada "Álgebra sincopada", que tiene que ver con el uso

de simbolos para expresar cantidades y operaciones. Por ejemplo, en lugar de nuestra habitual x, utilizó el símbolo & para cantidades desconocidas y para simbolizar el cuadrado de la cantidad desconocida utilizaba Δ^{Υ}, para indicar cuadrado al cuadrado (x^4) utilizaba $\Delta^{\Upsilon}\Delta$, para la quinta potencia (x^5) utilizaba $\Delta\mathrm{K}^{\Upsilon}$ y para el cuadrado al cubo (x^6) utilizaba KK^{Υ}.

La aritmética griega, debe considerarse como la ciencia del número entero. Los griegos estudiaron los números pares e impares, los números de doble paridad (2^n), los de doble imparidad (dos multiplicado por un número impar), los pares afectados de imparidad y muchas otras propiedades de los números en este sentido.

1. Hay un hecho que es muy fácil de ver y es que todo número entero es par o impar. Hay relaciones entre números enteros que se pueden ver fácilmente, como que la suma de dos números pares es par: 4 + 6 = 10; 12 + 20 = 32….

¿Cómo completarías las siguientes afirmaciones?

La suma de dos números impares es __________.

La suma de un número par con uno impar es __________.

El producto de un número par por un entero cualquiera es __________.

El producto de dos impares es __________.

El cuadrado de un número par es ________. Un número par elevado a la potencia 2017 es ______.

El cuadrado de un número impar es _______. Un número impar multiplicado por sí mismo 2017 veces es ________.

Un ejemplo aplicativo de estas propiedades puede ser el siguiente: Un nadador para entrenar realiza sesiones de entrenamiento de 3, 5 y 7 kilómetros. Su entrenador le recomienda entrenar un total de 35 kilómetros. El nadador cree que en 10 sesiones lo puede lograr.

¿Qué le dirías al nadador, que sí o que no lo logra?

2. Si se toman dos números enteros positivos $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ ¿qué se puede decir respecto a la paridad de $x+y, x-y$?

3. Si $(x+y)*(x-y)=12,$ ¿cuáles son las posibles opciones para x y para y, teniendo en cuenta el análisis hecho anteriormente?

4. ¿Será posible decir cómo se puede resolver en números enteros cualquier ecuación de la forma $a * b = n$?

5. Dada la ecuación $x^2 - y^2 = 98$, ¿puedes encontrar valores enteros de x y y que satisfacen la ecuación?

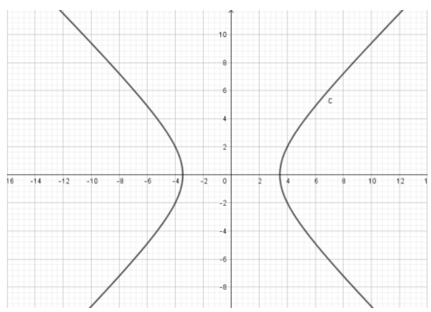
6. Dada la ecuación $x^2 - y^2 = 87$, ¿es posible encontrar valores enteros de x y y que satisfacen la ecuación?

7. En la ecuación de la forma $x^2 - y^2 = n$, ¿qué tipos de factores debe tener n para que haya solución en los enteros positivos?

Ecuaciones diofánticas de la forma $x^2 - y^2 = n$

Un tipo de ecuaciones diofánticas es de la forma $x^2 - y^2 = n$.

Las gráficas de este tipo de ecuaciones son hipérboles, por ejemplo la del ejercicio $x^2 - y^2 = 12$ sería:



Las secciones cónicas fueron estudiadas por Aristeo el Viejo y Euclides. Después Apolonio (262 a.C.) escribió ocho libros sobre ellas en los cuales prácticamente cerró el tema para los pensadores posteriores, desde el punto de vista geométrico. Ellas han sido de mucha utilidad a lo largo de la historia. Un caso fue el de Arquímedes (287 a.C), logró incendiar las naves romanas durante la defensa de Siracusa usando espejos parabólicos. Estas curvas tienen gran importancia en la física ya que las órbitas de los planetas alrededor del sol son elipses y la trayectoria de cualquier cuerpo sometido a una fuerza gravitatoria es una cónica. En aeronáutica, cuando los aviones hacen maniobras, se puede calcular qué tanto se acerca el avión a un punto específico, ubicándolo en un plano cartesiano. La trayectoria que hace el avión en picada forma una hipérbola.

Existen muchas otras aplicaciones de esta ecuación diofántica, que se pueden dar en la vida cotidiana.

8. PROBLEMA APLICATIVO:

Se desea construir una sala con un área exacta. Para ello, un ingeniero determinó que los costos serán menores si la diferencia entre el cuadrado del largo y el cuadrado del ancho es de 36 metros cuadrados. A partir de esto, determine el largo y el ancho de la sala.

a. Intenta hallar una solución por simple inspección.

b. ¿De qué forma generalizarías esta situación?

c. ¿Crees que esta es una ecuación diofántica? ¿Cuál sería tu justificación?

c. ¿Cuántas soluciones tendría el problema?

8. Proponga un problema de la vida cotidiana que se pueda resolver con una ecuación diofántica de la forma $x^2 - y^2 = n$ y halle sus posibles soluciones.

TRABAJO EN CASA

Una persona va a un supermercado y compra 12 cartones de leche de un litro cada uno, unos de leche entera y otros de descremada, por $36000. Si la leche entera vale

$300 menos por litro que la descremada, y ha comprado el menor número posible de litros de leche descremada, ¿cuántos litros habrá comprado de cada una?

Lo que se espera con esta actividad, es que los estudiantes identifiquen este tipo de ecuaciones como diofánticas y una vez identificada hagan el análisis correspondiente a la paridad y a sus posibles soluciones.

3.5.2.3 Actividad 3: Ecuaciones diofánticas de la forma $x^2 + y^2 = z^2$

Objetivo: Inducir al estudiante a descubrir, mediante la resolución de problemas, la relación que hay entre las ternas pitagóricas y las ecuaciones diofánticas de la forma $x^2 + y^2 = z^2$, y además que vea la forma como Diofanto llegó a la solución de este tipo de ecuaciones.

También se pretende que el estudiante se sienta motivado a encontrar las soluciones a los diferentes problemas que se le plantea en las actividades.

Sugerencia metodológica. Inicialmente se propone un problema que hará que los estudiantes recuerden el teorema de Pitágoras. Posteriormente los estudiantes seguirán resolviendo la actividad correspondiente. Para esto, ellos deben leer cada situación, seguir procedimientos, identificar los datos y las variables involucradas en el problema, además si es necesario deberán realizar gráficos que les ilustren la situación como ayuda a una posible solución.

Para el desarrollo de la actividad se tiene en cuenta la teoría de la comunidad de práctica de Wenger. Se formarán grupos de 4 estudiantes donde el líder surgirá de manera espontánea durante el transcurso de la actividad; además los estudiantes contarán con dos horas para desarrollar la actividad.

Con el propósito de que el estudiante interprete la situación y llegue a conjeturar una vía para abordarla y poder plantear la solución a la ecuación diofántica, se proponen preguntas heurísticas que lo inviten a pensar en posibles soluciones. Al finalizar la actividad se hará una socialización con el objetivo de retroalimentar el proceso y evaluar los posibles resultados. La actividad se realizará en presencia de un docente.

Materiales que utilizar. Guía de trabajo, regla, lápiz, esferos, colores, hojas cuadriculadas, 100 regletas del mismo tamaño en balso, que se pedirán previamente.

Desarrollo de la actividad

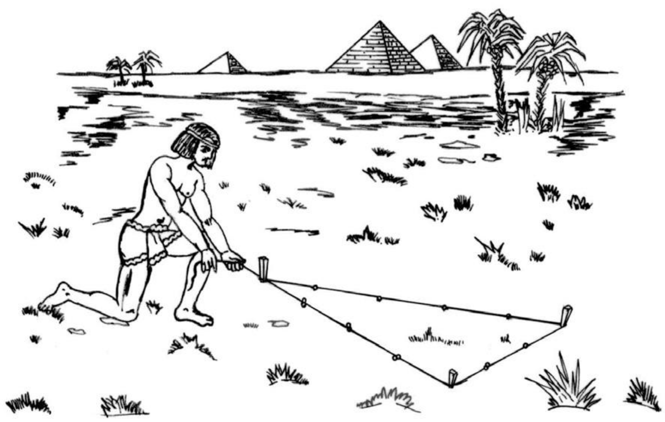
ECUACIONES DIOFANTICAS

El estudio de las ecuaciones diofánticas es llamado así en honor al matemático griego Diofanto (d.C 250), y ha sido un tema central en teoría de números. Éstas son ecuaciones de dos o más variables, con coeficientes enteros o racionales para los cuales las soluciones buscadas son números enteros o números racionales. La primera de estas ecuaciones, $x^2 + y^2 = z^2$, se remonta a los tiempos babilónicos, alrededor de 1700 a.C. Esta ecuación ha sido importante a lo largo de la historia de la teoría de números. Sus soluciones enteras se llaman ternas pitagóricas.

1. Ternas pitagóricas

Los famosos papiros de Rhind y de Moscú, a pesar de su alto valor matemático, no mencionan el Teorema de Pitágoras ni las ternas pitagóricas. Sin embargo, los egipcios conocían el hecho de que el triángulo de lados 3, 4 y 5, llamado “Triángulo egipcio”, es rectángulo, y lo utilizaban para trazar una línea perpendicular a otra, a modo de escuadra, que era una práctica habitual de los agrimensores oficiales para recuperar las fronteras de los lindes de las tierras tras los periódicos corrimientos de tierras producidos por las crecidas del río Nilo.

Los agrimensores egipcios utilizaban el triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5,



llamado *Triángulo egipcio* a modo de escuadra para trazar líneas perpendiculares. Así nació la profesión de *arpedonapta* – palabra griega traducción de otra egipcia que significa *tendedor de cuerda*–

Para trazar las perpendiculares sobre el terreno utilizaban una cuerda dividida en 12 tramos, por medio de 12 nudos equidistantes, con ésta formaban el

Triángulo egipcio de catetos 3 tramos y 4 tramos e hipotenusa de 5 tramos.

1. Lee con atención el siguiente problema:

Una pareja que se va a escapar a casarse, y la ventana de la novia está a una altura de 12 pies del suelo y hay un andén al lado del edificio con un muro de un jardín que permitirá sostener y mantener estable la escalera a 5 pies de la pared del edificio.

¿De qué longitud debe el novio conseguir la escalera para que ella se puede escapar sin riesgo de caída?

2. a. Con las fichas que tienes, ¿puedes armar el triángulo egipcio? Puedes ayudarte por ejemplo de las baldosas del piso del salón de clases, o trazar dos rectas perpendiculares en una hoja de papel, o cualquier método que creas para asegurar el ángulo recto.

b. ¿También podrías armar otros triángulos rectángulos?

c. ¿Cómo comprobarías que esos triángulos que armas, en realidad son rectángulos?

d. ¿Puedes hallar un triángulo rectángulo en donde un cateto mida 7 unidades? ¿Alguno de los otros lados es impar?

e. Ahora, si uno de los catetos del triángulo mide 9 unidades, ¿cómo es la paridad de los otros dos lados?

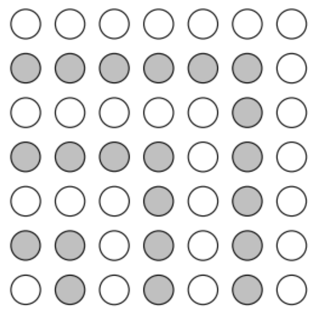
f. Entonces, ¿si uno de los catetos es impar, ¿cómo deben ser los otros dos lados?

g. ¿Hay números que no son lados de un triángulo pitagórico? Por ejemplo 1 y 2 no lo son. ¿Habrá otros? ¿Cómo puedes saber esto?

e. ¿Cómo crees que se pueden hallar otras ternas pitagóricas en las cuales un cateto y la hipotenusa sean de longitud impar?

f. ¿Cuántos triángulos de éstos crees que hay?

El matemático Euclides en “los Elementos”, 300 a C. demostró que el conjunto de ternas pitagóricas es infinito. “Él se basó en que la suma de los números impares consecutivos a partir de 1 es siempre un número cuadrado: $1 = 1^2$, $1 + 3 = 4 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$, y así sucesivamente. Los seguidores de Pitágoras lo sabían y lo ilustraban así:



¿Qué sucede cuando el último sumando no sólo es impar sino también un cuadrado perfecto como 9, 25 o 49?

g. ¿Por qué crees que Euclides se basó en esa afirmación para concluir que el conjunto de ternas pitagóricas es infinito?

Hay números cuyo cuadrado puede expresarse como suma de cuadrados de varias maneras. Por ejemplo, $25^2 = 20^2 + 15^2$ y $25^2 = 24^2 + 7^2$. Esto significa que triángulos rectángulos pitagóricos diferentes pueden tener la misma hipotenusa.

h. ¿Puedes encontrar otros ejemplos?

2. **El problema 8 del libro II de la Aritmética de Diofanto:**

Diofanto recopiló en su libro, La Aritmética, una serie de ejercicios que llamaron la atención de muchos matemáticos por el hecho que muchos de ellos no se pueden solucionar algorítmicamente. Uno de estos problemas es: *"Descomponer un cuadrado dado en dos cuadrados."*

Este problema inspiró el conocido teorema de Fermat quien lo escribió en el margen de su copia de la *Aritmética* de Diofanto alrededor del año 1637:

"La ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones si $n > 2$, con x, y, z números naturales."

El teorema de Fermat duró más de 300 años sin demostrarse hasta que en 1995 el matemático inglés, Andrew Wiles lo demostró con herramientas matemáticas muy avanzadas y de diversas ramas de la matemática.

a. ¿Cómo interpretarías el enunciado *"Descomponer un cuadrado dado en dos cuadrados"?*

b. Si tuvieras que escribir el problema en lenguaje algebraico, ¿cómo quedaría la expresión?

c. ¿Cuáles podrían ser algunos valores que satisfacen la expresión que escribiste?

d. Si el número que se quiere descomponer es 16, ¿cómo sería una expresión algebraica de este problema particular?

e. ¿Cuál podría ser un procedimiento para hallar las soluciones a esta nueva ecuación?

La forma como Diofanto la resolvió fue la siguiente:

"*Si queremos descomponer el número 16 en dos cuadrados y suponemos que el primero es el cuadrado de un aritmo, el otro tendrá 16 unidades menos un cuadrado de aritmo, y por tanto, 16 unidades menos un cuadrado de aritmo son un cuadrado.*

$$16 = x^2 + (16 - x^2)$$

$$(16 - x^2) = \square$$

Formamos el cuadrado de un conjunto cualquiera de cuadrados de aritmos disminuidos en tantas unidades como tiene la raíz de 16 unidades, y sea el cuadrado de 2 aritmos menos 4 unidades.

$$\square = (2x - 4)^2$$

Este cuadrado tendrá pues, 4 cuadrados de aritmo y 16 unidades menos 16 aritmos. Lo igualamos a 16 unidades menos un cuadrado de aritmo, y sumando a uno y otro lado los términos negativos y restando los semejantes, resulta que 5 cuadrados de aritmo equivalen a 16 aritmos, y por tanto un aritmo equivales a $\frac{16}{5}$

$$\square = (2x - 4)^2 = 4x^2 + 16 - 16x$$

$$4x^2 + 16 - 16x = 16 - x^2$$

$$5x^2 = 16x$$

$$x = \frac{16}{5}$$

Luego, uno de los números es $\frac{256}{25}$ *y el otro es* $\frac{144}{25}$*, cuya suma es* $\frac{400}{25}$ *es decir, 16 unidades y cada uno de ellos es un cuadrado*".

Lo que Diofanto hizo fue identificar $16 - x^2$ con una expresión del tipo $\left(mx - \sqrt{16}\right)^2$, en el caso $m = 2$.

f. ¿Qué sucede si se selecciona *m* = 3 y se escribe 16 - x^2 = (3*x* – 4)^2 ?

g. Siguiendo el procedimiento que utilizó Diofanto, si m toma otro valor, ¿las soluciones serían diferentes?

h. Usando cualquier valor para m, ¿cómo descompones un cuadrado que tú elijas en dos cuadrados?.

i. Investiga algunas situaciones en la vida cotidiana que se resuelvan utilizando ternas pitagóricas.

En esta actividad, se requiere de el estudiante esté atento a cada pregunta, que no se desconcentre porque la actividad es un poco densa. Además se quiere que cuando vea una terna pitagórica, enseguida la relacione con el teorema de pitágoras y pueda sin muchos problemas hallar soluciones a esta ecuación.

3.5.2.4 Actividad 4: Ecuación de Pell

Objetivo: Inducir al estudiante al planteamiento y solución de la ecuación de Pell mediante la resolución de problemas. Mostrar que hay problemas matemáticos que no necesariamente modelan casos de la vida cotidiana, pero sirven como reto y desarrollan el pensamiento lógico.

Aplicar una nueva forma de presentación del tema con el fin de mejorar la disposición de los estudiantes frente a la búsqueda de soluciones.

Sugerencia metodológica. Primero se precisarán términos que se requieren para el planteamiento de la ecuación. Los estudiantes deben analizar individualmente cada situación presentada en el primer punto, e idear estrategias para resolverla. Su análisis comienza con leer la situación e identificar los datos y las variables involucradas en el problema, además se deberán realizar gráfico con el programa Geogebra que ilustren la situación como ayuda a posibles soluciones.

Para el desarrollo de la segunda parte de la actividad, se tiene en cuenta la teoría de la comunidad de práctica de Wenger. Se formarán grupos de 2 estudiantes los cuales deberán trabajar con un computador y el software Geogebra y contarán con una hora para desarrollar toda la actividad.

Una ***ecuación de Pell*** *es una ecuación diofántica de la forma* $x^2 = ny^2 + 1$*, donde n es un entero que no es cuadrado perfecto*.

Esta ecuación recibió este nombre en honor a John Pell, matemático del siglo XVII, debido a un error del gran Euler, quien asoció un método de resolución de este tipo de ecuaciones a Pell, cuando éste pertenecía a Brouncker. Y debido a que Euler era un escritor muy leído, esta falsa afirmación se propagó con gran rapidez.

En 1799, la ecuación $x^2 = ny^2 + 1$ *pasó a ser representada como* $x^2 - dy^2 = \pm 1$*, donde d no es un cuadrado perfecto, cuando Carl Friedrich Gauss (1777-1855) publicó su obra Disquisitiones Arithmeticae.*

Con el propósito de que el estudiante interprete la situación y llegue a conjeturar una vía para abordarla y poder plantear una ecuación de Pell, se proponen preguntas heurísticas que lo inviten a pensar en posibles planteamientos. Al finalizar la actividad se hará una socialización con el objetivo de retroalimentar el proceso y evaluar los posibles resultados. La actividad se realizará en presencia de un docente.

Materiales para utilizar. Guía de trabajo, regla, lápiz, esferos, colores, hojas cuadriculadas, calculadora.

Desarrollo de la actividad

1. La forma generalizada de la ecuación de Pell es $x^2 \pm dy^2 = N$.

En el caso $N = 0 \; y \; d = 2$, la ecuación queda $x^2 - 2y^2 = 0$. Esta ecuación no tiene solución en los enteros ya que $\sqrt{2}$ no es racional. Usa la calculadora para hallar una aproximación del valor de $\sqrt{2}$ con varios números decimales.

Ahora, trata de hallar una solución para las ecuaciones $x^2 - 2y^2 = 1$ y $x^2 - 2y^2 = -1$. En la antigüedad, los griegos encontraron una forma de obtener una nueva solución de cada ecuación, a partir de una solución de la otra ecuación, es decir, si (a, b) es una solución de la ecuación $x^2 - 2y^2 = 1,$ entonces se reemplazan esos valores en $(a + 2b, a + b)$ se obtiene una solución (a_1, b_1) de la ecuación $x^2 - 2y^2 = -1$, y ahora con esa solución reemplaza nuevamente en $(a_1 + 2b_1, a_1 + b_1)$ y se obtiene una nueva solución (a_2, b_2) de $x^2 - 2y^2 = 1$.

Por ejemplo, en la ecuación $x^2 - 2y^2 = -1$ una solución es $a = 1, b = 1$, entonces una solución para $x^2 - 2y^2 = 1$ es $a_1 = 1 + 2 \cdot 1 = 3, e \; b_1 = 1 + 1 = 2$ y así sucesivamente.

Con estas dos soluciones, halla otras de la misma forma y completa la siguiente tabla:

Soluciones de x² - 2y² = -1 (x_1, y_1)	*Soluciones de x² - 2y² = 1* (x_2, y_2)
$(1,1)$	$(3,2)$

Al dividir los términos de cada pareja entre sí (cada x entre su compañero y), de la siguiente forma: $\frac{3}{2} = 1{,}5$ parece que se puede concluir algo. ¿Qué será?

2. Ahora cambiando los valores a $d = 3, N = 0$ en la ecuación generalizada de Pell, se obtiene la ecuación $x^2 - 3y^2 = 0$. ¿Será que esta ecuación tiene solución en los enteros? Halla una aproximación con varios decimales de $\sqrt{3}$.

Ahora prueba a encontrar soluciones de $x^2 - 3y^2 = 1$ y $x^2 - 3y^2 = -1$

¿Qué pasa si la solución hallada en $x^2 - 3y^2 = -1$, la reemplazamos en la fórmula $(x_1 + 2y_1, x_1 + y_1)$ de la forma similar al ejercicio anterior, ¿sigue pasando lo mismo que en el caso anterior?

¿Y para $x^2 - 5y^2 = \pm 1$?

El matemático y astrónomo hindú Brahmagupta (598-670) dedicó tiempo al estudio de algunas ecuaciones diofánticas. Parece que fue el primero en hallar una solución general para la ecuación diofántica lineal $ax + by = c$, también modificó la regla de los babilonios para la formación de ternas pitagóricas y dio una solución general para las ecuaciones de Pell de la forma $x^2 - ny^2 = \pm 1$.

Él se dio cuenta que si se tienen dos soluciones (a_1, b_1) y (a_2, b_2) de la ecuación $x^2 - ny^2 = 1$, al combinarse de la siguiente forma $(a_1a_2 + nb_1b_2\,, a_1b_2 + b_1a_2)$, se obtiene una nueva solución.

Entonces si hallas dos soluciones de $x^2 - 3y^2 = 1$ ¿cuál sería otra solución, utilizando el método de Brahamagupta? Ahora, analiza qué pasa cuando divides cada x entre su respectiva pareja y.

Y si ahora pruebas a hallar soluciones de $x^2 - 5y^2 = 1$ y las divides de la misma forma para ver qué valores toman estas divisiones.

Con esta actividad lo que se quiere principalmente es que el estudiante relacione este tipo de ecuaciones con la raíz cuadrada del valor que tome n. Que comprenda y valore la dificultad que tuvieron diferentes matemáticos en encontrar formas para solucionar este tipo de ecuaciones.

3.5.2.5 Actividad 5: Ecuaciones Diofanticas de la forma $\boldsymbol{x^2 \pm bx = \pm c}$

Objetivo: Inducir al estudiante a descubrir, mediante la resolución de problemas, la solución de la ecuación cuadrática de la forma $x^2 \pm bx = \pm c$, por diferentes métodos históricos, especialmente el utilizado por Diofanto, de tal forma que le sirvan para utilizarlos en la solución de situaciones que se modelen con este tipo de funciones.

Sugerencia metodológica. En cada ejercicio, se enuncia un problema de la historia, de diferentes culturas, que se modela con ecuaciones cuadráticas, el cual los estudiantes deben leer y analizar los gráficos que allí aparecen, identificar los datos y las variables involucradas en el problema, y si es necesario hacer otros como ayuda a una posible solución.

Para el desarrollo de la actividad se tiene en cuenta la teoría de la comunidad de práctica de Wenger. Se formarán grupos de 4 estudiantes donde el líder surgirá de manera espontánea durante el transcurso de la actividad; además los estudiantes contarán con una hora para desarrollar la actividad.

Con el propósito de que el estudiante interprete la situación y llegue a conjeturar una vía para abordarla y poder plantear una ecuación diofántica, se proponen preguntas heurísticas que lo inviten a pensar en posibles planteamientos. Al finalizar la actividad se hará una socialización con el objetivo de retroalimentar el proceso y evaluar los posibles resultados. La actividad se realizará en presencia de un docente.

Materiales para utilizar. Guía de trabajo, regla, lápiz, esferos, colores, hojas cuadriculadas, calculadoras.

Desarrollo de la actividad

Diofanto de Alejandría introdujo en su *Aritmética* (ca. 250 d. C.), un algoritmo para resolver las ecuaciones cuadráticas, del cual no explica su origen. Se trata de un primer enunciado de la conocida fórmula que determina las ecuaciones de segundo grado. Haciendo una lectura detallada de los libros que se conservan de esta obra (griegos y árabes), se observó que este algoritmo aparece en pocas ocasiones, en algunos ejercicios de los libros IV, V y VI de la edición griega. Diofanto dio una solución única para las ecuaciones de la forma $ax^2 \pm bx = \pm c$

En muchos documentos procedentes del período babilónico arcaico (2000-1600 a. C.), aparecen ejercicios que conducían a una ecuación cuadrática y la estrategia empleada para obtener estas soluciones no era simplemente numérica o algebraica, sino geométrica. En las tablillas, no aparecen deducciones, razonamientos ni demostraciones, sino el enunciado de un ejercicio y una serie de cálculos que, llegan a la expresión final o algoritmo geométrico.

Un problema cuadrático de una tablilla del año 1600 a.C., aproximadamente, es el siguiente:

“*He sumado el cuadrado y mi lado obteniendo* $\frac{1}{2}$*. Pondrás 1, la unidad. Fraccionarás la mitad de 1:* $\left(\frac{1}{2}\right)$*. Multiplicarás* $\frac{1}{2}$ *por* $\frac{1}{2}$*:* $\left(\frac{1}{4}\right)$*. Agregarás* $\left(\frac{1}{4}\right)$ *a* $\left(\frac{3}{4}\right)$*: 1. Sacarás su raíz cuadrada :1. Restarás el* $\left(\frac{1}{2}\right)$ *que has multiplicado de 1:* $\left(\frac{1}{2}\right)$*. Este es el lado del cuadrado”*

a. En el enunciado del problema está el planteamiento, desarrollo y la solución. ¿Qué es lo que se quiere hallar allí?

b. Sabiendo que las formas como los babilónicos resolvían sus problemas eran muy geométricas, ¿cómo crees que ellos graficaron este?

c. Leyendo con atención y siguiendo los pasos, ¿Cuál es la solución del problema?

d. Aunque los babilónicos no conocían los procedimientos algebraicos, ¿cómo escribirías las expresiones algebraicas del planteamiento y solución según lo planteado en este problema?

e. ¿Conocías ese método de solución?

2. La idea de completar, añadir o restaurar es la que años después de los babilónicos, utilizarán los árabes en los procedimientos algebraicos. El más ilustre de los matemáticos árabes fue Mohammed ibn Musa al-Khowarizm (Circa 780-850), quien familiarizó a Europa con los números hindúes y el enfoque algebraico de las matemáticas, dándose a conocer principalmente a través del trabajo que desarrolló en dos libros, uno sobre aritmética y el otro sobre álgebra. Al tratar con las ecuaciones cuadráticas, al-Khowarizm las dividió en tres tipos fundamentales:

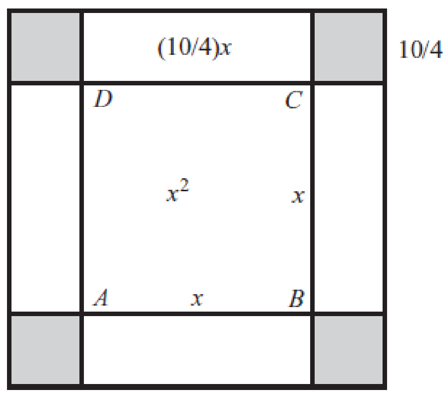
$$x^2 + ax = b$$

$$x^2 + b = ax$$

$$x^2 = ax + b$$

El resolvió el problema $x^2 + 10x = 39$ de dos formas diferentes. Una de ellas tiene que ver con la construcción de un gráfico así:

Se construye un cuadrado ABCD, de lado x y un rectángulo de área $10x$, el cuál se divide en 4 rectángulos iguales de área $\frac{10}{4}x$ y se completa el cuadrado más grande que se forma, de lados $x + \frac{10}{2}$



a. Como el procedimiento lo dice:

$10x = 4\left(\frac{10}{4}x\right)$, entonces sin ninguna duda se afirma que $x^2 + 10x = x^2 + 4\left(\frac{10}{4}x\right)$

Y con lo cual se llega a $\left(x + \frac{10}{2}\right)^2 = x^2 + 10x + 4\left(\frac{10}{4}\right)^2$

¿Cómo comprobarías que esta igualdad es cierta?

De ahí se llega a que $x^2 + 10x + 4\left(\frac{10}{4}\right)^2 = x^2 + 10x + \left(\frac{10}{2}\right)^2$, y comparando términos, se tiene que $4\left(\frac{10}{4}\right)^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2$.

b. Siguiendo con lo anterior ¿qué procedimiento utilizarías para llegar a afirmar que $\left(x+\frac{10}{2}\right)^2 = 39 + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 64$?

c. ¿Cuál es entonces el valor de x ?

d. ¿Encuentras alguna similitud en el método utilizado por los babilónicos y el utilizado por los árabes?

3. En la *Aritmética*, Diofanto define por primera vez las ecuaciones de segundo grado: "*igualdades en las que dos especies son iguales a una especie* $ax^2 \pm bx = c$". La estrategia de Diofanto consistía en pasar el enunciado y los datos del problema a un lenguaje aritmético. Utiliza un conjunto de herramientas sintácticas y morfológicas, con las cuales compone sucesivamente, y según sea necesario, igualdades a las que aplica ambas reglas de restauración y oposición; introduce consecutivamente incógnitas y equivalencias auxiliares, hasta obtener una igualdad reducible a la expresión más simple. Si de ésta no se obtiene la solución requerida, incorpora un algoritmo que no define, sino que expresa de la siguiente manera:

> *El cuadrado de la mitad del coeficiente de la incógnita, junto con el producto de término absoluto y el coeficiente del cuadrado de la incógnita, debe ser un número cuadrado.*

Y que, como sabemos, se deduce así:

$$ax^2 \pm bx = c \rightarrow (ax)^2 \pm b \cdot ax = ac$$

$$(ax)^2 \pm b.ax + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \square$$

Ejercicio IV. 31: “Dividir la unidad en dos números, y añadir a cada uno de ellos un número dado, de manera que su producto forme un cuadrado”. Sean esos números 3 y 5.

a. ¿Cómo se podría escribir este enunciado como una expresión algebraica?

b. Si $4x^2 = \square$

c. Ahora, aplicando el algoritmo de Diofanto, ¿cuál es el valor de x?

d. ¿Cómo crees que Diofanto dedujo este algoritmo?

e. ¿Se parece en algo el algoritmo de Diofanto con los métodos anteriormente vistos?

4. Utiliza cualquiera de los métodos vistos para resolver el siguiente problema:

La manada de monos: Este es un problema hindú, traducido por Lebedev, autor del libro “¿Quién inventó el álgebra?” y lo escribe en forma de verso:

Regocíjense los monos divididos en dos bandos: su octava parte al cuadrado en el bosque se solaza	Con alegres gritos, doce atronando el cambo están ¿Sabes cuántos monos hay en la manada en total?

En esta actividad lo que se espera del estudiante es que pueda hallar una relación entre los métodos de solución de este tipo de ecuaciones diofánticas, y que tenga un aprendizaje significativo al respecto.

CAPITULO 4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA PROPUESTA

En este capítulo se resumen y se analizan los resultados obtenidos, los cuales fueron evidenciados durante la aplicación de las actividades y el análisis de las soluciones propuestas por los diferentes grupos de estudiantes. Este proceso se realiza teniendo en cuenta los siguientes aspectos: desarrollo de las actividades, motivación, logros y dificultades.

4.1. Descripción de los resultados obtenidos en cada una de las actividades

Desarrollo de la Actividad 1

Esta actividad fue desarrollada por 22 estudiantes, que trabajaron unos en grupos de 4 y otros en grupos de a 3, cada uno de los cuales recibió la misma guía. Previamente a los estudiantes se les había pedido llevar lápiz, borrador, hojas de trabajo y calculadora.

Se hizo la introducción al tema de las ecuaciones diofánticas, primero hablando de quién fue Diofanto y después sobre el porqué de las ecuaciones diofánticas enfatizando en que el conjunto numérico en el que se dan las soluciones es el de los enteros positivos.

Iniciando la actividad, se pide la lectura de la parte histórica y del primer problema. En este problema, los estudiantes debían encontrar la edad de Diofanto con los datos de la lectura del epitafio del matemático. Los estudiantes manifestaron que no entendían muy bien todo el enunciado del problema. Entonces con la ayuda del docente se fue planteando poco a poco la ecuación que llevaría a la solución. Ya con la ecuación planteada, la resuelven por el método conocido por ellos. Cuando algunos grupos, el

60%, obtuvieron la solución, el docente les sugirió encontrar un número que al multiplicarlo por cada fracción diera siempre un entero y los estudiantes dedujeron que sacando el mínimo común múltiplo de todos los denominadores lo iban a obtener. Cuando lo hallaron se dieron cuenta que esa era la misma respuesta que habían obtenido con el procedimiento utilizado inicialmente por ellos, con lo cual se sintieron muy animados. Seguido comenzaron a contestar las preguntas respectivas a este punto sin ningún inconveniente por parte de los estudiantes.

En este primer problema, una actuación importante la tiene el docente que dirige la actividad para lograr que los estudiantes comprendan que la solución de la ecuación diofántica es entera y se puede hallar por los métodos aritméticos que ellos ya manejan.

Enseguida se hace la lectura del segundo problema. En éste, lo que se debe hacer es plantear un sistema de ecuaciones y hallar la solución respectiva por análisis, ya que se tienen dos ecuaciones con tres incógnitas. Los estudiantes leen las preguntas y contestan las primeras sin ningún problema, pero llega el momento que se dan cuenta que no pueden resolverlo porque les faltaría otra ecuación. Entonces ahora, el docente hace el seguimiento respectivo para que los estudiantes eliminen una de las variables y analicen la nueva ecuación con dos variables, la grafiquen en un plano cartesiano y con esta gráfica analicen las posibles soluciones del problema.

Aquí los estudiantes se desenvolvieron mucho mejor que en el primer problema porque tenían el tema muy claro y fue relativamente sencillo que respondieran cada una de las preguntas. Los estudiantes tienen claridad qué hacer, pero se les debe guiar en cuanto a cómo lo deben hacer. Esto ocurre con el 100% de ellos. Cuando deducen la primera respuesta posible, quedan como a la expectativa de qué deben hacer ahora, entonces la sugerencia del docente es primero, que reemplacen la solución que obtuvieron en las ecuaciones iniciales y verifiquen que se cumplen las condiciones, después se les sugiere que vean en el gráfico cuáles pueden ser otras posibles soluciones de una de las variables y que deduzcan por qué. Todo esto ellos, el 100 %, lo analizan con naturalidad y es muy participativa la clase.

El tiempo que se tenía disponible para la actividad alcanzó para la solución de esos dos problemas, debido a los inconvenientes en cuanto a las operaciones básicas con fraccionarios principalmente.

Se evidencia que los estudiantes sienten curiosidad por este tipo de problemas que no son parecidos a los que resuelven normalmente en una clase de matemáticas, como se puede ver en la figura 3.

Figura 3. Momento de la solución de la actividad 1

Los dos problemas que quedaron pendientes los estudiantes debían resolverlos en casa. En cuanto al tercer punto, el 60% de los estudiantes lo resolvió, y lo hizo siguiendo un procedimiento similar al segundo punto y aportaron diferentes soluciones posibles. No hallaron todas las opciones de respuesta, pero sacaron conclusiones como cuál era el menor valor y cuál era el mayor valor posible para cada variable, como se muestra en la figura. En la Figura 4, el estudiante plantea un sistema de dos ecuaciones y utiliza el método de eliminación y deja una sola ecuación en términos de x y y. También se ve que el estudiante reemplaza algunos valores de x en esta ecuación y halla los respectivos valores de y y de z. Por último reemplaza estos valores en las ecuaciones iniciales y comprueba que sí se cumplen las restricciones. Se evidencia que el estudiante entiende lo que está hallando.

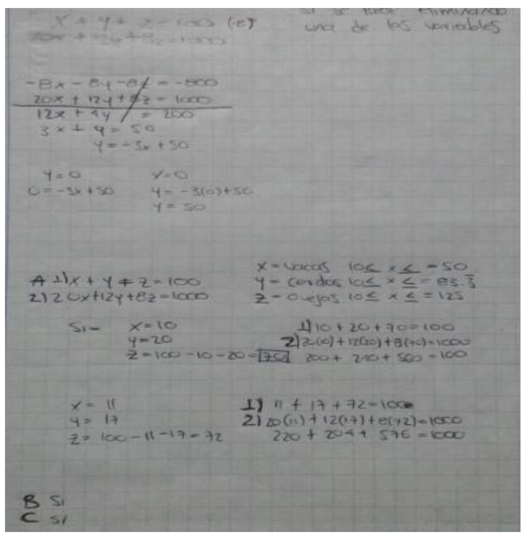


Figura 4. Solución problema 3

En el cuarto punto, los numerales a, b, c se resolvían observando el gráfico; sólo el 40% de los estudiantes contestó correctamente las preguntas como se puede ver en la Figura 4. El resto tuvo confusiones y no lo resolvieron. Para la parte d, debían aplicar la fórmula de área y el 20% lo hizo correctamente hasta llegar a la solución. En la Figura 5, el estudiante plantea la ecuación del área de los triángulos, halla el valor de la hipotenusa del triángulo y plantea una sola ecuación con una sola variable que es R y por último resuelve la ecuación.

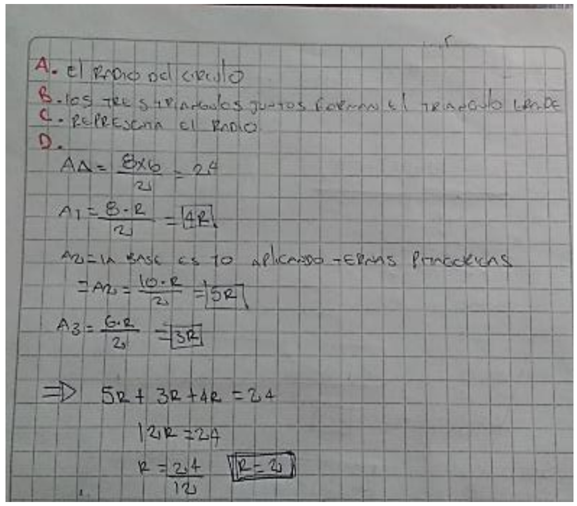


Figura 5. Solución problema 4

En esta actividad se puede ver participación activa y entusiasta de los estudiantes por el tipo de problemas que los hacen pensar y cuyas soluciones no son tan obvias. Sin embargo, se dificulta un poco el trabajo en casa porque ellos manifiestan que al hallar una duda respecto al procedimiento, no se sienten seguros de continuar con la búsqueda de la solución.

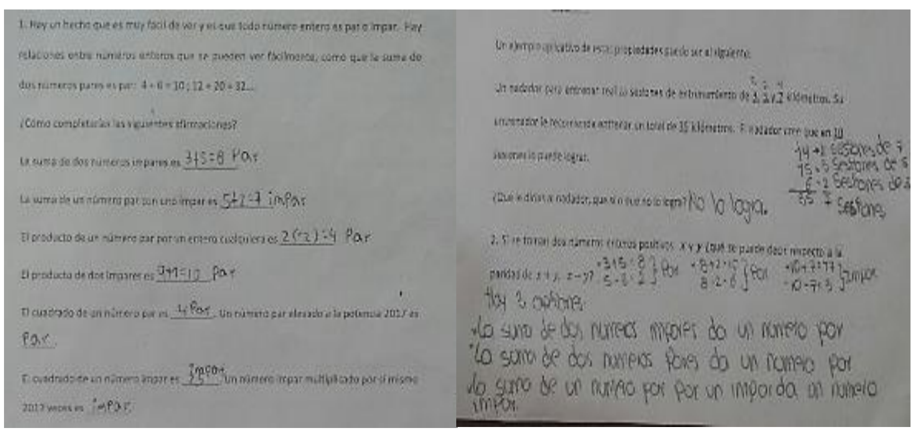
Se logró que los estudiantes comprendieran que una ecuación es diofántica si su solución es entera y que hay muchos problemas en la vida cotidiana que se plantean con este tipo de ecuaciones.

La dificultad mayor que se tuvo fue con las operaciones con fraccionarios y hallando el mínimo común múltiplo, pues todo esto tocó recordárselos.

En cuanto a la motivación, fue constante en el 80% de los estudiantes, el otro 20% estuvo intermitentemente motivado.

Desarrollo de la Actividad 2

Se armaron grupos de 4 y 3 estudiantes y a cada grupo se les repartió la misma guía. En esta actividad lo que se quiere es que los estudiantes relacionen la paridad de los números en la suma, la resta y la multiplicación, para posteriormente analizar las posibles soluciones de la ecuación diofántica de la forma $x^2 - y^2 = n$. Se hizo la introducción al tema, con la parte histórica respectiva al libro *La Aritmética* de Diofanto. Después se hizo referencia al estudio de la paridad de los números enteros por parte de los griegos desde la antigüedad. Los estudiantes comenzaron a resolver la actividad sin ningún inconveniente hasta cuando llegaron a las ecuaciones diofánticas. El ese momento se detuvo un momento la actividad y el docente intervino para guiar a los estudiantes en el análisis de posibilidades para cada variable y se prosiguió con el desarrollo de la actividad.



1. Hay un hecho que es muy fácil de ver y es que todo número entero es par o impar. Hay relaciones entre números enteros que se pueden ver fácilmente, como que la suma de dos números pares es par: 4 + 6 = 10 ; 12 + 20 = 32...

¿Cómo completarías las siguientes afirmaciones?

La suma de dos números impares es 3+5=8 Par

La suma de un número par con uno impar es 5+2=7 impar

El producto de un número par por un entero cualquiera es 2(2)=4 Par

El producto de dos impares es 3+7=10 Par

El cuadrado de un número par es 4 Par. Un número par elevado a la potencia 2017 es Par.

El cuadrado de un número impar es 25 impar. Un número impar multiplicado por sí mismo 2017 veces es impar.

Un ejemplo aplicativo de estas propiedades puede ser el siguiente:

Un nadador para entrenar realiza sesiones de entrenamiento de 3, 5 y 7 kilómetros. Su entrenador le recomienda entrenar un total de 35 kilómetros. El nadador cree que en 10 sesiones lo puede lograr.

¿Qué le dirías al nadador, que sí o que no lo logra? No lo logra.

2. Si se toman dos números enteros positivos x y y ¿qué se puede decir respecto a la paridad de $x + y$, $x - y$?

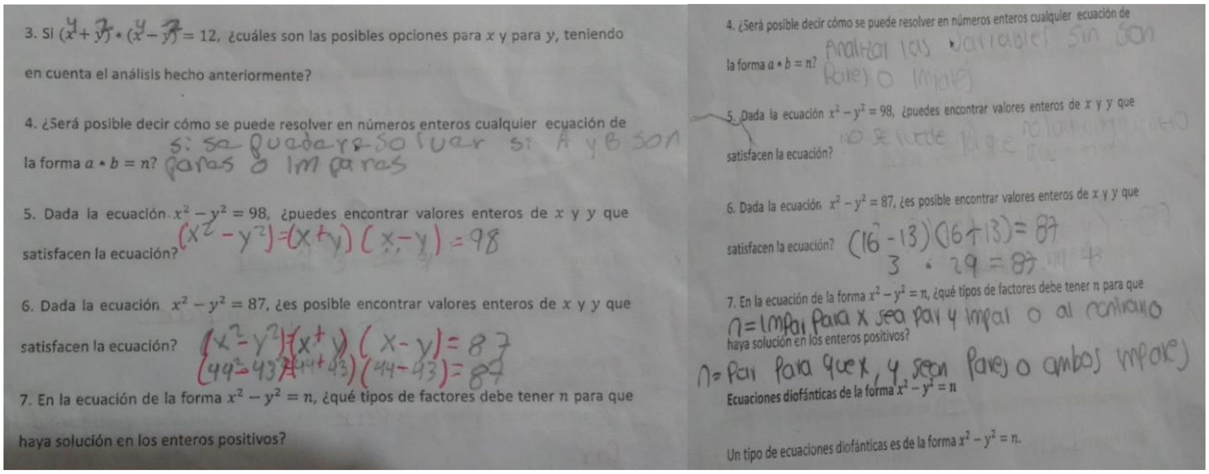
Hay 3 opciones

Figura 6. Solucion ejercicios 1 y 2

Durante el desarrollo de cada problema se vio lo siguiente: el primer punto lo que debían hacer era hallar las relaciones de paridad de los números enteros en la suma y la multiplicación. El 100% de los estudiantes lo solucionaron de forma similar, lo que hicieron fue hacer operaciones con enteros pares o impares y verificar si el resultado daba par o impar. En la Figura 6 en el cuadro izquierdo el estudiante hace operaciones para deducir las propiedades. El segundo punto, lo que hicieron el 80% de los estudiantes fue sumar de diferentes formas las cantidades para así tratar de obtener el 35, pero llegaron a la conclusión que no se podía. Por ejemplo, en la Figura 6 en el cuadro derecho, el estudiante hace diferentes combinaciones probando si las diferentes sumas dan 35 y para el último punto el estudiante halla relaciones de paridad de la suma de números y escribe las conclusiones. En este punto, uno de los estudiantes estaba seguro de que se podía hallar una combinación y pidió tiempo para seguir probando. El continuó con su prueba y después de un rato, dijo que definitivamente no se podía. Después por sugerencia del docente analizaron la paridad de los números y todos concluyeron que se necesitaba un número impar de sesiones para que el resultado fuera 35.

Figura 7. Estudiantes durante la actividad 2

En el tercer punto hubo claridad de todos los estudiantes en cuanto a lo que tenían que hacer, pero sólo el 40% lo hizo bien, porque a pesar de que sabían cuáles eran los números que multiplicados daban 12, no caían en cuenta que debían hallar dos números tales que la suma diera uno de los factores y la resta diera el otro. Finalmente, con ayuda del docente, todos entendieron el ejercicio. Con este concepto entendido, respondieron los numerales 4 y 5. En el numeral 6, donde debían descomponer el número 87 y ver las posibles opciones aplicando los conceptos de paridad, sólo el 40% de los estudiantes lo hizo correctamente, el 20 % se dio por vencido y el otro 40% lo que hizo fue descomponer como una suma y no como un producto. Todos los grupos contestaron correctamente el numeral 7 después de la corrección del ejercicio anterior. El problema aplicativo todos lo intentaron hacer; el 25% planteó inmediatamente una diferencia de cuadrados igual a 36 y obtuvieron todas las combinaciones y descartaron las que no servían de acuerdo a la paridad y llegaron a la solución posible, el 25% por tanteo obtuvo la solución y el otro 50% trabajó por tanteo, pero no llegó a la solución. Observando la Figura 8, en el cuadro de la izquierda, el estudiante descompone el número 12 en dos números pares y después busca dos números que sumados y restados den esos dos factores. En los puntos 5 y 6 el estudiante factoriza, pero no hace la descomposición factorial ni resuelve el ejercicio. En el cuadro de la derecha, el estudiante descompone el 87, hace el análisis respectivo de las paridades y halla la combinación de números que dan la respuesta. Ese mismo estudiante contesta analíticamente la pregunta 7.



3. Si $(x+y)\cdot(x-y)=12$, ¿cuáles son las posibles opciones para x y para y, teniendo en cuenta el análisis hecho anteriormente?

4. ¿Será posible decir cómo se puede resolver en números enteros cualquier ecuación de la forma $a * b = n$?
si se puede resolver si A y B son pares o impares

5. Dada la ecuación $x^2 - y^2 = 98$, ¿puedes encontrar valores enteros de x y y que satisfacen la ecuación?
$(x^2-y^2)=(x+y)(x-y)=98$

6. Dada la ecuación $x^2 - y^2 = 87$, ¿es posible encontrar valores enteros de x y y que satisfacen la ecuación?
$(x^2-y^2)(x+y)(x-y)=87$
$(44^2-43^2)(44+43)(44-43)=87$

7. En la ecuación de la forma $x^2 - y^2 = n$, ¿qué tipos de factores debe tener n para que haya solución en los enteros positivos?

4. ¿Será posible decir cómo se puede resolver en números enteros cualquier ecuación de la forma $a * b = n$? Analizar las variables sin son pares o impares

5. Dada la ecuación $x^2 - y^2 = 98$, ¿puedes encontrar valores enteros de x y y que satisfacen la ecuación?

6. Dada la ecuación $x^2 - y^2 = 87$, ¿es posible encontrar valores enteros de x y y que satisfacen la ecuación? $(16-13)(16+13)=87$
$3 \cdot 29 = 87$

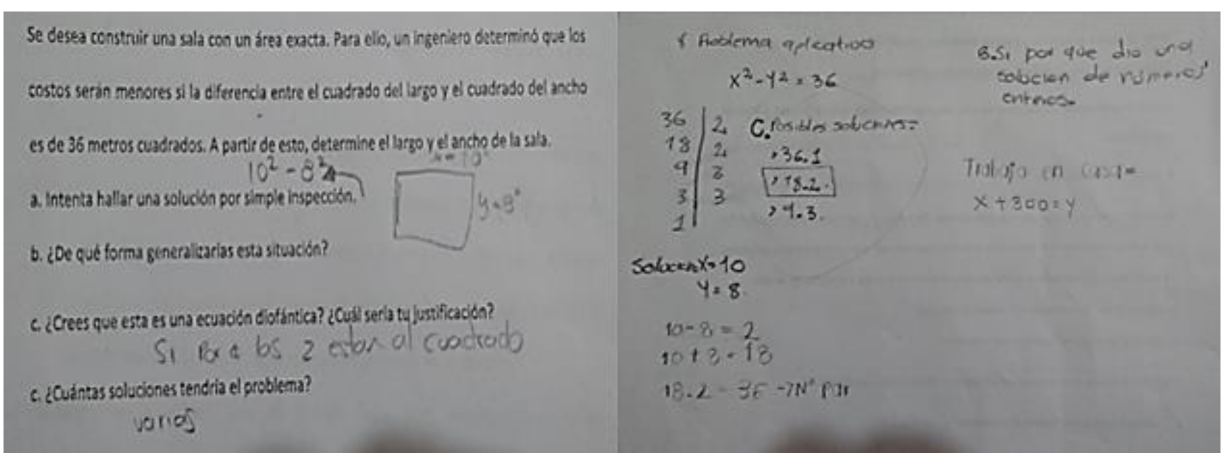
7. En la ecuación de la forma $x^2 - y^2 = n$, ¿qué tipos de factores debe tener n para que haya solución en los enteros positivos?
n = impar para x sea par y impar o al contrario
n = par para que x, y sean pares o ambos impares

Ecuaciones diofánticas de la forma $x^2 - y^2 = n$

Un tipo de ecuaciones diofánticas es de la forma $x^2 - y^2 = n$.

Figura 8. Ejercicios 4, 5, 6 y 7

En la Figura 9, se muestran dos formas diferentes como los estudiantes resolvieron el problema aplicativo. El de la izquierda hizo un gráfico alusivo y halló las respuestas por tanteo. El del cuadro de la derecha planteó una ecuación y la resolvió por descomposición de factores analizando las paridades.



Se desea construir una sala con un área exacta. Para ello, un ingeniero determinó que los costos serán menores si la diferencia entre el cuadrado del largo y el cuadrado del ancho es de 36 metros cuadrados. A partir de esto, determine el largo y el ancho de la sala.

a. Intenta hallar una solución por simple inspección. $10^2 - 8^2$

b. ¿De qué forma generalizarías esta situación?

c. ¿Crees que esta es una ecuación diofántica? ¿Cuál sería tu justificación?
Si por las 2 están al cuadrado

c. ¿Cuántas soluciones tendría el problema?
varias

Problema aplicativo
$x^2 - y^2 = 36$

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

C. Posibles soluciones:
$36 \cdot 1$
$\boxed{18 \cdot 2}$
$9 \cdot 3$

Solución $x = 10$
$y = 8$

$10 - 8 = 2$
$10 + 8 = 18$
$18 \cdot 2 = 36$

Figura 9. Solución del problema aplicativo

En esta actividad se logró que los estudiantes analizaran la paridad de los números.

Se logró captar la atención del 100% de los estudiantes en toda la actividad.

Se dificultó hacer que los estudiantes aplicaran el concepto de la paridad de los números en la solución de problemas que condujeran a una ecuación diofántica de la forma aquí vista.

Desarrollo de la Actividad 3

Para esta actividad, se trabajó en grupos de 4 y 3 estudiantes. A todos se les repartió la misma guía. Se tenía como objetivo que los estudiantes conocieran las ternas pitagóricas y que las relacionaran con la ecuación diofántica de la forma

$x^2 + y^2 = z^2$.

Inicialmente se hace una lectura respecto a los inicios del teorema de Pitágoras. Después se hace la introducción a la actividad con un problema en donde ellos deben aplicar el teorema de Pitágoras, con lo cual no tuvieron inconveniente y hallaron la solución. Como se puede ver en la figura 10a, la estudiante participa activamente y en 10b lo que hace es utilizar el teorema de Pitágoras para hallar la solución respectiva.

El siguiente punto trataba sobre formar un triángulo egipcio con unas fichas y después

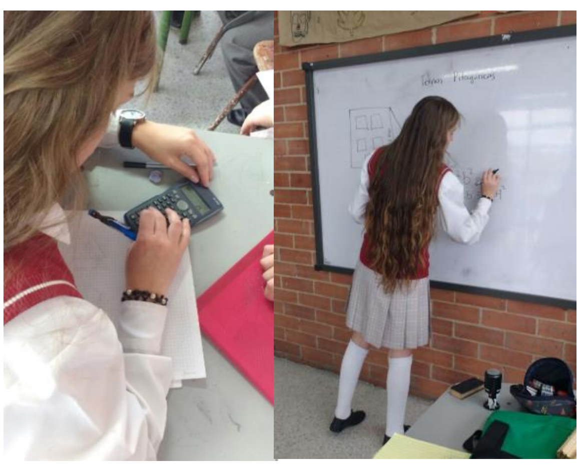


Figura 10a.

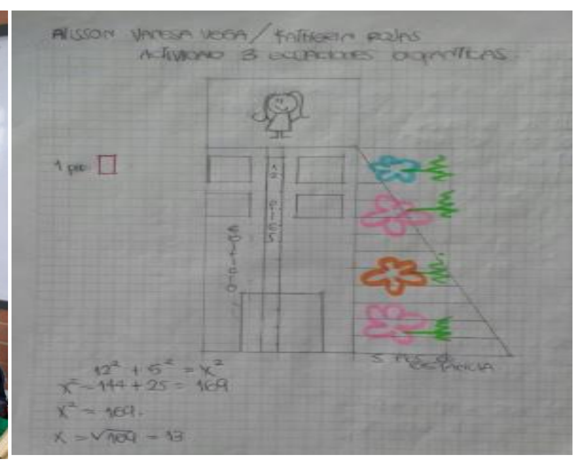


Figura 10b

ver si se podía construir más triángulos rectángulos con las mismas fichas. Los estudiantes estuvieron igualmente motivados y hubo participación por parte de todos y algunos grupos se unieron con sus fichas para tratar de armar más triángulos.

Figura 11. Estudiantes resolviendo el punto 3

Después de este punto, se da comienzo al estudio de las ternas pitagóricas y la deducción de un método de solución.

Esta parte de la actividad se desarrolla en grupo junto con el docente. Una de las estudiantes se dio cuenta que al multiplicar por 2 cada término de la terna egipcia, se obtenía otra terna pitagórica (ver Figura 12), de esto otros estudiantes se dieron cuenta que si multiplicaban por 3 también se obtenía una terna pitagórica, a lo cual una estudiante dijo que había eternas ternas pitagóricas y en coro le aclararon que infinitas ternas. De ahí se les pidió que hallaran otras ternas diferentes a esa que no fueran múltiplos de la egipcia. Luego por grupos y con calculadora comenzaron a buscarlas y recordaron la del problema inicial 5, 12, 13, y entonces se comenzó en grupo a hacer la lista de las posibles ternas una con lado 3, la siguiente con lado 5 y comenzaron a buscar una con lado 7. Esto fue demorado, pero alguien por fin la halló, de ahí trataron entre todos de hallar un patrón y observaron que había dos números impares y uno par. Después de esto se volvieron a agrupar de a 4 o 3 estudiantes y siguieron contestando las preguntas de la guía. En la Figura 12, se observan que un grupo de estudiantes buscó aplicando el teorema de Pitágoras, otras ternas pitagóricas. El 20% encontró otra terna, 9, 40, 41, y concluyó que había números cuadrados que se podían escribir como la suma de dos cuadrados de diferentes formas. Otro grupo, encontró más ternas pitagóricas, múltiplos de la terna egipcia, esto lo hicieron el 40 % del total de los estudiantes. Y otro 40% llegó a conclusiones como que en cada terna hay dos lados impares y uno par.

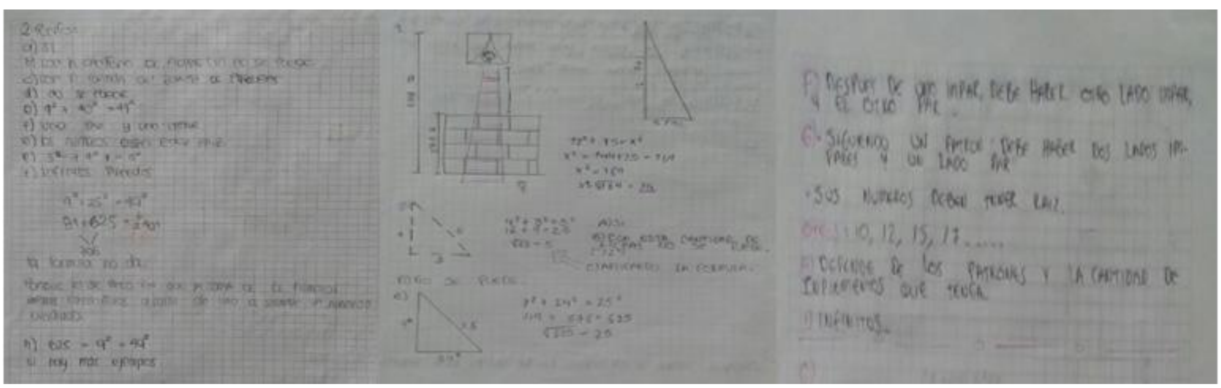


Figura 12. Desarrollo del punto

El 80% llegó a la conclusión que sólo los números 1 y 2 no hacen parte de una terna pitagórica. El 20% de los estudiantes no contestó las preguntas porque tuvieron dificultad en el análisis. El trabajo faltante quedó para la casa, el cual el 20 % de los estudiantes buscaron al docente para hacerle preguntas al respecto y lograron responder la mayoría de los numerales del punto 2 sobre ecuación diofántica de este tipo. En la Figura 13, se ve que la estudiante logra resolver la ecuación diofántica reemplazando el valor de *m* con 3 y aplica el algoritmo que utiliza diofanto y llega a una solución correcta.

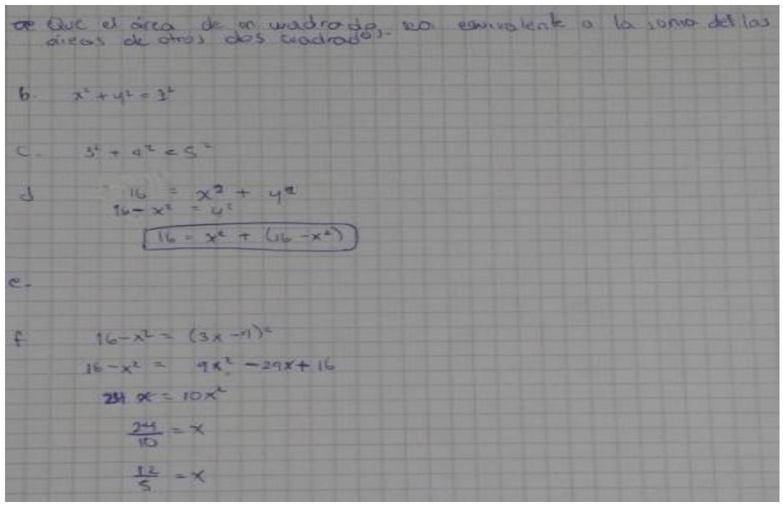


Figura 13. Solución del punto 2 de la actividad

Se logró que los estudiantes participaran con interés de la actividad, que pensaran en números enteros que fueran solución de una terna pitagórica, que entendieran una terna pitagórica como una ecuación diofántica y la relacionaran con el teorema de Pitágoras.

La dificultad que se ve, es que demoran mucho en contestar cada pregunta de modo que el tiempo no alcanzó para resolver toda la actividad y el trabajo en casa no lo hicieron sino el 20% de los estudiantes.

Desarrollo de la actividad 4

En esta actividad participaron 16 estudiantes agrupados por parejas. Se hizo la lectura sobre la ecuación de Pell y su historia. Después el docente habló sobre la forma general de esta ecuación e informó que la ecuacion $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ era la forma particular que se iba a trabajar inicialmente. En esta ocasión, la primera parte la trabajó el docente con todo el grupo, hasta llegar a la primera solución de la ecuación que se estaba trabajando. Los estudiantes continuaron el trabajo y completaron los datos pedidos como se ve en la Figura 12. Concluyeron que las divisiones entre los términos de las parejas se acercan a $\sqrt{2}$, inicialmente no se dieron cuenta que unas por izquierda y otras por derecha. En la Figura 14, lo que hace el estudiante es reemplazar una solución de la ecuación diofantica respectiva, que halló por medio de ensayo error, con el uso de la calculadora. Después lo que hizo fue completar la tabla con un algoritmo que se les da en la actividad. Y finalmente, en otra tabla lo que hace es formar las razones entre cada valor de x y de y, de cada una de las soluciones, con lo cual verifica que los resultados se van acercando a $\sqrt{2}$.

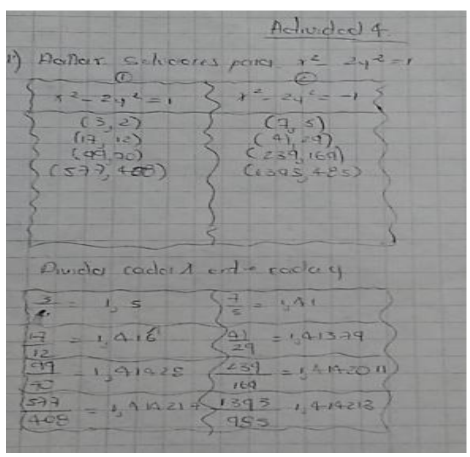


Figura 14. Solución del problema 1 de la actividad

En el siguiente punto la ecuación cambia a $x^2 - 3y^2 = \pm 1$ y los estudiantes comienzan a resolver el ejercicio de la misma forma que el anterior y llegan a la conclusión que las soluciones no satisfacen la ecuación. Entonces se continúa con la lectura de la guía. Allí se habla sobre la solución general que halló el matemático Brahmagupta y lo que se quiere es que los estudiantes ahora hallen soluciones con esta nueva fórmula. El 100 % de los estudiantes se ponen a trabajar en esto y lo primero que ven es que no se pueden hallar soluciones para la ecuación igualada a -1, entonces hallan dos soluciones de la ecuación igualada a 1 hallan algunas soluciones más y llegan a la conclusión esperada: la división de cada x entre su correspondiente y, se acerca a $\sqrt{3}$. Los que iban acabando comienzan a hacer lo mismo con $x^2 - 5y^2 = \pm 1$, de la misma forma no encuentran soluciones para la negativa sino para la positiva y comprueban lo mismo, que la división de cada x entre su correspondiente y, se acercaba a $\sqrt{5}$. En la figura 15, lo que hace el estudiante es reemplazar en la ecuación diofántica, en una fórmula dada en la guía, dos soluciones que se hallaron previamente, por medio del método ensayo error, con todo el grupo de estudiantes. Posteriormente completa una tabla que también aparece en el mismo punto de la actividad.

En esta actividad los estudiantes trabajaron con seguridad, posiblemente porque debían aplicar una fórmula y todas las operaciones se hacían con calculadora. Se ve que una de las grandes falencias de los estudiantes está en la operación con enteros y el despeje de ecuaciones.

Se logró que todos los estudiantes trabajaran a gusto. Se vio la participación de todos los estudiantes, posiblemente porque entendieron rápidamente el objetivo de la actividad.

En esta ocasión no hubo muchas dificultades notorias, pero la habilidad que algunos estudiantes tienen a veces desmotiva un poco a los que son un poco más despaciosos.

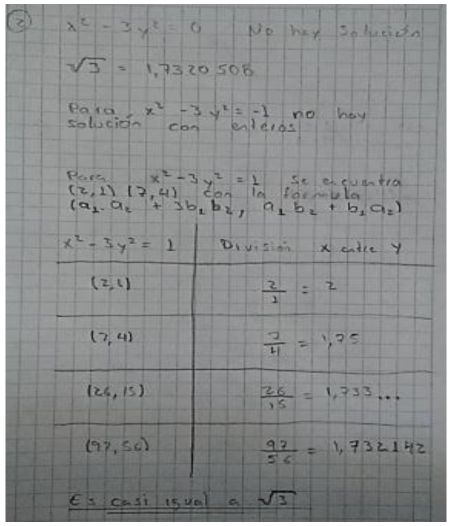


Figura 15. Solución del punto 2 de la actividad

Desarrollo de la actividad 5

En esta actividad hubo 19 participantes con los cuales se hicieron grupos de a 3 o 4 estudiantes. La actividad consistió en analizar la forma como tres culturas diferentes daban solución a la ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. La actividad se empieza con la lectura de la parte histórica referente a los babilónicos y un problema que se encontró en las tablillas de arcilla que conducía a una ecuación cuadrática. Lo que debían hacer los estudiantes era leer el problema e interpretar que la solución estaba en el mismo enunciado. Ninguno de los estudiantes interpretó adecuadamente la lectura y tuvieron mucha dificultad en su entendimiento. Entonces el docente intervino y entre todos, por medio de diferentes preguntas del docente, fueron interpretando cada una de las frases del problema babilónico. En el numeral a, lo que se les preguntaba era la forma geométrica del problema, a lo cual el 60% lo escribió algebraicamente. Como se puede ver en la Figura 16, el estudiante lo que hace es plantear una ecuación en donde reemplaza las letras con símbolos, pero en esencia es una ecuación algebraica mas no es una interpretación geométrica como era lo que se pedía. De esto, se ve que el estudiante tiene dificultad de relacionar la geometría con la solución de problemas algebraicos.

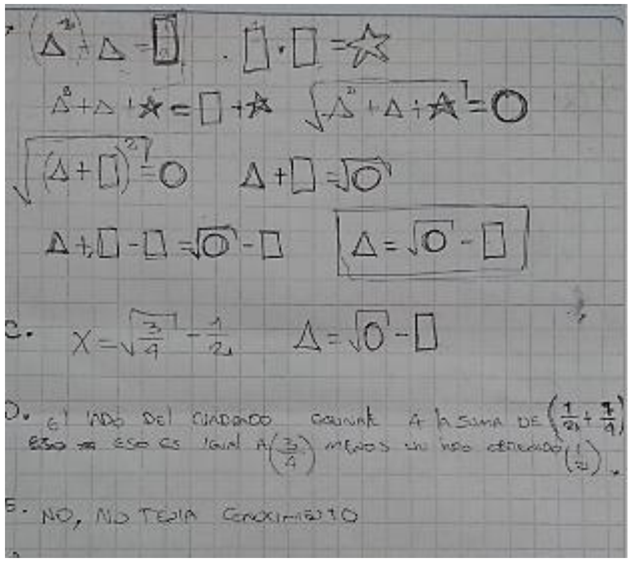


Figura 16. Solución del problema 1

El siguiente problema trataba sobre los dos métodos que utilizaron los árabes en la solución de estas ecuaciones cuadráticas. Esta forma se les facilitó al 80% de los estudiantes y fácilmente halló la similitud entre éste y el anterior método, como se puede apreciar en la Figura 17, en la que el estudiante planea y desarrolla el problema

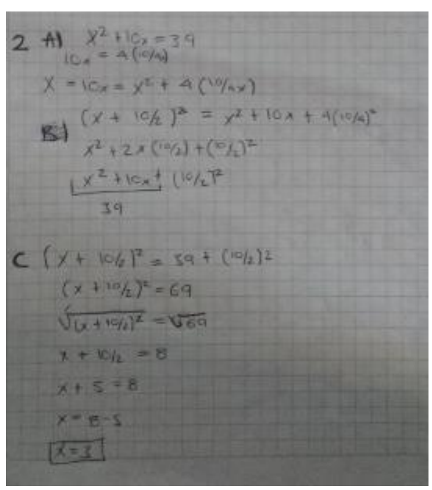


Figura 17. Solución del problema 2

aplicando los conocimientos previos que tiene en álgebra, como son la sustitución, factorización y el despeje en las ecuaciones.

El tercer problema trataba sobre la forma como Diofanto halló solución a problemas que se planteaban con ecuaciones cuadráticas de esta forma. El halló un algoritmo el cual se muestra en la guía y la idea era que los estudiantes comprendieran el algoritmo y que lo aplicaran para la solución de un problema sacado del libro *La Aritmética*. El 80% de los estudiantes tuvieron inconvenientes con la interpretación de dividir la unidad en dos números, con lo cual el docente los ayudó. Solucionado este inconveniente, el 80% de los estudiantes pudo plantear una expresión algebraica. En cuanto a la solución del problema, el 100% tuvo inconvenientes en entender cómo hacerlo; ninguno entendía cómo aplicar el algoritmo de Diofanto. Se necesitó la orientación del docente, para que pudieran identificar las constantes a, b, c. En la Figura 18 se aprecia que el estudiante identifica los valores desconocidos y plantea la ecuación respectiva al problema, utiliza la sustitución y llega a la forma general del algoritmo diofántico. Esto lo hizo de forma correcta y se puede ver que no llegó a la solución del problema.

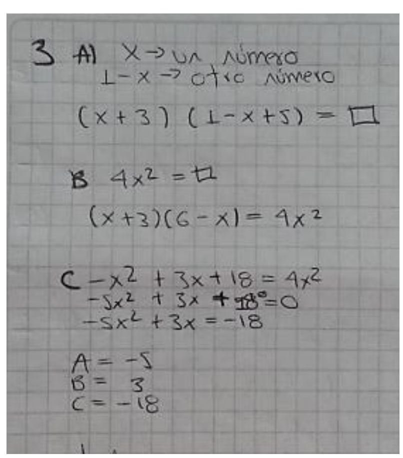


Figura 18. Solucion problema 3

Se logró la participación activa y entusiasta del 80% de los estudiantes, el otro 20% se mostró muy distraído. Se logró terminar casi en un 90% la actividad. Los estudiantes comprendieron que varias culturas en la antigüedad trabajaron en la solución de una ecuación cuadrática de esta forma.

Se dificultó la interpretación geométrica de la ecuación cuadrática.

A continuación, se realiza un análisis referente al aprendizaje de las ecuaciones diofánticas cuadráticas a partir de la utilización de los problemas históricos en los implementados en las actividades, donde se pretende identificar y valorar la motivación y el aprendizaje significativo del tema. Lo anterior se hace con base en la observación del trabajo realizado por los estudiantes y en el diálogo con los estudiantes durante el desarrollo de las actividades y las socializaciones correspondientes, así como por los resultados de una encuesta que llenaron los estudiantes.

4.2. Valoración de los resultados obtenidos en la práctica escolar de la investigación

4.2.1 Actividad 1: Introducción a las Ecuaciones Diofánticas

En esta actividad se resalta que a los estudiantes les llama la atención los problemas retadores, que no tienen una forma determinada de solución, sino que dan la opción de resolverse con análisis, con procedimientos conocidos o con tanteo. Otra cosa a destacar es que se manifiesta la dificultad que tienen los estudiantes en resolver problemas que tengan operaciones con fraccionarios o que tengan planteamientos geométricos. Parece ser que en este caso ellos tienen más facilidad con los procedimientos algebraicos.

También se puede ver que en el trabajo en casa no hay mucha voluntad y cuando encuentran dificultades, las manifiestan, pero no tratan de vencerlas.

4.2.2. Actividad 2: Ecuación diofántica de la forma $x^2 - y^2 = n$

En esta actividad hubo mucha motivación, por lo novedoso del tema, les gustó hallar paridades y a la hora de resolver cada ejercicio o problema, se sintieron con ganas de hallar la solución. Esta es una actividad donde se puede ver que el romper con la monotonía de los temas logra despertar en ellos el interés en la resolución de los problemas. Otra cosa que los motiva a los estudiantes es poder usar la calculadora porque sus deficiencias frente a la aritmética es uno de los inconvenientes muy notorios. Nuevamente se nota un poco de desinterés en el trabajo en casa porque cuando encuentran dificultades detienen el trabajo.

4.2.3. Actividad 3: Ternas Pitagóricas.

El objetivo de esta actividad se cumplió a pesar de que la actividad quedó incompleta. Lo que se logró se debió al entusiasmo con el que trabajaban los grupos. Sin darse cuenta, ellos van dejando salir el espíritu competitivo y eso hace más interesante la actividad para ellos. Esta actividad requirió de mucho trabajo por parte del docente para lograr que los estudiantes sacaran conclusiones, pues es algo que a la mayoría se les dificulta, al igual que encadenar temas. Se aprecia que sienten que cada cosa es un tema nuevo e independiente y al docente le toca hacer ver que todo se relaciona.

4.2.4. Actividad 4: Ecuaciones de Pell

La actividad fue exitosa debido a diferentes factores: al uso de la calculadora para hacer todos los cálculos requeridos; a la aplicación de fórmulas para hallar la solución siguiente; a la rapidez mental que tienen algunos estudiantes para hallar las soluciones que se requieren para después aplicar la fórmula, porque esto hace que hallar algo suscita competencia entre ellos. En esta actividad más que la historia, fue el tipo de ecuación y la forma de solución, lo que les llamó más la atención a los estudiantes. El trabajo en grupo fue muy bien aprovechado porque se distribuyeron papeles para avanzar con mayor velocidad en la solución de cada problema.

4.2.5. Actividad 5: Ecuaciones Diofánticas de la forma $x^2 \pm bx = \pm c$

Lo llamativo de esta actividad para los estudiantes, a diferencia de la anterior, fue la parte histórica, ver tres diferentes culturas resolviendo la misma ecuación de forma similar, y esos problemas babilónicos que parecían jeroglíficos, fue uno de los que más les llamó la atención. Nuevamente se evidencia que todo aquello que sea curioso y que tenga algo de retador, es lo que más les llama la atención a la mayoría de los estudiantes, y el hecho de poder compartir con sus compañeros y de discutir y de dar sus opiniones les motiva por el hecho que se sienten compitiendo por cuál de ellos está en lo cierto.

El hecho de trabajar en grupo este tipo de problemas es algo que ayuda no sólo a la motivación sino también al análisis matemático.

4.3. Resultados de la encuesta de satisfacción

Esta encuesta de satisfacción (ver Anexo 3) es aplicada a los estudiantes para conocer su opinión respecto a la presente investigación. Así se eligieron 8 preguntas, 2 de las cuales se responden con sí o no y, dependiendo de esta respuesta, la primera tiene opción de a veces o frecuentemente. Las otras 6 preguntas tienen una calificación de

5 niveles de satisfacción, que va desde completamente de acuerdo hasta completamente en desacuerdo. Estas preguntas se dirigen a determinar si la historia de la matemática como recurso didáctico incentiva el estudio de las ecuaciones diofánticas cuadráticas; a continuación, se muestran los resultados obtenidos en tal encuesta que se puede consultar en anexos.

Pregunta 1. Antes de los talleres, los docentes utilizaron la historia de las matemáticas como introducción a la resolución de problemas.

El 93,75% de los estudiantes respondió negativamente a esta pregunta. Para la única persona que respondió que SI, la frecuencia con la cual percibe la misma fue A VECES.

Pregunta 2. Antes de los talleres, conocía el concepto de Ecuación Diofántica.

El 100% respondió NO conocer el concepto mencionado.

Pregunta 3. Con la inclusión de la historia en los talleres, me sentí motivado a resolver los problemas planteados (ver Figura 19).

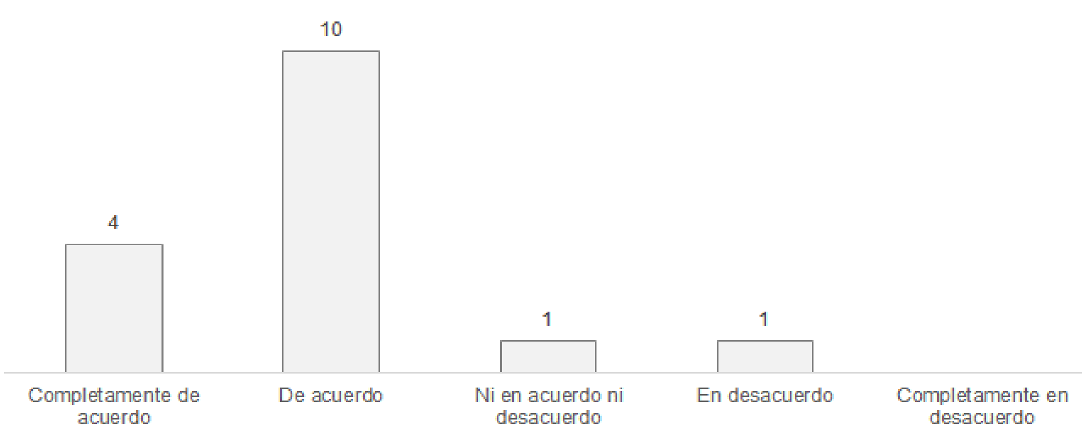


Figura 19. Pregunta 3

En esta pregunta el 25% de los encuestados respondió estar completamente de acuerdo y el 62,5% de los mismos respondió estar de acuerdo con la pregunta. Tan solo el 6,25% respondió estar en desacuerdo con la afirmación planteada.

Pregunta 4. La estructura de los talleres me facilita la resolución de los ejercicios planteados.

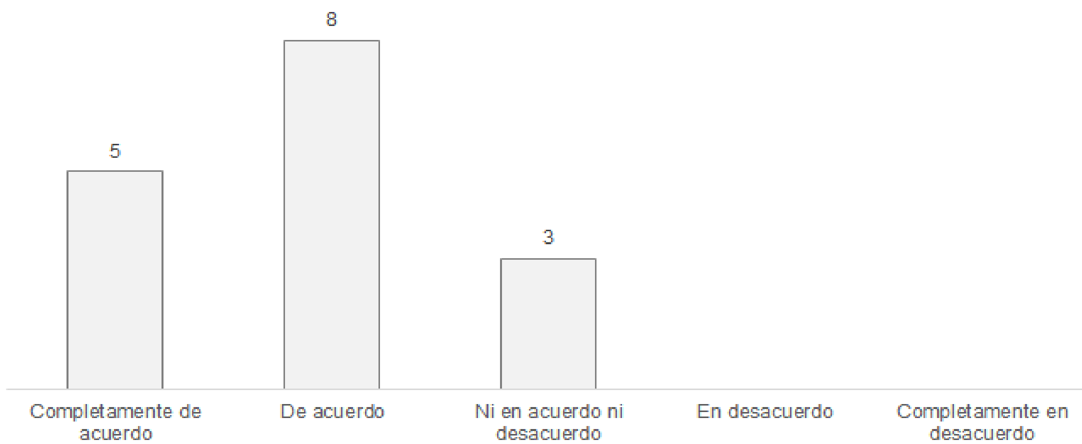


Figura 20. Pregunta 4

El 81,25% de los encuestados respondió estar en acuerdo o completamente de acuerdo con la afirmación (ver Figura 20).

Pregunta 5. Las ecuaciones diofánticas me permiten resolver problemas de la vida cotidiana

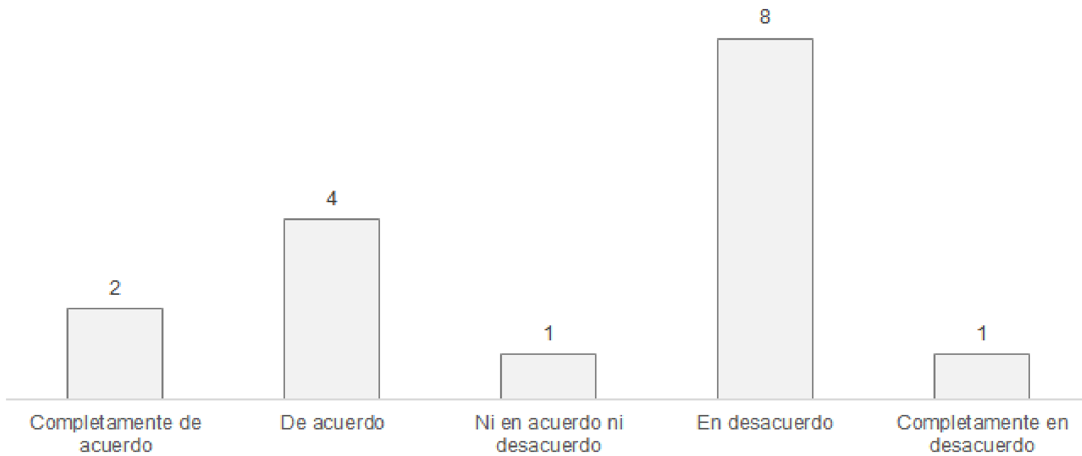


Figura 21. Pregunta 5

El 56,25% de los estudiantes respondieron estar en desacuerdo o completamente en desacuerdo con la afirmación. De otro lado, el 37,5% afirmaron estar por lo menos de acuerdo con lo planteado (ver Figura 21).

Pregunta 6. Me sentí motivado a resolver los problemas para desarrollar fuera de la clase.

El 93,75% de los encuestados afirma estar por lo menos de acuerdo con el planteamiento propuesto, mientras el 6,25% no tiene una postura concreta al respecto (ver Figura 22).

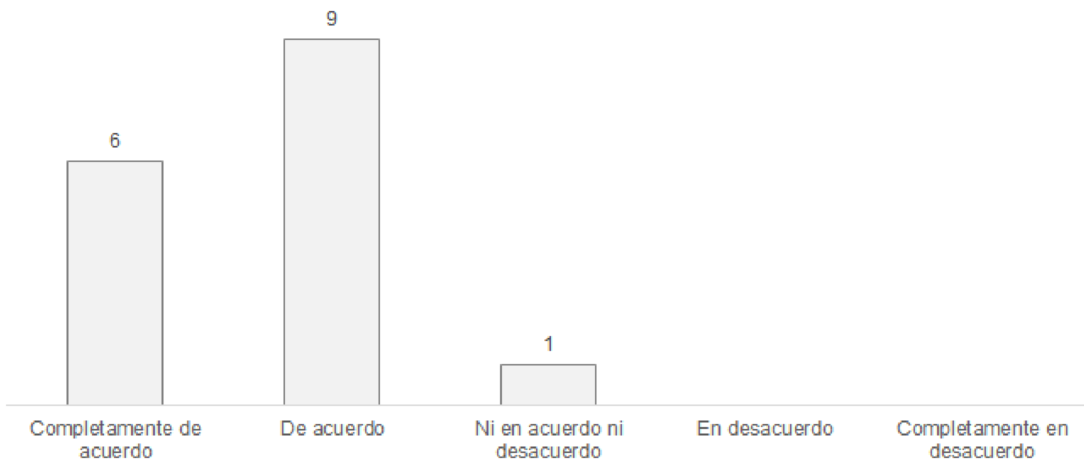


Figura 22. Pregunta 6

Pregunta 7. En algunos problemas, aunque inicialmente no podía encontrar la solución, me sentí motivado a buscar y pensar en las soluciones

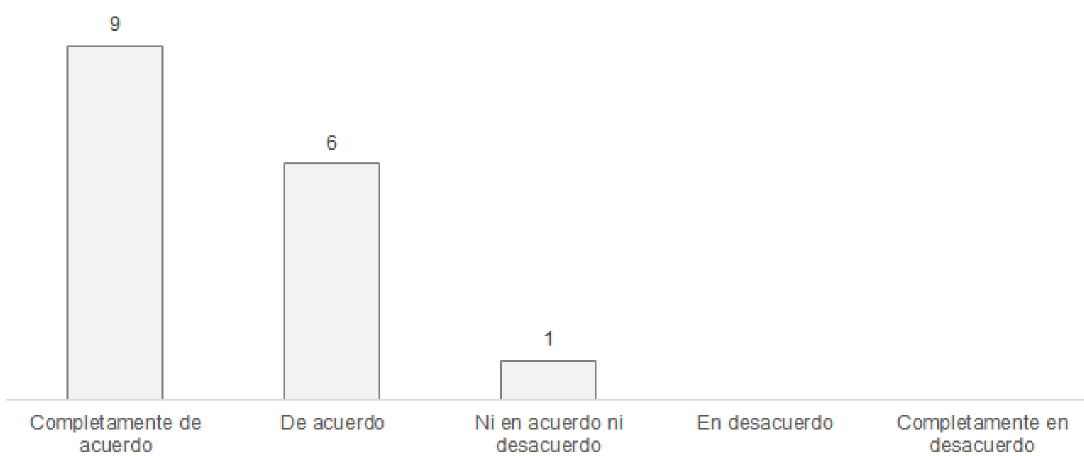


Figura 23. Pregunta 7

El 56,25% y el 37,5% de los estudiantes respondieron estar completamente de acuerdo o de acuerdo con el planteamiento propuesto (ver Figura 23).

Pregunta 8. Me gustaría que en mi proceso de aprendizaje se incluyeran elementos de historia de la matemática

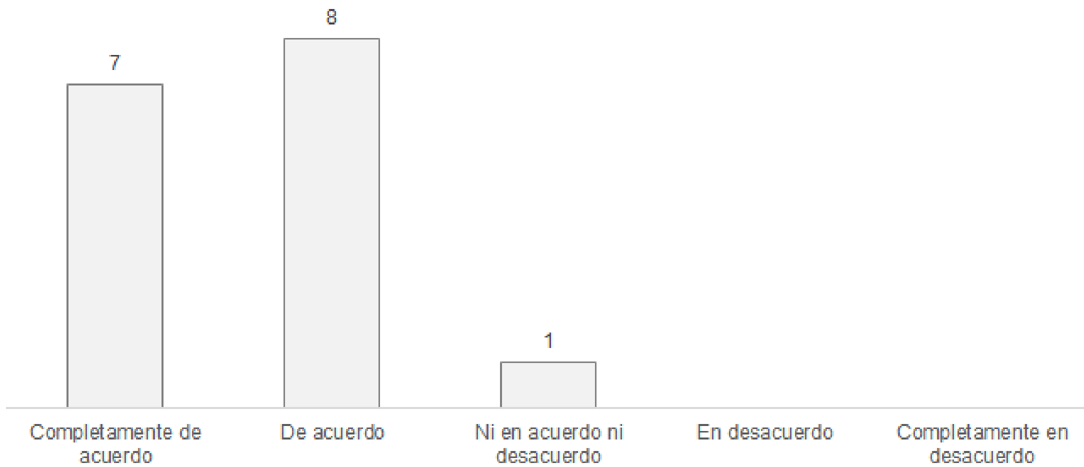


Figura 24. Pregunta 8

El 93,75% de los estudiantes afirmaron estar de acuerdo o completamente con la afirmación (ver figura 24).

Conclusiones acerca de la encuesta de percepción

Pregunta	Completamente de acuerdo	De acuerdo	Ni en acuerdo ni desacuerdo	En desacuerdo	Completamente en desacuerdo	Resumen Gráfico
3	4	10	1	1	0	
4	5	8	3	0	0	
5	2	4	1	8	1	
6	6	9	1	0	0	
7	9	6	1	0	0	
8	7	8	1	0	0	

Figura 25. Conclusiones de la Encuesta

1. Los estudiantes previamente no recibieron clases de matemática las cuales tuvieran la historia de la misma relacionada.

2. Antes de los talleres aplicados, los estudiantes no conocían el concepto de ecuación diofántica.
3. Las inclusiones de aspectos históricos de la matemática, motivaron a los estudiantes a resolver los problemas planteados durante la clase, a resolver los problemas pendientes en horario fuera de clase y desean que la historia de la matemática sea incluida en los procesos de aprendizaje de la misma.
4. La estructura de los talleres permitió que los estudiantes plantearan y resolvieran los problemas propuestos.
5. La mayoría de los estudiantes afirma que no percibe que las ecuaciones diofánticas tengan aplicación en la vida diaria.
6. El 50% de los estudiantes respondió la parte de la encuesta denominada “Comentarios Adicionales”, en los cuales resaltaron que fue interesante conocer la historia de la matemática y resolver los problemas históricos planteados, lo cual es coherente con lo encontrado en el análisis del cuestionario.

Conclusiones del capítulo 4

En el análisis de cada una de las cinco actividades se describe la manera como fueron desarrollados cada uno de los problemas por parte de los estudiantes, la motivación que pusieron por el aprendizaje, los logros obtenidos, como también las dificultades en cada una de ellas y las conclusiones correspondientes.

Durante el desarrollo de las actividades, en términos generales se evidencia, por ejemplo, en la Figura 18, que los estudiantes han desarrollado su pensamiento algebraico, el cual implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas ya que pueden hallar expresiones que generalizan ciertas situaciones. Además, conocen algunos métodos para solucionar ecuaciones y sistemas de ecuaciones, y reconocen rápidamente conceptos aritméticos que intervienen en la solución de las ecuaciones diofánticas.

Se hace constante la deficiencia que tienen los estudiantes en la comprensión de los enunciados de los problemas históricos que parece deberse a su lenguaje un poco complicado. También presentan bastante dificultad en los procedimientos básicos para la solución de ecuaciones y sobre todo lo relacionado con operar con fracciones.

También se nota el entusiasmo casi al 100% de los estudiantes a la hora de resolver este tipo de problemas que además de ser retadores, son diferentes a los que comúnmente ellos resuelven en sus clases.

El análisis de los resultados obtenidos mediante la implementación de las actividades es descrito en el orden de lo ocurrido durante el desarrollo de la actividad, la motivación por el aprendizaje, los logros alcanzados y las dificultades presentadas

La historia de la matemática no es un recurso que se utilice con frecuencia en el aula de clase y se aprecia que los estudiantes se sienten incentivados y motivados a resolver problemas que tengan que ver con la historia

La solución de problemas que se plantean con ecuaciones diofánticas les gusta, aunque ésta fue una temática desconocida para ellos y en general no le ven aplicación en su vida cotidiana.

Los estudiantes se sienten a gusto con actividades que tengan como base los problemas retadores.

CONCLUSIONES

El proceso de investigación sobre el uso de la historia para el desarrollo del pensamiento algebraico relacionado con las ecuaciones diofánticas cuadráticas, en estudiantes de grado noveno del IED Pablo de Tarso, mostró aspectos importantes para tener en cuenta. Los resultados obtenidos permiten señalar algunos puntos que son determinantes para el logro de los objetivos de esta tesis.

1. Las actividades incluyen problemas retadores para desarrollar el pensamiento algebraico de los estudiantes, en los cuales se puedan utilizar diferentes herramientas matemáticas, porque esto no sólo los motiva, sino que crea en ellos un espíritu de lucha frente a la solución del problema.

2. El uso de la historia de la matemática en la enseñanza de las ecuaciones diofánticas cuadráticas, constituye un buen recurso basado en la resolución de problemas que favorece el aprendizaje, debido al interés y motivación que genera en los estudiantes.

3. Las actividades diseñadas abordan el tema de las ecuaciones diofánticas, el cual es muy llamativo para los estudiantes por diferentes razones: son ecuaciones que involucran diferentes temas matemáticos para su solución, son retadoras pues su solución no es tan fácil de encontrar, se aplican propiedades especiales de los números enteros que no se tienen en cuenta en la solución de la mayoría de problemas algebraicos, están rodeadas de muchas historias interesantes y fomenta en ellos la competencia sana.

4. En las actividades, el trabajo en grupo para la solución de los problemas históricos fue muy beneficioso, ya que por la dificultad que presentan algunos de ellos, se

comparten conocimientos, ideas, formas de interpretar y se incrementa el sentimiento de ayuda mutua.

5. Posiblemente debido a la falta de problemas retadores a lo largo de la vida académica de los estudiantes, las actividades mostraron que ellos se vuelven temerosos en la búsqueda de diferentes caminos para hallar soluciones.

6. En las actividades se observó que los estudiantes estuvieron dispuestos a ser retados por un problema que sea llamativo y difícil, pero no imposible de resolver.

7. Los contenidos históricos sobre la ecuación diofántica propuestos en las cinco actividades desarrolladas pueden incluirse en un curso de matemáticas de grado noveno, debido a que, con el considerado acompañamiento del docente, motivan al estudiante a la resolución de problemas retadores.

8. Los contenidos propuestos deben estar articulados con otros temas establecidos para el curso, que sirvan para desarrollar en el estudiante la capacidad de análisis, para que de esta manera el estudiante encuentre utilidad en los conceptos aprendidos.

9. Los estudiantes mostraron interés y motivación en el desarrollo de las actividades, y expresaron que desean que la historia de la matemática sea incluida en los procesos de aprendizaje de la misma, ya que para ellos fue algo novedoso e interesante.

RECOMENDACIONES

Terminada la aplicación de las actividades propuestas y la utilización de la historia para favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes de grado noveno del IED Pablo de Tarso, y el correspondiente análisis de cada una de ellas, se hacen las siguientes recomendaciones, para optimizar el proceso investigativo y los resultados obtenidos.

1. Promover el diseño de actividades en las cuales se involucren problemas históricos, para diferentes temas que se dictan en los grados de educación secundaria.

2. Propiciar el trabajo en grupo en el aula, con la implementación de problemas retadores, para motivar a los estudiantes a buscar de diferentes formas las soluciones aparentemente imposibles de hallar.

3. Es de notar que a veces en la presente investigación, en lugar de guiar a los estudiantes formulándoles preguntas como sugiere Pólya, hubo una intervención explicativa más directa por parte del docente. Sin embargo, se utilizó frecuentemente la orientación de Polya, de modo que se recomienda continuar con el enfoque de Polya respecto a la solución de problemas, a partir de problemas históricos y retadores, con el propósito de motivar a los estudiantes para que así desarrollen su pensamiento matemático y mejoren su rendimiento académico.

4. Proponer formalmente que las actividades propuestas en esta tesis, puedan ser implementadas dentro del aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas en un curso de secundaria para lograr un mejor desarrollo del pensamiento algebraico y una buena motivación hacia el estudio de las matemáticas en los estudiantes.

5. Proponer que se enfoquen nuevas investigaciones al uso de la historia de la matemática a través de la resolución de problemas retadores relacionados con otros temas o áreas de la matemática de la educación secundaria o universitaria.

6. Proponer que se agregue al currículo de matemáticas de grado 9, el tema de las ecuaciones diofánticas cuadráticas, ya que encaja en los temas que se dictan en ese grado y además contribuyen al desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA

1. Andreescu, T., Andrica, D., & Cucurezeanu, I. (2010). *An introduction to Diophantine equations: a problem-based approach*. Springer Science & Business Media.
2. Antónia, R. (2001). Integrating history of mathematics into the mathematics classroom. *Centro de Matemática da Universidade do Porto. Preprint*, *25*. Recuperado 20-06-2017 de la URL: http://cmup.fc.up.pt/cmup/preprints/2001-25.pdf
3. Belisario, A & González, F. (2012). Historia de la Matemática, Educación Matemática e Investigación en Educación Matemática. *Revista iberoamericana de educación matemática*. pp. 161- 182. Venezuela.
4. Boscán Mieles, M.M. & Klever Montero, K.L. (2012). Metodología basada en el método heurístico de polya para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos. *Escenarios Vol. 10, No. 2.* 7-19. Recuperado el 14 de octubre de la URL:dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4496526.pdf
5. Brousseau G. (1993). Fundamentos y Métodos de la didáctica de las Matemáticas. Universidad de Burdeos
6. Burton, D. *The history of mathematics: An introduction*. McGraw-Hill Companies. página 229
7. Burton, D. *The history of mathematics: An introduction*. McGraw-Hill Companies. página 256
8. Butto, C & Rojano, T. (2004). Introducion temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. Educación Matemática, 16 (1), 113-148
9. Camargo, L. (2010). Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas

de educación secundaria. Tesis para optar al Grado de Doctora en Matemáticas. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia. p. 13.

10. Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. Investigación en Educación Matemática. 16, 75 - 94.

11. Costică, L. (2014). *Methods of solving Diophantine equations in secondary education in Romania.* Science Journal of Education. Pp 22-32. Romania.

12. De Guzmán, M. (1992). Tendencias actuales de la enseñanza de la matemática. *Revista de Ciencias de la Educación.* pp. 19-26. Recuperado 31-10-2017 URL: http://www.redalyc.org/pdf/800/80004304.pdf

13. De Guzmán, M. (1992). *Tendencias innovadoras en Educación Matemáticas*. Olimpíadas Matemáticas Argentinas. Buenos Aires. Recuperado 31-10-2017 URL: http://nautilus.fis.uc.pt/bspm/revistas/25/009-034.150.pdf

14. Fauvel, J & Maanem, J. (2002). History in mathematics education. The ICMI Study United States of America. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

15. Fauvel, J., & van Maanen, J. A. (Eds.). *History in mathematics education: The ICMI study*. Dordrecht: Kluwer 2000, pp. 143-170

16. Fernández, S., Aubanell, A., Laserna, D. B., & Dedò, M. (2010). *Escuela de educación matemática" Miguel de Guzmán": enseñar divulgando*. Ministerio de Educación.

17. Garbin, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 8(2) 169-193. Recuperado 11 de Noviembre de la URL:http://tuxchi.redalyc.org/articulo.oa?id=33580205

18. Gazit, A. (2013). ¿What do mathematics teachers and teacher trainees know about the

history of mathematics? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Volume 44. pp 501-512.

19. Godino, J. & Font, V. (2000). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Granada. P 774
20. Goktepe, S., & Ozdemir, A. S. (2013). An Example of Using History of Mathematics in Classes. *European Journal of Science and Mathematics Education*, *1*(3), 125-136. Recuperado el 29 de mayo de 2017 de la URL: http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1108226.pdf
21. González, P. M. (2008). El teorema llamado de Pitágoras: una historia geométrica de 4.000 años. *Sigma*, *32*, 103-130. Recuperado 19-06-2017 de la URL: http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_32/8_pitagoras.pdf
22. Hervás. R. & Miralles, P. (2000). La importancia de enseñar a pensar en el aprendizaje de la historia. *Educar en el 2000.* p 34-40. Recuperado 1-11-2017 en la URL: http://servicios.educarm.es/templates/portal/images/ficheros/revistaEducarm/10/revsita9_art06.pdf
23. Ho, W. K. (2008). Using history of mathematics in the teaching and learning of mathematics in Singapore. *1st RICE, Singapore: Raffles Junior College*.. Recuperado el 29 de Mayo de 2017 de la URL: http://math.nie.edu.sg/wkho/Research/My%20publications/Math%20Education/hom.pdf
24. Jankvist, U. T. (2009). Using history as a 'goal' in mathematics education. Recuperado 27 de mayo de 2017 de la URL:

http://forskning.ruc.dk/site/files/3823469/IMFUFA_464.pdf

25. Lebesgue, H. (1930). *La Mesure des Grandeurs.* (La Medida de las Magnitudes).
26. López, G. (2012). Pensamiento crítico en el aula.*Docencia e Investigación*. Numero 22. P 41-60. Recuperado 1-11-2017 de URL: http://educacion.to.uclm.es/pdf/revistaDI/3_22_2012.pdf
27. Minerva, F. (2006). El proceso de investigación científica. Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia.
28. Minerva, F. (2006). *El proceso de investigación científica.* Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia. p. 116.
29. Ministerio de Educación Nacional. (2003). *Estandares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá. Recuperado 30-06-2017 de la URL: http://eduteka.icesi.edu.co/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf
30. Oliván, E. (2012). *Ecuaciones Diofánticas*. Publicaciones Didácticas. No.16 Junio 2012. Pág. 51
31. Perez, S. (2011). Ecuaciones Diofantinas. Tesis de pregrado. Universidad de Panamá. Panamá
32. Polya, G. (1981). *Cómo Plantear y Resolver Problemas*. Editorial Trillas México. Recuperado de 14 de octubre de la URL: https://es.scribd.com/doc/228913306/Como-Plantear-y-Resolver-Problemas
33. Pólya, G. (1981). *Cómo Plantear y Resolver Problemas*. Editorial Trillas México. Recuperado de 30 de Junio de la URL: https://es.scribd.com/doc/228913306/Como-Plantear-y-Resolver-Problemas, p. 81.
34. Pólya, G. (1981). *Cómo Plantear y Resolver Problemas*. Editorial Trillas México. Recuperado de 10 de Julio de la URL: https://es.scribd.com/doc/228913306/Como-

Plantear-y-Resolver-Problemas. p. 21.

35. Polya, George (1981) Mathematical Discovery. On understanding, learning and teaching problem solving. Combined Edition. New York: Wiley & Sons, Inc

36. Rodrigo, M. J. (1997). *La construcción del conocimiento escolar* (p.14). Barcelona: Paidós. Recuperado 26 de Febrero de 2016 de la URL: http://www.terras.edu.ar/biblioteca/3/EEDU_Lacasa_Unidad_1.pdf

37. Rodrigo, M. J. (1997). *La construcción del conocimiento escolar* (p.14). Barcelona: Paidós. Recuperado 26 de Febrero de 2016 de la URL: http://www.terras.edu.ar/biblioteca/3/EEDU_Lacasa_Unidad_1.pdf

38. Rodríguez, M. & Vásquez, M. (2012). Usos de la historia en la enseñanza de la matemática. *VIII Festival Internacional de Matemáticas.*

39. Rojas, P. & Vergel, R. (2013). *Procesos de Generalizacion y Pensamiento Algebraico*. Edición especial. Educacion, Ciencia y Tecnología. Bogotá

40. Sampieri, R. H., Collado, C. F., Lucio, P. B., & Pérez, M. D. L. L. C. (1998). *Metodología de la investigación* (Vol. 1). México: Mcgraw-hill.

41. Sánchez, C. (2013). ¿Cómo Contextualizar y Dejar Pensar la Matemática? CEMACYC, República Dominicana. Universidad de La Habana Cuba. ICMI. pp. 1-16.

42. Sandín Esteban, M. P. (2003). *Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones.* Madrid: Mc Graw Hill.

43. SCHOENFELD, A. (1985): Solución de problemas matemáticos. USA. Academic Press, Inc.

44. Sierra, M. (2009). Notas de Historia de las Matemáticas para el Currículo de Secundaria. *Colección Digital Eudoxus*, *1*(5)

45. Urbaneja, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e

instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma: Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, (45), 17-28.

46. Vargas, J. *Un viaje por la historia de algunas ecuaciones algebraicas y su enseñanza en la escuela*. Universidad Nacional de Colombia, Medellín 2013. Página 47
47. Wenger, E. (1998). *Comunidades de práctica*. Editorial Paidós .pág.5. Recuperado el 27 de octubre del 2015 de la URL: http://cmap.javeriana.edu.co/servlet/SBReadResourceServlet?rid=1JP2KX093-1GX1ZY0-28S
48. Wenger, E. (1998). *Comunidades de práctica*. Editorial Paidós. p. 23. Recuperado el 27 de febrero del 2017 de la URL: http://cmap.javeriana.edu.co/servlet/SBReadResourceServlet?rid=1JP2KX093-1GX1ZY0-28S.
49. Wenger, E. (1998). *Comunidades de práctica*. Editorial Paidós. pag.282. Recuperado el 28 de febrero del 2016 de la URL:http://cmap.javeriana.edu.co/servlet/SBReadResourceServlet?rid=1JP2KX093-1GX1ZY0-28S.
50. Wenger, E. (1998). *Comunidades de práctica*. Editorial Paidós. pag.282. Recuperado el 28 de febrero del 2016 de la URL:http://cmap.javeriana.edu.co/servlet/SBReadResourceServlet?rid=1JP2KX093-1GX1ZY0-28S.
51. Wenger, E.(1998). *Comunidades de práctica*. Editorial Paidós. pag.23. Recuperado el 27 de febrero del 2017 de la URL: http://cmap.javeriana.edu.co/servlet/SBReadResourceServlet?rid=1JP2KX093-1GX1ZY0-28S.

52. Wenger, E., McDermott, R. y Snyder, W. (2002). Cultivating Communities of Practice: A Guide to Managing Knowledge. Boston, Massachusetts: Harvard Business School Press. ISBN 1-57851-330-8.

53. Yuste, P. (2008). Ecuaciones cuadráticas y procedimientos algorítmicos. Diofanto y las matemáticas en Mesopotamia:(Quadratic equations and algorithmic procedures. Diophantus and Mesopotamian mathematics). *THEORIA. Revista de Teoría, Historia y Fundamentos de la Ciencia*, *23*(2), 219-244.

ANEXOS

Anexo 1. **Encuesta a profesores**

Objetivo: Establecer un punto de partida para el presente trabajo de investigación, respecto a la historia de la matemática como recurso didáctico para la enseñanza de las ecuaciones diofánticas cuadráticas

ENCUESTA PARA DOCENTES DE MATEMATICAS

1. Vio historia de la matemática en su pregrado NO__ SI__
2. Utiliza la historia de la matemática en el aula de clase NO__ SI__

   Si la respuesta fue SI, responda: A veces___ Con frecuencia ___

3. Conoce algún método para implementar la historia de la matemática en las clases

   NO__ SI__

4. En los textos que usted utiliza para sus clases, tienen contenido histórico de los temas NO__ SI__
5. Incluir la historia de la matemática en clases de matemáticas facilitaría la comprensión de los temas

Completamente de acuerdo	Muy de acuerdo	De acuerdo	En desacuerdo	Completamente en desacuerdo

Anexo 2. **Solicitud permiso a estudiantes**

Estudiante

IED Pablo de Tarso

Como requisito para optar al título: Magister en Educación Matemática que adelanto en la Universidad Antonio Nariño de Bogotá sede Federman, estoy desarrollando la práctica con los estudiantes de grado noveno, con la autorización de las directivas del colegio.

Para este estudio, es necesario hacer un registro fotográfico donde se valide el desarrollo de los talleres en el cual aparecerá usted. Por esta razón solicito su autorización para realizar dicho procedimiento.

Agradezco su comprensión colaboración.

Atentamente,

Carmen Yenny Cuestas Zabala	Estudiante
Docente de matemáticas	T.I

Anexo 3. **Encuesta de percepción**

1. Antes de los talleres, los docentes utilizaron la historia de las matemáticas como introducción a la resolución de problemas NO____ SI____

Si la respuesta fue SI, responda: A veces___ Con frecuencia __

2. Antes de los talleres, conocía el concepto de Ecuación Diofántica NO____ SI____

Para usted:	Completamente de acuerdo	De acuerdo	Ni de acuerdo ni En desacuerdo	En desacuerdo	Completamente en desacuerdo
3. Con la inclusión de la historia en los talleres, me sentí motivad@ a resolver los problemas planteados					
4. La estructura y el orden de los talleres me facilitaron la resolución de los ejercicios planteados					
5. Las ecuaciones diofánticas me han permitido resolver problemas de la vida cotidiana					
6. Me sentí motivado a resolver los problemas para desarrollar fuera de la clase.					
7. En algunos problemas, aunque inicialmente no podía encontrar la solución, me sentí motivado a buscar y pensar en las soluciones					
8. Me gustaría que en mi proceso de aprendizaje se incluyeran elementos de historia de la matemática					

COMENTARIOS ADICIONALES: